

# 一类轴对称充液陀螺系统自旋运动稳定性研究

匡金炉 黄克累 陆启韶 肖业伦  
(北京航空航天大学, 北京 100083)

**摘要** 研究了一类复杂充液旋转对称陀螺(其圆柱形容腔充有互不相溶的双元液体,且带充液圆柱中心杆)的章动振荡与其所充双元液体自由振荡之耦合问题.利用留数方法研究了系统的自旋稳态运动的稳定性条件.

**关键词** 充液陀螺, 留数, 章动时间常数

## 1 陀螺系统动力学方程研究

腔体充液混合系统的动力学与控制是应用数学与力学研究人员都很重视的研究课题, 主要涉及到充液弹丸(有时充多元液体)与充液卫星的动力学研究等<sup>[1-4]</sup>.

假设充液陀螺系统关于点  $O$  作定点运动, 所充液体为理想流体, 定点  $O$  位于系统的对称轴上, 陀螺系统的定常运动为其凝固液体随主刚体绕对称轴的稳态转动, 稳态转动的角速度为  $\omega$ . 圆柱形容腔内充有: 液体-1, 其密度为  $\rho_1$ , 体积为  $2\pi c(a^2 - b^2)$ ; 液体-2, 其密度为  $\rho_2$ , 体积为  $2\pi c(b^2 - d^2)$ , 这里已假设稳态自由液面均为圆柱面. 引入随体坐标系  $Oxyz$ , 其中  $Oz$  沿系统对称轴, 此外, 再引入坐标系  $Ox_1y_1z_1$ , 其中  $Oz_1$  轴沿铅垂线指向上, 而  $Ox_1, Oy_1$  轴绕  $Oz_1$  轴的角速度为  $\omega$ . 中心刚性柱内的椭球形容器内充有理想液体-3, 密度为  $\rho_f$ , 椭球腔的三个半轴长分别为  $a_f, b_f, c_f$ , 圆柱形容器的几何中心距定点  $O$  的距离为  $h$ . (微)重力加速度为  $g$ , 理想流体动力学由旋转坐标系下的 Euler 方程描述. 假设陀螺系统作微幅章动, 扰动角速度  $\omega$  关于坐标系  $Oxyz$  的坐标形式为  $(\omega_s \exp(st), \omega_y \exp(st), \omega_z + \omega_s \exp(st))$ , 其中  $s$  为复数. 设所充液体-3为理想流体, 将刚性主体与所充液体-3组成的子系统称为“充液陀螺子系统”, 液体在椭球腔内作均匀涡旋运动, 又设陀螺主刚体与液体-3的茹可夫斯基等效刚体的惯性张量之和的坐标阵为  $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ , 而固化液体-3与其茹可夫斯基等效刚体的惯性张量之差的坐标阵为  $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ . 系统的动力学方程由动量矩定理与 Poisson 方程描述.

研究稳态运动附近的微小扰动运动, 考虑到陀螺系统的旋转轴对称特性, 且引入复变量  $s = i\omega(\mathcal{Y}-1)$ , 经过复杂的公式推导(包括线性化处理), 则充液陀螺系统的动力学方程可化为

$$(G_3 \mathcal{Y}^3 + G_2 \mathcal{Y}^2 + G_1 \mathcal{Y} + G_0) / (\mathcal{Y} - \Lambda) = G(\mathcal{Y}) / \omega \quad (1)$$

式中

$$G_2 = - [I_3 + I'_3 + 2(I_{zz1} - I_{xx1}) + \Lambda(I_1 + I_{zz1} - I_{xx1}) - M'_1]$$

$$\begin{aligned}
 G(Y) = & T\pi \left[ 2h^2 ca \rho_1 \xi_{01}(a) + c \int_0^a C_k^2 a \rho_1 \xi_{k1}(a) + \right. \\
 & \left. 2\rho_1 \int_0^a C_k \int_0^a r^2 \xi_{k1}(r) dr + 2\rho_2 \int_0^a C_k \int_0^a r^2 \xi_{k2}(r) dr \right] \\
 G_1 = & u + \Lambda [I_{33} + I'_{33} + 2(I_{zz1} - I_{xx1})], G_0 = -u\Lambda, \lambda = 2a_f^2 / (c_f^2 + a_f^2) \\
 \Lambda = & (c_f^2 - a_f^2) / (c_f^2 + a_f^2), \quad u = [(M_1 + M_2)h + M h_f] g / \omega^2 \\
 G_3 = & I_1 + I_{zz1} - I_{xx1}, \quad \xi_{0m}(r) = X_{0m} r + Z_{0m} / r \\
 a^2 = & (3 - T)(1 + T) / (1 - T)^2, \quad \xi_{km}(r) = X_{km} J_1(akr) + Z_{km} Y_1(akr) \\
 C_k = & -2 / (ck^2), \quad k = (2f + 1)\pi / (2c)
 \end{aligned}$$

这里 ( $m = 1, 2$ ),  $M_m$  为液体  $m$  的质量,  $I_{zz1}, I_{xx1}$  分别为圆柱形腔内所充液体(固化)对陀螺纵轴与横轴的惯量矩; 式中  $M$  为“充液陀螺子系统”的质量,  $h_f$  为“充液陀螺子系统”的质心距定点  $O$  的距离,  $S_m$  ( $m = 1, 2$ ) 为液体  $m$  所占有的湿润固壁面. 经过冗长的公式推导得知:  $X_{km}, Z_{km}, X_{k0}, Z_{k0}$  满足一极其复杂的线性代数方程组<sup>[5]</sup>. 其中  $f$  为包括 0 在内的正整数, 即  $f = 0, 1, 2, \dots$ ; 此外, 本项研究考虑了液体 1-2 之间的表面张力  $\sigma_{12}$ , 液体-2 自由液面的表面张力  $\sigma_{20}$ .

