二类复特征值表达式的适用性研究 [1)]

侯之超　　郑兆昌
(清华大学工程力学系，北京 100084)

摘要　对于线性系统，根据其质量、刚度或阻尼等矩阵的性质了解特征值，是十分有意义的问题．对于有阻尼陀螺系统，本文首先通过模态正交性推导了有关矩阵的若干关系式．然后分析了复特征值的两类表达式的适用性，着重讨论了通过一元二次方程研究特征值性质的现行处理方法存在的困难．提出一种确定特征值的补充方法，指出可能存在虚数特征值的系统的性质．算例表明结论正确．

关键词　复特征值，线性振动，稳定性分析，模态理论

引　言

对于线性系统，特征值无论是在系统响应分析还是在稳定性判断上均占有重要的地位．系统的质量、刚度、阻尼等矩阵的性质与其特征值的联系，是十分有意义的问题．国内外学者从不同角度建立了一些关系式，主要有二类：Rayleigh 商或广义 Rayleigh 商；特定一元二次方程的根．本文对有关线性系统的分析表明，第一类表达式可用于实际振动系统，而通过一元二次方程研究特征值适用于某些线性系统，用于其他系统则面临困难．因为对于一些系统，一元二次方程的根并不都是系统的特征值．为此本文提出一种确定特征值的方法．

外激励通常可以分解为若干正弦或余弦成分，即其随时间的变化具有形式 $f_0 e^{iwt}$ ($i = \sqrt{-1}$)．换言之，外激励不带有衰减因子．根据本文下面的假设，系统不存在正实部特征根；理论上，与负实部特征值对应的主振动不会持久．因此外力引起的共振现象，主要指扰频等于或接近系统的某些零实部特征值的情况．众所周知，无阻尼系统，无论是否存在陀螺效应，其特征值均为纯虚数．对于有阻尼系统，这种零实部特征值是否存在及存在的条件还有待进一步研究．本文另外一方面的工作，就是根据对特征值表达式的讨论，探讨系统存在零实部特征值的可能条件．

1　基本理论

1.1　状态方程与系统特征对

一般振动系统离散运动方程可以表示为

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = f(t) \tag{1}$$

式中，M，K 对称，分别为系统的质量、刚度矩阵；$D = C + G$ 包括对称的阻尼矩阵 C 与反对称的陀螺矩阵 G．在结构振动问题中，通常认为矩阵 M，C，K 正定或半正定的．本文再

[1)]国家自然科学基金资助项目．
1996-01-26 收到第一稿，1996-08-05 收到修改稿．

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

假定 M 正定. 对式 (1) 可以运用复模态理论在状态空间求解, 与其等价的状态方程可表示为

$$A\dot{y} - By = F(t) \tag{2}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -D & -M \\ M & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad y = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}, \quad F(t) = \begin{Bmatrix} -f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

A 是非自伴算子. 显然, 如果 M, K 正定, 那么 B 对称正定. 对非亏损系统, 齐次方程

$$A\dot{y} - By = 0 \tag{4}$$

的特征值对角阵和左、右模态矩阵可写成共轭形式 (上部带“ - ”的变量表示复共轭量)

$$\Lambda = \begin{Bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{Bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} L \\ L\Lambda \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} R \\ R\Lambda \end{bmatrix} \tag{5}$$

式中 $L = [v \quad \bar{v}]$, $R = [u \quad \bar{u}]$. λ, u, v 及其共轭量为系统位形空间的模态参数矩阵. 对第 k ($k = 1, 2, \cdots, 2n$) 阶特征值和左、右特征矢量有

$$\begin{cases} (\lambda_k A - B) U_k = 0 \\ V_k^T (\lambda_k A - B) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

如果 D 只包含陀螺矩阵 G, 那么 A 反对称, 可证 λ_k 为纯虚数, 且其左特征矢量即 $-\lambda_k$ 的右特征矢量. A, B 可有其它形式. 例如, 当 $D = C$ 时为了利用对称性, 需要另外构造 A 与 B. 针对不同的系统构造不同形式的状态方程, 将为分析带来方便.

