

集中载荷作用下弹性球壳大范围非线性问题¹⁾

王林祥 武际可

(北京大学力学与工程科学系, 北京 100871)

摘要 采用有限元法中的伪弧长法研究了集中载荷作用下弹性球壳轴对称大范围非线性问题, 变形的范围从初始状态到壳体完全翻转. 文中作了计算结果与实验结果的比较.

关键词 有限元法, 非线性, 球壳, 伪弧长算法

引 言

球壳大范围非线性问题是一极复杂的问题. 由于数学上的困难, 即使仅限于轴对称变形, 有关集中载荷作用下球壳的非线性结果也很少, 且已有的结果只在较小变形范围, 如几倍壳厚度范围内适用. 文献 [1] 中给出一简单的载荷与挠度三次曲线关系, 这是目前公认的在变形不太大时的较好结果. 此结果指出, 球壳没有屈曲现象. 由本文计算结果可看出, 集中载荷作用下的球壳不但具有明显的屈曲, 且会出现多个临界点和起波纹的复杂现象.

伪弧长算法是解决多临界点这类问题的非常有效的方法. 文中所采用的伪弧长算法是北京大学力学与工程科学系非线性计算力学课题组独立提出的一种有效且完善的算法^[3~7], 已在大型非线性结构分析有限元程序中得以实现. 利用这种算法不仅可顺利通过极值分叉点, 也可计算简单分叉问题.

1 计算结果

球壳如图 1 所示, 壳半径为 R , 厚度为 h , 底边夹角为 θ , 壳边缘铰支, 壳中点受一集中力 P . 本文只考虑轴对称变形, 故可取一条来加以研究, 如图 2 所示. 计算中取杨氏弹性模量 $E = 2.0 \times 10^5$, 泊松比 $\mu = 0.3$, $R = 100$, h . 取 $F = P / Eh^3$, $y_0 = w_0 / h$, 其中 w_0 为壳中点挠度.

取 $R = 10$, $\theta = 30^\circ$, 图 3 (a) 和图 3 (b) 分别给出了不同变形范围内载荷与中点挠度的曲线.

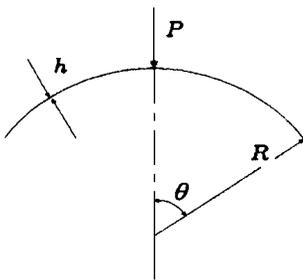


图 1 结构示意图

Fig. 1 Spherical shell with a concentrated load at the top

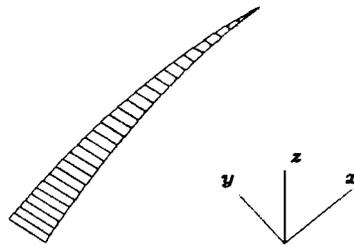


图 2 计算模型

Fig. 2 Finite element mesh

¹⁾ 国家自然科学基金与国家教委博士点基金资助项目.