## 2 陀螺系统动力学行为研究

考虑到实际参数的个数, 要想彻底地讨论特征值方程 (1) 的根的性态是非常困难的, 本文仅考虑了特征方程的右端项  $G(T)\omega$  比较小的情形. 根据斯提瓦尔森理论研究得知: 从理论上说, 即使“充液陀螺子系统”关于稳态自旋运动是稳定的, 若在其圆柱形容器中引入少量的液体也会使陀螺系统变得不稳定. 即当双元液体的双向无数个自由振荡周期之一充分接近带充液中心柱的陀螺之章动周期时系统会出现不稳定. 根据大量的数值结果分析(主要是计算特征方程 (1) 右端函数在其极点处的留数) 得知: 表面张力对系统的运动稳定性条件影响不明显; 根据图 1 分析可知, 在系统的“自旋周期与章动时间常数的比值”随其主刚体的“纵横惯量之比值”的变化曲线上, 斯提瓦尔森陀螺存在两个不稳定性区域, 而带中心充液柱的 Scott 陀螺则存在三个不稳定性区域, 不稳定性区域随着陀螺稳定因子  $u$  变化而漂移. 本文的理论结果与参考文献 [1] 的数值结果取得了良好的一致, 并推广了留数理论对已有的部分模型的适用范围. 计算过程中涉及到的参数:  $I_1 = 5000.00 (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$

$$\begin{aligned}
 \rho_f = & 1000.00, (kg/m^3), \quad a_f = 0.38 (m), \quad c_f = 0.35 (m) \\
 c/a = & 0.6, \quad b^2/a^2 = 0.25, \quad d^2/a^2 = 0.15, \quad \rho_1 a^5 / I_1 = 0.03 \\
 \rho_2 \rho_1 = & 0.5, \quad \sigma_{12} / (\rho_1 b \omega^2 a^2) = 0.05, \quad \sigma_{20} / (\rho_1 d \omega^2 a^2) = 0.02
 \end{aligned}$$

研究表明: 当双元液体的双向无数个自由振荡周期之一充分接近“充液陀螺子系统”的章动周期时系统会出现不稳定. 充液陀螺系统的动力学在本文所研究的参数范围之内表明: 稳态自由液面上的表面张力对系统的运动稳定性影响不明显.

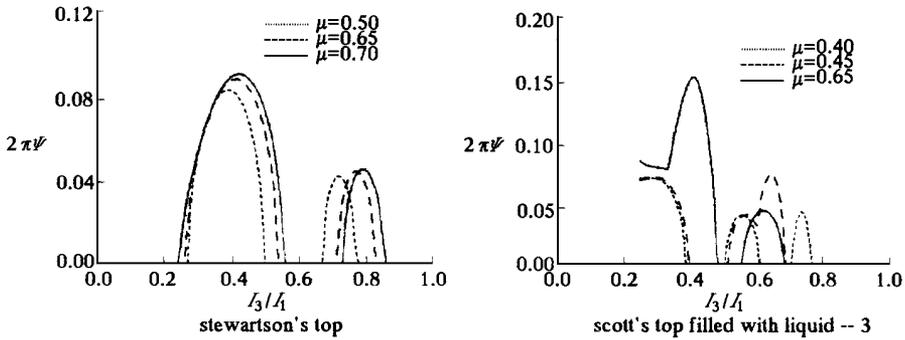


图1 陀螺系统的“自旋周期与章动时间常数的比值” $2\pi\Psi$  随其名义“纵横惯量之比值” $I_3/I_1$ 的变化曲线

Fig. 1 The liquid-filled top nutation growth rate vs the inertia ratio

致谢 本文作者在研究过程中曾得到清华大学王照林教授的指教,在此表示衷心感谢

### 参 考 文 献

- 1 Or AC, Challoner AD, Yip PP. Stability of a liquid-filled spinning top: A numerical approach, *J. Sound & Vibration*, 1994, 175(1): 17~ 37
- 2 Pfeiffer F. Problems of contained rotating fluids with respect to aerospace applications, ESA, 1977, sp-129: 51~ 62
- 3 王照林, 匡金炉. 全充粘性液体偏置多腔卫星系统自旋稳定性问题研究. *宇航学报*, 1992(2): 49~ 55
- 4 刘延柱. 轴对称充液刚体的自旋稳定性. *上海交通大学学报*, 1984, 18(5): 1~ 8
- 5 匡金炉. 充液航天器系统动力学与非线性振动系统分叉研究. 北京航空航天大学博士后研究报告, 1994

## ON THE STABILITY OF A SPINNING, ROTATIONALLY SYMMETRIC TOP CONTAINING LIQUIDS

Kuang Jinlu Huang Kelei Lu Qishao Xiao Yelun

(School of Space Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract** The problem of coupling between the nutational oscillation of a gyro containing three-component liquids and the natural oscillation of the rotating liquids themselves is investigated. The interfacial tension is considered in the free surface bounding the liquids. The linearized equations are treated analytically using the Stewartson's and Zhukovsky's theory. The stability of motion is investigated using the method of residues. It is shown theoretically that instability can occur when any of the periods of free oscillation of two-immiscible liquids, which are double infinite in number, is sufficiently near to the period of nutation of the gyro with a third-liquid-filled column. The liquid-filled gyro nutation growth rate vs the inertia ratio is also studied in detail. The criterion has practical significance for the design of liquid-filled, spinning satellite and projectiles.

**Key words** top containing liquids, residues, the nutation time constant