1.2 模态矩阵的正交性

左、右模态矩阵将 A, B 对角化, 即

$$\widetilde{M} = V^T A U = \begin{bmatrix} a & \\ & \bar{a} \end{bmatrix}, \quad \overline{K} = V^T B U = \begin{bmatrix} b & \\ & \bar{b} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{M}^{-1}\overline{K} = \Lambda \tag{8}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式中，a，b 均为对角阵．将式（3），（5）代入（8）式，整理后得到

$$\left.\begin{aligned} v^T Du + \lambda v^T Mu + v^T Mu\lambda &= a \\ v^T D\bar{u} + \lambda v^T M\bar{u} + v^T M\bar{u}\bar{\lambda} &= 0 \\ -v^T Ku + \lambda v^T Mu\lambda &= b \\ \text{果}\quad -v^T K\bar{u} + \lambda v^T M\bar{u}\bar{\lambda} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

2　广义 Rayleigh 商及其适用性

2.1　Rayleigh 商

对于实对称矩阵 A 及非零实矢量 x，称实数

$$R(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}, \qquad x \neq 0 \tag{11}$$

为矩阵 A 的 Rayleigh 商．

在振动理论中，对无阻尼无陀螺系统，即式（1）中 $D = 0$，通过能量原理建立了如下形式的 Rayleigh 商

$$R(x) = \frac{x^T Kx}{x^T Mx}, \qquad x \neq 0 \tag{12}$$

从线性代数理论看，该商实际上应称为对称矩阵 K 相对于对称正定矩阵 M 的广义 Rayleigh 商．Rayleigh 商有这样的性质：对式（11），x 是 $R(x)$ 的驻值点等价于 x 是 $Ax = \lambda x$ 的属于特征值 λ 的特征矢量；对式（12），x 是 $R(x)$ 的驻值点等价于 x 是 $Kx = \lambda Mx$ 的属于特征值 $\lambda = \omega_2$ 的特征矢量．

2.2　非自伴系统的广义 Rayleigh 商

对非自伴线性系统（4），其广义 Rayleigh 商定义为

$$R = \frac{X^T B Y}{X^T A Y}$$

其中，X，Y 为非零矢量且 $X^T A Y \neq 0$．该商在 $X = V_r$，$Y = U_r$ 时取驻值，并等于系统的第 r 阶特征值[8]．这样就得到复特征值的第一类表达式

$$\lambda_r = \frac{V_r^T B U_r}{V_r^T A U_r} \tag{13}$$

2.3　适用性与应用

式（11），（12）所表示自伴系统的 Rayleigh 商，其与系统特征值的对应关系为人们广泛接

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

受，并可运用变分原理予以证明．式（13）则是较新的结果，文［8］对其从数学上进行了论证，但是没有明确讨论其适用性．本文从力学的角度作初步分析．

式（13）是一个一次方程，由左右特征矢量 V_r，U_r 结合系统矩阵确定对应的一个特征值，系统的 $2n$ 个特征值由 $2n$ 个方程决定．这与常识相符．在振动理论中，自伴系统 Rayleigh 商的提出是基于这样的事实：不同振型关于质量矩阵、刚度矩阵正交，即不同主振动之间没有能量交换，从而主振动能量守恒．复模态及其所对应的主振动具有同样的性质．由式（3），（6）不难推知式（13）反映了系统主振动中各部分能量的守恒关系．对无阻尼无陀螺系统（$V_r = U_r$，且 $v_r = u_r$ 为实向量），易证式（13）与式（12）的 Rayleigh 商等价，且式（13）中 $\lambda_r = \mathrm{i}\omega$．结合式（12）可知其适用于 M，K 均正定的线性系统．

然而该式由状态空间矩阵表达，不能直观反映系统特征值与质量、刚度、阻尼及陀螺等矩阵性质之间的联系，因此通常并不用于分析特征值．事实上，Rayleigh 商或广义 Rayleigh 商的价值在于，作为与能量有关的泛函，建立求解多自由度系统或连续系统频率等问题的近似方法，比如 Rayleigh 法，Rayleigh - Litz 法，Galerkin 方法等．

3　一元二次方程根作为特征值的适用性

3.1　第二类表达式

以特别选取的某一复矢量 ω 的转置前乘式（7）第二组方程各项，可得一元二次方程

$$m_k\lambda_k^2 + d_k\lambda_k + k_k = 0 \tag{14}$$

式中 $m_k = w^T M u_k$，$d_k = w^T D u_k = c_k + g_k^*$，$k_k = w^T K u_k$，$c_k = w^T G u_k$．$g_k^* = w^T G u_k$．由此求出 λ_k 的显式表达式

$$\lambda_k = -\frac{d_k}{2m_k} \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{k_k}{m_k} - \left(\frac{d_k}{2m_k}\right)^2} \tag{15}$$

称之为复特征值的第二类表达式．迄今文献对 w 有两种选择：$w = v_k$[7]，$w = \bar{u}_k$[9,10]，并默认二根为系统特征值，甚至是彼此共轭的特征值．