1996 - 02 - 12 收到第一稿, 1996 - 07 - 24 收到修改稿

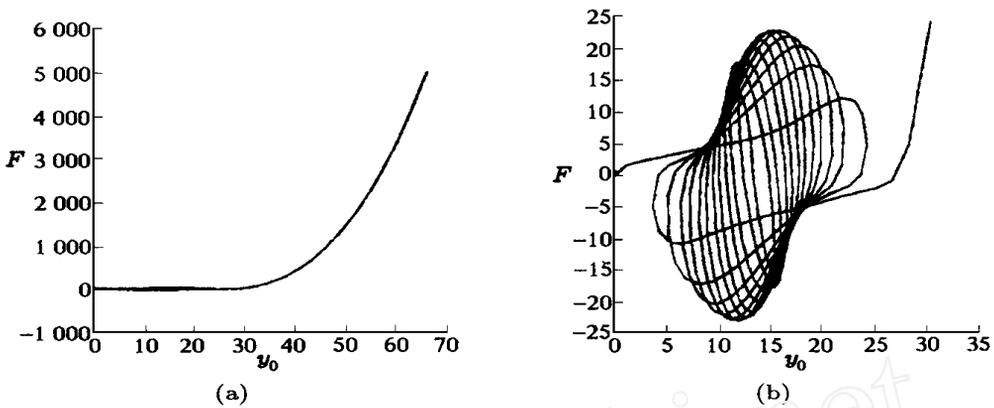


图3 载荷-挠度曲线

Fig. 3 Load - deformation curve

壳体的变形过程为，在变形开始阶段，随弧长变量的增加，壳的波纹数不断增加，当弧长变量达到某一值后，波纹数将随弧长变量的增加而减少直至壳体完全翻转。称载荷 - 挠度曲线上对应于波纹增加的部分为波纹增加段曲线，波纹减少的部分为波纹减少段曲线。图4所示为部分波纹增加段载荷与中心挠度曲线，图5所示为对应于图4上A、B、C、D、E、F点处的变形。

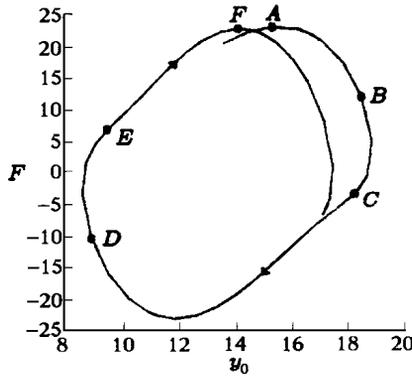


图4 波纹增加段部分载荷 - 挠度曲线

Fig.4 Load-deformation curve with the increase of the wave number



图5(a) A点处的变形
Fig.5(a) Deformation at A

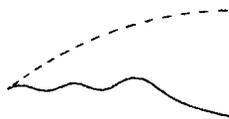


图5(b) B点处的变形
Fig.5(b) Deformation at B



图5(c) C点处的变形
Fig.5(c) Deformation at C



图5(d) D点处的变形
Fig.5(d) Deformation at D



图5(e) E点处的变形
Fig.5(e) Deformation at E

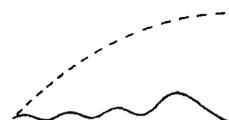


图5(f) F点处的变形
Fig.5(f) Deformation at F

图 6 所示为部分波纹减少段载荷与中心挠度曲线，图 7 所示为对应于图 6 上 A, B, C, D, E, F 点处的变形.

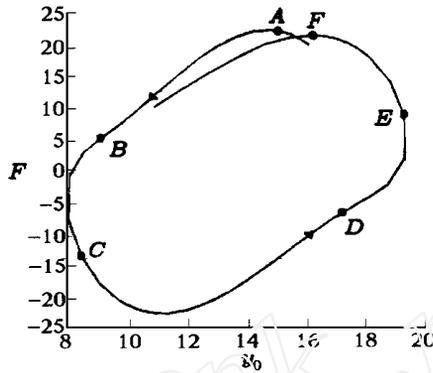


图 6 波纹减少段部分载荷 - 挠度曲线
Fig.6 Load-deformation curve with the decrease of the wave number

