

二维介质参数的大扰动反演方法¹⁾

马兴瑞 牛玉清 黄文虎

(哈尔滨工业大学航天工程与力学系, 哈尔滨 150001)

摘要 对非均匀介质参数反演问题进行了研究, 并提出了用于反演二维介质参数的广义射线近似方法. 利用参考场量和扰动变量对声波方程中的介质参数进行处理, 并利用 Green 函数理论得到扰动参数比的积分方程. 基于非均匀介质中波函数的局部理论和射线理论, 引入了全波场的广义射线近似形式, 通过定义介质参数函数, 把反演目标归结为其第一类 Fredholm 积分方程. 利用积分变换方法得到二维介质的介质参数函数, 从而得到介质参数, 在 Born 近似方法中, 反演的介质参数扰动不能超过 20%, 但是在本文中介绍的方法能够有效地反演其扰动比不超过 50% 的变化情况.

关键词 反演, 大扰动参数, 积分方程, 广义射线近似

引 言

Born 弱散射近似方法是反演非均匀介质参数的有效方法^[1,2], 此方法的优点在于利用入射波场代替全波场, 此时要求介质参数的变化必须足够小, 并且满足弱散射条件. 利用这种方法反演介质参数, 得到的参数扰动比不超过 20%^[3].

Born 弱散射近似方法不能够反演介质参数扰动比超过 20% 的情况, 这种小扰动弱散射条件对于一些真实工程情况是不能满足的. 在本文中描述了一种反演二维介质参数的近似方法, 这里假设介质的密度和波速仅仅在横向和纵向变化, 谐振源作用在原点并且散射信号的测量在表面进行. 在 Born 弱散射近似方法中, 由于采用了弱散射近似的假设, 所以认为在介质中的全波场与入射场等效. 在本文中去掉了这一假定, 对一般的散射问题进行了研究. 这里根据特定的入射波场对全波场引入了广义射线近似形式, 此形式是基于非均匀介质中的波函数局部理论^[4]和射线理论^[5]. 通过引入幅值修正和相位延迟, 把反演问题归结为本文定义的介质参数函数的第一类 Fredholm 积分方程. 一维介质中的参数反演问题在文献 [6] 中给出, 其中采用了分层处理的技术方法. 本文采用了积分变换的方法, 得到了二维介质中的介质参数函数解, 并成功地进行了带有横向弱变化二维介质参数反演的算例分析.

1 积分方程

非均匀介质中的弹性波动方程为

$$\partial_i(\lambda\partial_k u_k) + \partial_i[\mu(\partial_i u_i + \partial_i u_i)] + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

式中, λ , μ 为介质的拉梅系数, ρ 为介质的密度, u_i 是位移场分量, F_i 是体力分量, ∂_i 表

1) 国家自然科学基金重点项目, 国家教委博士点基金项目和国家教委跨世纪优秀人才计划基金项目资助.

1996-02-05 收到第一稿, 1996-09-02 收到修改稿.

示对坐标 i 求偏导数, $\ddot{u}$ 表示对时间的二阶导数, 且有 $i, j = 1, 2, 3$.

引入无粘性假设, 也就是假定 $\mu = 0$ ($\lambda = E$), 这样介质中的横波可以不用考虑, 在以下过程中把体力忽略掉, 方程 (1) 可以写成

$$\frac{1}{\rho} \partial_i (E \theta) = \ddot{u}_i \quad (2)$$

式中, $\theta = \partial_i u_i$.

把偏导 ∂_i 作用于方程式 (2) 的两边并且对 i 分别取 1, 2, 3 时得到的三式相加, 则可以得到下列方程

$$\operatorname{div} \left[\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} (E \theta) \right] = \ddot{\theta} \quad (3)$$

定义 $\phi = -E\theta$ 并且代入式 (3) 并变换到 ω 域中, 得到非均匀介质中的声波方程形式

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla \phi \right) + \frac{\omega^2}{E} \phi = 0 \quad (4)$$

式中, $\phi(r)$ 为介质中的全波场, r 表示空间位置矢量, ω 为圆频率, ∇ 表示二维梯度算子.