3.2　关于适用性的基本结论

为了保证式（15）给出原系统的特征值，即保证式（7）成立，式（14）必须对任何非零矢量 w 均成立．这一点，式（10）是通过使 $(\lambda^2 M + \lambda D + K)\ u_k$ 分别与 v_r，$\bar{v}_r$（$r = 1, 2, \cdots, n$）正交，即通过与模态空间的一组基矢量正交化而实现的．

取 $w = v_k$ 构造式（14）实际上是式（10）所示众多关系式之一，不能保证式（15）求出原系统的特征值．事实上，式（14）成立有三种可能：第一，$v_k^T\ (\mu^2 M + \mu D + K) = 0$；第二，$(\mu^2 M + \mu D + K)\ u_k = 0$；第三，$v_k^T$，$u_k$ 关于非奇异矩阵 $(\mu^2 M + \mu D + K)$ 正交．前二者均给出系统特征值 $\mu = \lambda_k$，第三者求出 $\mu \neq \lambda_k$．另一方面，如所周知，一般情况下，与 v_k，u_k 对应的特征值只有一个，式（15）只可能给出 λ_k 而不是 λ_k，$\bar{\lambda}_k$．此外，式（14）实际上是复系数一元二次方程，不具有复根成对出现的性质．

取 $w = \bar{u}_k$ 可能基于三种考虑：无阻尼无陀螺系统或无阻尼陀螺系统，$\bar{u}_k = v_k$；$\bar{u}_k$，u_k 分别对应彼此共轭的特征值；能够保证 m_k，k_k，c_k 为实数，而 g_k^* 为虚数．

然而，$w = \bar{u}_k$ 同样不能保证式（14）给出原系统的特征值．首先，式（14）成立也有三

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

种可能：第一，$\bar{u}_k^T$ $(\mu^2 M+\mu D+K)=0$；第二，$(\mu^2 M+\mu D+K)$ $u_k=0$；第三，$\bar{u}_k^T$，u_k 关于非奇异矩阵 $(\mu^2 M+\mu D+K)$ 正交．前二者给出彼此共轭的两个特征值；第三者求出 $\mu\neq\lambda_k$．其次，模态 $\bar{u}_k$，u_k 只可能与复频率 $\bar{\lambda}_k$，λ_k 对应．因此若式（15）所示二根彼此不共轭，那么至少其中之一不是特征值．二根为相同的实数可视为共轭的特例．最后，式（14）仍然是复系数一元二次方程．

总之，分别由两种方案确定的式（15）所示的二根可能不都是系统的特征值．换言之，以特定一元二次方程的根来判断系统特征值性质的常规方法，即使 M，K 均正定，在理论上也存在疑问．

从动力学的角度看，V_r，U_r $(r=1, 2, \cdots, 2n)$ 可将矩阵 A，B 完全解耦，主振动之间没有能量交换；而 v_k，u_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 却不能使 M，D，K 对角化，一般情况下所代表的运动与其他阶模态运动可能存在能量交换．正是这种差别导致了两类表达式的不同适用范围．

基于上面分析，本文建议，在一般情况下依次取 w 为 $\bar{u}_k$ 与 v_k 建立式（14），（15），四根中相同的二者为系统的一个特征值．不过，对于无阻尼陀螺系统，这样建立的两个方程完全相同，因此仍然不能确定哪一个根是特征值．

3.3 $w=\bar{u}_k$，对式（14），（15）的详细分析

如 3.2 节所述，此时 m_k，k_k，c_k，g_k $(g_k^*=\mathrm{i}gk)$ 为实数．考虑到 u_k，$\bar{u}_k$ 不应该确定其它阶特征值，我们认为，式（14）二根均为原系统特征值的充分必要条件为二者彼此共轭．该命题的条件十分苛刻，通常难以满足．因此对许多实际系统而言，式（14）的二根不都是特征值．后面的算例将证实这一结论．研究四类系统．

1）无阻尼无陀螺，$C=G=0$，因此 $c_k\equiv 0$，$g_k\equiv 0$．由式（15）可知二根为

$$\lambda_k=\pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{k_k}{m_k}} \tag{16}$$

二者彼此共轭，均为原系统的特征值．这与实模态理论相符．注意此类系统 $\bar{u}_k=v_k=u_k$．

2）无阻尼有陀螺，$C=0$，$G\neq 0$．$c_k\equiv 0$，$d_k=\mathrm{i}g_k$．二根为

$$\lambda_k=-\frac{\mathrm{i}g_k}{2m_k}\pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{k_k}{m_k}+\frac{g_k^2}{4m_k^2}} \tag{17a}$$