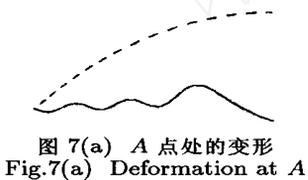


图 7(a) A 点处的变形
Fig.7(a) Deformation at A

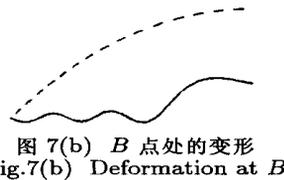


图 7(b) B 点处的变形
Fig.7(b) Deformation at B

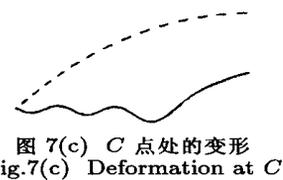


图 7(c) C 点处的变形
Fig.7(c) Deformation at C

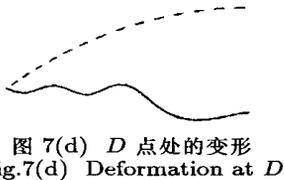


图 7(d) D 点处的变形
Fig.7(d) Deformation at D

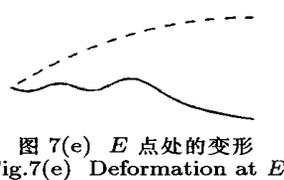


图 7(e) E 点处的变形
Fig.7(e) Deformation at E

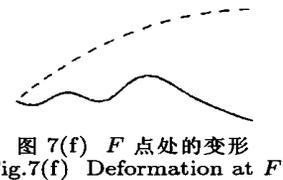


图 7(f) F 点处的变形
Fig.7(f) Deformation at F

由图 4~图 7 可看出，在波纹增加段，载荷与挠度曲线每绕一周，波纹数增加一个，在波纹减少段，载荷与挠度曲线每绕一周，波纹数减少一个. 图 8~图 10 为不同角下载荷与壳体中心挠度曲线.

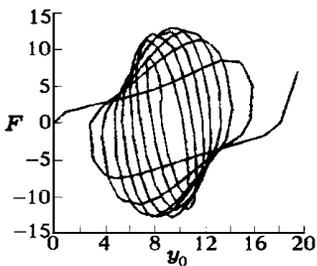


图 8 载荷 - 挠度曲线 $\theta = 20^\circ$
Fig.8 Load-deformation curve for $\theta = 20^\circ$

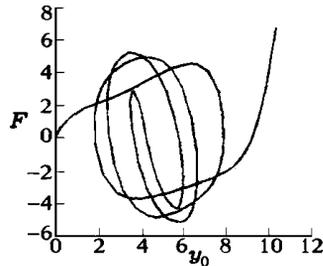


图 9 载荷 - 挠度曲线 $\theta = 10^\circ$
Fig.9 Load-deformation curve for $\theta = 10^\circ$

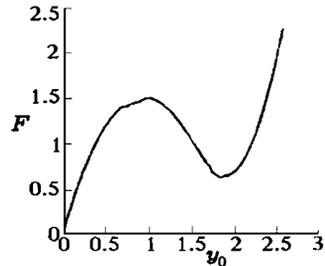


图 10 载荷 - 挠度曲线 $\theta = 2.5^\circ$
Fig.10 Load-deformation curve for $\theta = 2.5^\circ$

由图 8~图 10 可看出，壳在翻转过程中所起的波纹数与角有关，角越大，所起的波纹数越多. 当角小于特定值时，载荷与挠度曲线不回绕. 称载荷与挠度曲线上的最小载荷值为载荷下限，记为 F_{min} . 图 11 为不同角下的载荷与挠度曲线，图 12 为载荷下限与角曲

线. 为了与已有扁薄球壳的结果作比较, 取边界条件为壳边缘可在其平面内滑动. 图 13 (a) 和图 13 (b) 给出了本文和文 [9] 的结果.