利用背景场量 ρ_0 , E_0 和扰动变量 $\delta\rho$, δE ; 介质参数 ρ , E 可写成

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad E = E_0 + \delta E \quad (5)$$

式中, 参考场量 ρ_0 , E_0 为均匀介质的介质参数; $\delta\rho$, δE 可以认为是非均匀介质相对于均匀介质的扰动值.

定义下面两个无量纲量

$$\alpha_1 = \frac{\delta\rho}{\rho}, \quad \alpha_2 = \frac{\delta E}{E} \quad (6)$$

得到如下 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \phi + k_0^2 \phi = -\delta(r) + \nabla \cdot (\alpha_1 \nabla \phi) + k_0^2 \alpha_2 \phi \quad (7)$$

式中, k_0 为波数, 并且有

$$k_0 = \frac{\omega}{u_0}, \quad u_0 = \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}} \quad (8)$$

根据 Green 函数理论, 式 (7) 可以如同文献 [3] 中那样变换成积分方程的形式

$$\phi_{(s)}(r_0) = \oint r G(r | r_0) [\nabla \cdot (\alpha_1 \nabla \phi) + k_0^2 \alpha_2 \phi] \quad (9)$$

式中, $\phi_{(s)}(r_0)$ 表示检测点 r_0 处的散射位移场, $G(r | r_0)$ 为均匀介质的 Green 函数, 对二维介质满足

$$G(r | r_0) = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(k_0 | r - r_0 |) \quad (10)$$

$\mathrm{d}r$ 表示对充满介质的二维空间积分.

从以上可以看到, 散射波场是由于介质的不均匀性产生, 从方程的形式来看, 介质参数的扰动可以认为是产生散射波场的源函数.

2 广义射线近似方法

根据非均匀介质波函数局部理论的定性分析^[4], 可以得到如下结论:

1) 由局部波速梯度测量所得到的介质“不均匀性”, 增加了由一定强度的点源产生的波函数的幅值.

2) “不均匀性”减少了空间的振荡, 也就是说, 具有波速梯度较大的介质, 相比于较均匀的介质, 产生较长的波长.

在射线理论的渐近构造中^[5], 对二维介质情况, 当矢径增大时, 幅值具有 $r^{-1/2}$ 的量级, 同样在程函方程中, 相位具有级数的渐近展开形式. 应用上面这些结果, 引入幅值修正和相位延迟, 得到本文设定的全波场广义射线近似形式

$$\phi(r) = (1 + \alpha_3)^{-1/2} \exp[i k_0 (1 + \alpha_3) r] \quad (11)$$

式中, r 为矢径 r 的模, α_3 为波数的扰动比, 即

$$\alpha_3 = \frac{\delta k}{k_0} = \frac{k - k_0}{k_0} \quad (12)$$

α_1, α_2 和 α_3 具有如下关系

$$(1 + \alpha_3)^2 = \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \quad (13)$$