都是虚根．但是如果 $g_k\neq 0$，则二者并不共轭，因此不都是特征值．事实上，式（14）共轭方程的根为

$$\lambda_k=-\frac{\mathrm{i}g_k}{2m_k}\pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{k_k}{m_k}+\frac{g_k^2}{4m_k^2}} \tag{17b}$$

两组方程有四根——两两共轭，式（17a），（17b）都至少有一根并非特征值．

3）有阻尼无陀螺，$C\neq 0$，$G=0$；$g_k\equiv 0$，$d_k=c_k$．二根为

$$\lambda_k=-\frac{c_k}{2m_k}\pm(b-\mathrm{i}a),\ a+\mathrm{i}b=\pm\sqrt{\Delta_k},\ \Delta_k=\frac{k_k}{m_k}-\frac{c_k^2}{4m_k^2} \tag{18}$$

当 $\Delta_k>0$，$b=0$，两根彼此共轭，也是式（14）的共轭方程的根，因此均为原系统的特征值．若 $c_k=0$，二根均为虚数．当 $\Delta_k<0$，$a=0$，$b\neq 0$，二根均为实数，同样分析可知其中之一并

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

非特征值. 当 $\Delta_k = 0$， $a = b = 0$，二根合而为一且为实根，是原系统的特征值. 此时若 $\frac{c_k}{m_k} < 0$，则原系统具有正实根而不稳定.

4) 有阻尼有陀螺，$C \neq 0$， $G \neq 0$. 展开式 (15) 有

$$\lambda_k = -\frac{c_k + ig_k}{2m_k} \pm (b - ia),\ a + \mathrm{i}b = \pm\sqrt{\Delta'_k},\ \Delta'_k = \frac{k_k}{m_k} - \frac{d_k^2}{4m_k^2} \tag{19}$$

二根共轭的充要条件为 $b = 0$， $g_k = 0$，即 (Δ_k 同前)

$$g_k = 0, \qquad \Delta'_k = \Delta_k > 0 \tag{20}$$

3.4 $w = v_k$，再看式 (14)，(15)

如前所述，系数 m_k， d_k， k_k 均为复数. 同理可证方程 (14) 的二根彼此共轭的充分条件是

同，　　不能

$$\left.\begin{aligned} & m_k = r_1 e^{ir},\ d_k = r_2 e^{ir},\ k_k = r_3 e^{ir} \\ & \frac{r_3}{r_1} \geq \left(\frac{r_2}{2r_1}\right)^2, \quad r_s (s = 1, 2, 3)\ \text{均为实数} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

- c)

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

而

则　　矩阵正　$\widetilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，　G 为一 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i_p\Omega' \end{bmatrix}$ 有，　$\overline{K} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

i_p 为直径转动惯量的相对不平衡量，Ω 为无量纲转速，C 为无量纲阻尼矩阵.

4.2　计算结果与讨论

取 $i_p = 1$，$\delta = 1.06$，$\gamma = 0.855$. 对式（22）的齐次方程，下面就三种不同阻尼分析式（15）的适用性，并验证新提方案的有效性. 对任一算例，首先按照式（2），（3）构造状态方程，运用 QR 法求出所有特征对（左、右模态与特征值），然后任选一阶模态，分别取 $w = \overline{u}_k$，$w = v_k$ 建立一元二次方程（14），最后比较有关结果. 这里列出部分算例.

例 1　无阻尼陀螺系统，$C = 0$，系统临界转速 $\Omega' = 0.557\,1$，而各阶特征值为

$$\pm 0.299\,7\,i,\qquad \pm 0.557\,1\,i,\qquad \pm 1.262\,i,\qquad \pm 1.561\,i$$

考虑第一阶模态，$\lambda_1 = -0.299\,7\,i$. 取 $w = \overline{u}_1$，v_1 均得到方程

$$\mu^2 - 0.306\,6\,i\mu + 0.178\,5 = 0$$

其根为 $\mu_1 = -0.296\,i$，$\mu_2 = 0.603\,i$. 显然只有 μ_1 为近似特征值. 共轭方程二根为 $\overline{u}_1 = 0.296\,i$，$\overline{\mu}_2 = -0.603\,i$，也只有一根为近似特征值（第 2 阶）.

例 2　$C = \begin{bmatrix} 1 & 1.239\,8 \\ 1.239\,8 & 1.537\,1 \end{bmatrix}$ 奇异，临界转速仍为 $\Omega' = 0.557\,1$，各阶特征值为

$$-0.014\,35 \pm 0.305\,2i,\qquad -0.918\,3 \pm 0.540\,7i,\qquad \pm 0.557\,1i,\qquad -1.604 \pm 0.845\,9i$$

比较第一阶 $\lambda_1 = -0.014\,35 - 0.305\,2\,i$. $w = \overline{u}_1$ 给出二根：$-0.02 - 0.302\,5\,i$，$-0.04 - 0.592\,5\,i$；由 $w = v_1$ 则得到 $-0.021 - 0.302\,0\,i$，$-0.054 - 0.566\,1\,i$. 可知二种方案均只给出第一阶特征值（实部有较大误差）.