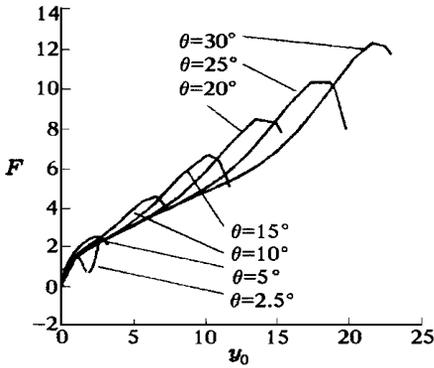


图 11 不同 θ 角下的载荷 - 挠度曲线
Fig.11 Load-deformation curve for different θ

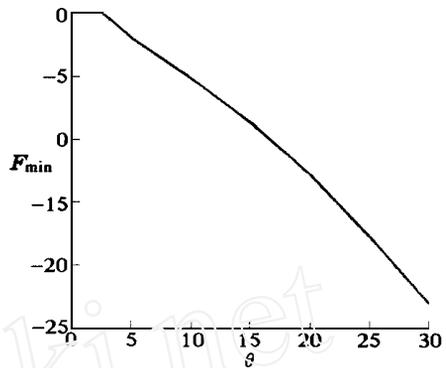


图 12 $F_{min}-\theta$ 曲线
Fig.12 $F_{min}-\theta$ curve

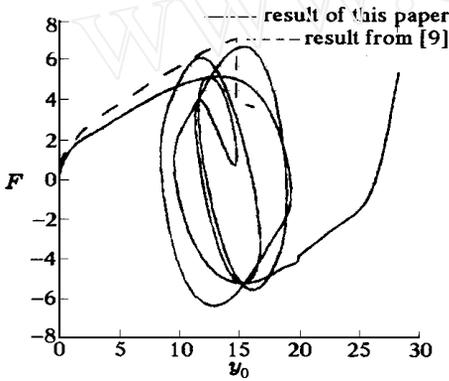


图 13(a) 载荷 - 挠度曲线 $\theta = 11.54^\circ$
Fig.13(a) Load-deformation curve for $\theta = 11.54^\circ$

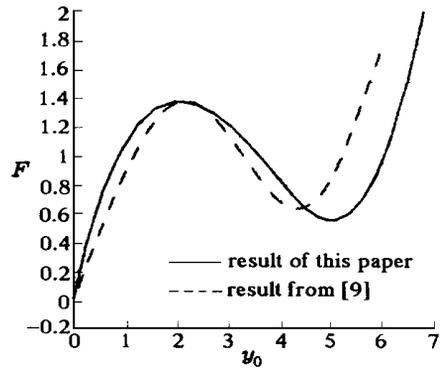


图 13(b) 载荷 - 挠度曲线 $\theta = 7.545^\circ$
Load-deformation curve for $\theta = 7.545^\circ$

2 结 论

集中载荷作用下弹性球壳的大范围非线性行为是极为复杂的. 当夹角 θ 大于某一值时, 球壳在翻转过程中将出现起波纹现象, 此时球壳的翻转过程可分为波纹数增加和波纹数减少两个阶段. 翻转过程中的最大波纹数与 θ 角有关, 在一定范围内, θ 角越大, 最大波纹数越大. 当 θ 角小于某一值时, 球壳在翻转过程中不出现起波纹现象.

在球壳翻转过程中, 解流形将多次通过极值点分叉, 采用伪弧长方法计算这样的问题是非常有效的. 与一般载荷增量法相比, 伪弧长算法所需附加计算量是很少的, 故它是一种适合大型非线性有限元程序的方法.

参 考 文 献

- 1 П . . . , 1966 , 9397
- 2 Keller B. Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems in applications of bifurcation theory. Academic Press Inc. New York , London , 1977
- 3 Riks E. *Int J Solids Structures* , 1979 , 15 : 529 ~ 551
- 4 苏先樾 , 王颖坚 , 武际可 , 胡海昌. 结构力学及其应用 , 1988 , 3 : 1 ~ 9
- 5 苏先樾 , 武际可 , 胡海昌. 中国科学 A 辑 , 1987 (4) : 398 ~ 410
- 6 季海波 , 武际可 , 胡海昌. 中国科学 A 辑 , 1991 (9) : 948 ~ 954
- 7 武际可 , 苏先樾. 弹性系统的稳定性. 北京 : 科学出版社 , 1994 : 167 ~ 205
- 8 Bushnell D. *AIAA Jour* , 1967 , 5 : 2034 ~ 2040
- 9 Loo TC , Evan - Iwanowski RM. *Proc ASCE EM* , 1964 , 90 : 255 ~ 270

LARGE - SCALE NONLINEAR PROBLEM OF ELASTIC SPHERICAL SHELLS SUBJECTED TO CONCENTRATED LOAD

Wang Linxiang Wu Jike

(*Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China*)

Abstract The large - scale axisymmetrical nonlinear problem of elastic spherical shells subjected to concentrated load is studied by the pseudo - arclength algorithm of the finite element method. The range of the deformation is from the initial states to the complete retroflexion of shells. The calculated results are compared with the experiment results.

Key words finite element method , nonlinear , spherical shell , pseudo - arclength algorithm