把式 (10) 和 (11) 代入式 (9), 得到积分方程

$$\phi^{(s)}(r_0) = \int r H_0^{(1)}(\sigma) \sigma(r) \quad (14)$$

式中

$$\sigma = k_0 |r - r_0| \quad (15)$$

$\alpha(r)$ 在本文中将其定义为介质参数函数, 对二维介质来说具有如下形式

$$\begin{aligned} \alpha(r) = & \frac{i}{4} \exp[i k_0 (1 + \alpha_3) r] \cdot \{ k_0^2 [\alpha_2 (1 + \alpha_3)^{-1/2} - \alpha^1 (1 + \alpha_3)^{3/2}] + \\ & i k_0 \frac{\alpha_1}{r} (1 + \alpha_3)^{-1/2} + i k_0 \frac{1}{r} (1 + \alpha_3)^{1/2} (r \cdot \nabla \alpha_1) + \\ & \alpha_1 [i k_0 \frac{1}{r} (1 + \alpha_3)^{-1/2} - 2 k_0^2 (1 + \alpha_3)^{1/2}] (r \cdot \nabla \alpha_3) + \\ & \alpha_1 [\frac{3}{4} (1 + \alpha_3)^{-5/2} - k_0^2 r^2 (1 + \alpha_3)^{-1/2} - i k_0 r (1 + \alpha_3)^{-3/2}] (\nabla \alpha_3 \cdot \nabla \alpha_3) + \\ & [i k_0 r (1 + \alpha_3)^{-1/2} - \frac{1}{2} (1 + \alpha_3)^{-3/2}] (\nabla \alpha_1 \cdot \nabla \alpha_3) + \\ & \alpha_3 [i k_0 r (1 + \alpha_3)^{-1/2} - \frac{1}{2} (1 + \alpha_3)^{-3/2}] (\nabla \cdot \nabla \alpha_3) \} \end{aligned} \quad (16)$$

这样反演的目标可以归结为求介质参数函数的第一类 Fredholm 积分方程解, 这里 Hankel 函数可以认为是核.

3 介质参数函数的解

当所有的检测点均置于 z_0 为零的直线上时, 式 (15) 可以简化成如下形式

$$\sigma = k_0 \sqrt{(x - x_0)^2 + z^2} \quad (17)$$

式 (14) 构成了 x 维的卷积形式,利用文献[3]中描述的方法,得到介质参数函数的解

$$\alpha(x,z) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 k_3 \delta(s)(x_0) \cdot \exp[2ik_1(x-x_0) - 2ik_3z] \quad (18)$$

与仅纵向变化模型相比,带有横向弱变化的介质模型与真实情况更接近,在文献 [6] 中给出了纵向模型的介质参数反演过程. 在本文中利用积分变换方法,得到如式 (18) 所示的介质参数函数解. 在介质参数函数中,介质参数的横向导数项和纵向二阶以上导数项,由于变化量为小量,均被忽略掉,这样介质参数函数为

$$\alpha(x,z) = \frac{i}{4} \exp[ik_0(1+\alpha_3)r] \{ k_0^2 [\alpha_3(1+\alpha_3)^{-1/2} - \alpha_1(1+\alpha_3)^{3/2}] + ik_0z \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \frac{1}{r} (1+\alpha_3)^{1/2} + \alpha_1z \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} [ik_0 \frac{1}{r} (1+\alpha_3)^{-1/2} - 2k_0^2(1+\alpha_3)^{1/2}] \} \quad (19)$$

结合式 (13) 和式 (19),就可以从中分离出介质参数的值.

以下考虑一种横向弱变化的介质模型,其密度和波速分布情况分别如图 1,图 2 所示. 背景量取如下值

$$\rho_0 = 1\,000\text{kg/m}_3, \quad u_0 = 1\,500\text{m/s} \quad (20)$$

所有检测点分布在线 $z_0 = 0$ 上,共 128 个. 密度和波速的反演结果分别如图 3,图 4 所示.