例 3　$C = \begin{bmatrix} 1 & 3.933 \\ 3.933 & 14.938\,5 \end{bmatrix}$，行列式小于零. 临界转速 $\Omega' = 0.7879$，各阶特征值为

$$-0.035\,38 \pm 0.002\,92i,\qquad -0.02634 \pm 0.739\,6i,\qquad -15.88 \pm 0.745\,2i,\qquad \pm 0.787\,9i$$

比较第三阶 $\lambda_3 = -0.026\,34 - 0.739\,6\,i$. $w = \overline{u}_3$ 给出二根：$-0.017\,58 - 0.739\,8\,i$，$-0.036\,86 - 0.794\,5\,i$；由 $w = v_3$ 则得到 $-0.026\,4 - 0.739\,6\,i$，$0.1194 + 0.781\,1\,i$. 可知二种方案也只给出第一阶特征值，而且第二种方案结果更为准确. 这里选第三阶模态是因为前二阶特征值虚部太小. 设计非半正定的阻尼矩阵是为了进一步验证前面结论.

算例表明，对于有陀螺系统，一元二次方程的二根往往并不共轭，且只有一根为系统的特征值. 为了确定此特征值，一个方程是不够的. 对有阻尼陀螺系统可将前述对 w 的两种选择所建方程联立求解；对无阻尼陀螺系统，联立求解无效，需要补充适当的方程.

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

5 结 论

本文理论分析与算例表明，Rayleigh 商或广义 Rayleigh 商可用于 M， K 均正定的线性系统．而通过一元二次方程研究特征值对于无阻尼无陀螺系统与部分有阻尼系统是合适的 ——二根彼此共轭而且确为系统特征值；但是对于无阻尼陀螺系统及大多数有阻尼（有或无陀螺）系统就面临困难：一元二次方程的二根一般不共轭，不都是系统的特征值．因此通过有关的一元二次方程的根，直接依据系统质量、刚度、阻尼等矩阵判断特征值的性质，对有陀螺系统及部分有阻尼无陀螺系统在理论上存在疑问，使用时应该慎重．

致谢 本文完稿之后曾向清华大学数学系李斌、彭南友二同志请教．

参 考 文 献

1 Foss KA. Coordinates which uncouple the equations of dampedlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 1958, 25 (2)
2 Merovitch. Analytical methods in vibration. 1967
3 Fawzy, Bishop RED. On the dynamics of linear nonconservative systems. 1976 Proceedings of Royal Society, London A 352
4 胡海昌．多自由度线性阻尼系统的振动问题．固体力学学报，1980 (1)
5 倪金福，张阿舟．关于复模态理论的几个问题．南京航空学院学报，1982 (3)
6 张阿舟，朱德懋．阻尼系统的振动分析．南京航空学院学报，1982 (3)
7 郑兆昌．线性非保守非对称系统的复模态理论（固体力学现代问题讲习班讲义）．清华大学，1992
8 李家春．广义 Rayleigh 原理及其应用．中国科学，A 辑，1983 (8)
9 侯赛因著，张文译，赵令诚校．多参数系统的振动和稳定性．上海科学技术文献出版社，1985
10 张文．转子动力学基础．科学出版社，1990
11 侯之超．大型结构动力分析中的数值方法研究．清华大学博士学位论文，1995

RESEARCHES ON TWO EXPRESSIONS ABOUT COMPLEX EIGENVALUE

Hou Zhichao Zheng Zhaochang
(*Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beiying* 100084, *China*)

Abstract It is very interesting to study eigenvalues of a linear system by analyzing the properties of its mass matrix, stiffness matrix, damping matrix and so on. After a brief review on the complex mode theory, this paper developed a new set equations about corresponding matrices by recalling the orthogonality between the complex modes of a damped gyroscopic linear system. Based upon this, the applicability of two popular expressions about complex eigenvalues was investigated. The emphasis was given to the questionable aspects of one expression. The expression is a one-variable two-order algebraic equation and had been used to reflect the complex eigenvalues of a linear system qualitatively. A complementary approach to determine the realistic eigenvalues was then put forward. The systems were pointed out, which possibly possess imaginary eigenvalues. Examples show that the conclusions of present paper are all right.

Key words complex eigenvalue, linear vibration, stability analysis, mode theory

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net