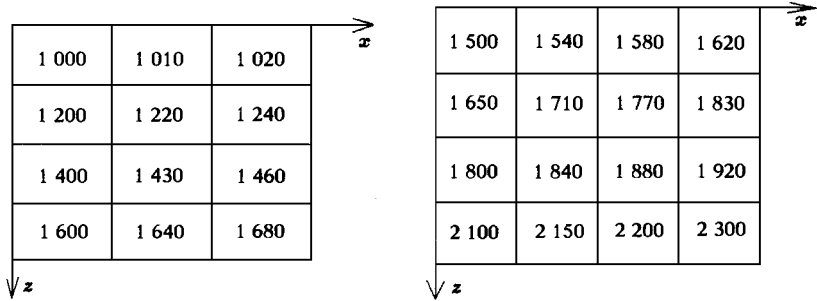


图 1 密度分布模型
Fig.1 Density model

图 2 波速分布模型
Fig.2 Velocity model

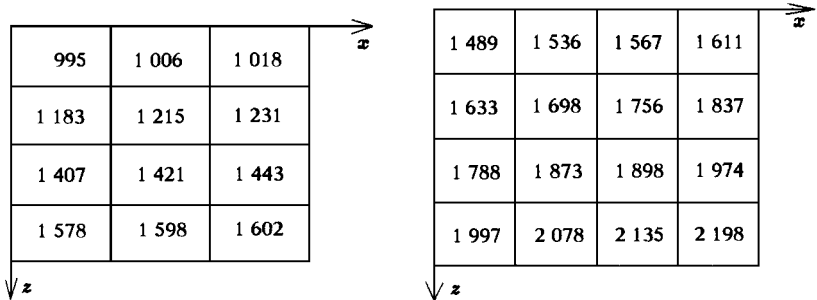


图 3 密度分布的重构

图 4 波速分布的重构

Fig. 3 Reconstruction of the density distribution from the inverse results

Fig. 4 Reconstruction of the velocity distribution from the inverse results

4 结论与讨论

从以上的反演结果可以看到, 当非均匀介质参数的变化较大时, 本文中给出的方法能有效反演其变化规律. 与传统的 Born 弱散射近似方法相比, 对大扰动介质参数反演问题, 此方法能给出更准确的结果.

在文献 [6] 和本文的讨论中, 提出了一种反演非均匀介质参数的有效方法. 基于非均匀介质波函数的局部理论和射线理论, 引入幅值修正和相位延迟, 设定全波场的广义射线近似形式, 使波函数更接近真实情况. 通过定义介质参数函数, 把反演目标归结为其第一类 Fredholm 积分方程, 使反演任务更明确.

参 考 文 献

- 1 Clayton RW, Scott RM. A Born - WKB inversion method for acoustic reflection data. *Geophysics*, 1981, 46 (11): 1559~1567
- 2 Schatbuch PJ, Nompon E, Rizzo FJ. Elastic scattering interaction via generalized Born series and far - field approximation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1993, 93 (1): 295~307
- 3 Cohen JK, Bleistein N. Inversion procedure for acoustic waves. *Geophysics*, 1979, 44 (6): 1077~1087
- 4 Harry Gngold, She Jianming, Iorumski WE. Local principles of wave propagation in inhomogeneous media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1993, 93 (2): 599~604
- 5 Zhu Tianfei. A ray Kirchhoff method for body - wave calculation in inhomogeneous medium. *Geophysical Journal*, 1988, 92: 181~193
- 6 Niu Yuqing, Du Desheng, Ma Xingrui, et al. Generalized ray approximate method to inverse medium parameters. *ACTA. Mechanica Solida SINICA*, 1996, 9 (1): 59~65

THE LARGE PERTURBATION INVERSION METHOD ON 2-D MEDIUM PARAMETERS

Ma Xingrui Niu Yuqing Huang Wenhui

(Dept. of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract The problem of parameter inversion in inhomogeneous medium was studied and a generalized ray approximation method to inverse 2 - D medium parameters was introduced in this paper. By use of the referential variables and perturbational variables the medium parameters of wave equation were rewritten. Using the Green function theory, the integral equation of perturbational parameters was obtained. Based on the local principles of wave function in inhomogeneous medium, a generalized ray approximation form of total wave field was introduced. By defining the medium parameters function the attention was focused on the Fredholm integral equation of the first kind. By using convolution transforms the solution of the medium parameters function in 2 - D medium was obtained. The perturbations of medium parameters are usually not beyond 20 percent in Born weak scattering method. However, in this paper numerical results show, when the perturbations of medium parameters are about 50 percent, this method can effectively inverse its variation.

Key words inversion, large perturbations, integral equation, generalized ray approximation