

完全笛卡尔坐标描述的多体系统动力学¹⁾

刘延柱

(上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

摘要 用完全笛卡尔坐标描述多体系统的运动学和动力学在提高计算效率方面有突出优点. 导出用完全笛卡尔坐标表示的刚体及多体系统的动量和动量矩的解析式, 给出与之对应的广义惯量矩阵概念, 建立无力矩状态下用完全笛卡尔坐标描述的多体系统动力学的一阶微分方程组, 用于多体航天器的姿态运动分析.

关键词 刚体动力学, 多体动力学, 航天器姿态动力学

引 言

在工程技术的有力推动下, 多体动力学在近20年内取得巨大进展. 初期的理论研究成果已经发展为各种类型的计算软件. 当前的研究重点在于如何提高计算效率, 缩短计算时间, 在此基础上寻求多柔体系统的建模和算法. 根据所采用坐标的不同性质, 多体系统的建模方法区分为最小数目坐标和最大数目坐标两种类型. 以 Roberson-Wittenburg 方法为代表的数目坐标方法以铰坐标, 即邻接刚体之间的相对转角或位移作为广义坐标. 其主要优点为变量数少, 树系统的坐标数即等于自由度数. 但动力学微分方程的系数矩阵的构造过程十分复杂, 包含大量的非线性运算. 以 Chace 和 Haug 的工作为代表的最大数目坐标方法以各分体质心的笛卡尔坐标和描述姿态的欧拉角或欧拉参数作为非独立的广义坐标, 利用拉氏乘子与铰约束方程联立建立方程. 这种方法虽然变量增多, 但计算程式化易于编制通用程序.

近年来, Garc í de Jal ó n 和 Bayo 等提出完全笛卡尔坐标方法, 是另一种形式的最大数目坐标方法. 由于在提高计算效率方面的突出优点而受到注意. 这种方法的特点是利用与刚体固结的若干参考点和参考矢量的笛卡尔坐标描述刚体的空间位置和姿态, 而无须使用欧拉角或欧拉参数. 参考点通常选在铰的中心, 参考矢量沿铰的转轴或滑移轴, 通常可由多个刚体共享, 使未知变量数减少. 所有约束方程均为坐标的二次代数方程, 其 Jacobi 矩阵为坐标的线性函数, 从而使计算时间显著减少. 由于动力学方程完全独立于约束条件, 当系统增加或减少约束时只需相应地改动约束方程, 因此特别有利于闭环系统和变结构系统的建模. 此方法的另一优点是在约束方程中出现的参考点距离或参考矢量夹角均为直接与机械设计有关的参数, 有利于优化分析. 以图1所示空间四连杆为例, 其中 A, B 为转动铰, C 为球铰, D, E 为以 U 为轴的圆柱铰. 用铰坐标表示的变量数为7, 用各杆件的质心坐标和欧拉参数表示的变量数为21. 用完全笛卡尔坐标方法只需选择 C, D, E 为参考点, 变量数为9, 同时附加8个二次多项式约束方程. 采用完全笛卡尔坐标的多体动力学方程可利用拉氏第二类方程或虚功率原理导出. 这种建模方法已成功地应用于空间机

¹⁾ 国家自然科学基金及博士点专项科研基金资助项目.

1995-10-30收到第一稿, 1996-07-03收到修改稿

构的动力学分析^[1~5]。在讨论载体自由漂浮的多体航天器的姿态运动时,若万有引力梯度允许忽略且无控制力矩作用,可直接利用动量矩守恒原理使动力学方程降阶。为使完全笛卡尔坐标方法能用于分析自由空间多体系统,本文导出用完全笛卡尔坐标描述的刚体和多刚体系统的动量和动量矩的解析表达式,给出与之对应的广义惯量矩阵概念,建立用完全笛卡尔坐标描述多体系统动力学的一阶微分方程组,用于多体航天器的动力学分析

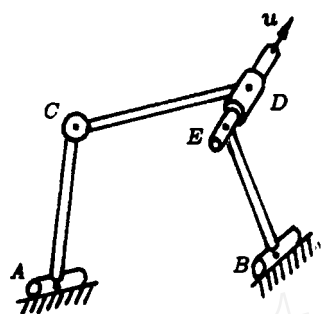


图 1 空间四连杆
Fig.1 Spatial mechanism

1 刚体的平面运动

先讨论作平面运动的刚体(图2)。设 i, j 为刚体中任选的距离为 l 的二参考点, O 为刚

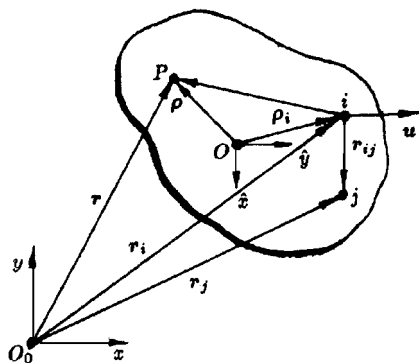


图2 刚体的平面运动

Fig 2 Planar motion of a rigid body

体的质心, P 为刚体上任意点, O_0 为惯性空间中的固定点, 定义以下矢量

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{O_0 i}, \quad \vec{r}_j = \vec{O_0 j}, \quad \vec{r}_0 = \vec{O_0 O} \\ \vec{r} &= \vec{O_0 P}, \quad \vec{\rho}_i = \vec{O i}, \quad \vec{\rho} = \vec{O P} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

将矢量 $\vec{r}_j = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ 作为参考矢量, 设 $\vec{n}$ 为运动平面的法线基矢量, 令 $\vec{u} = \vec{n} \times \vec{r}_{ij}$ 为另一参考矢量, 与 $\vec{r}_{ij}$ 在运动平面内相互正交。将矢量 $\vec{r}_P$ 沿 $\vec{r}_{ij}$ 和 $\vec{u}$ 分解为

$$\vec{r}_P = \vec{r} - \vec{r}_i = \vec{\rho} - \vec{\rho}_i = C_1 \vec{r}_{ij} + C_2 \vec{u} \quad (2)$$

建立惯性基 $(O_0 - x y)$ 和连体基 $(O - \hat{x} \hat{y})$, $\hat{x}, \hat{y}$ 轴分别与 $\vec{r}_{ij}$ 和 $\vec{u}$ 平行。约定以带 $\wedge$ 与不带 $\wedge$ 的矩阵符号分别表示矢量相对 $(O - \hat{x} \hat{y})$ 或 $(O_0 - x y)$ 的投影列阵。从式(2)相对 $(O - \hat{x} \hat{y})$ 的投影式导出

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_i + \mathbf{C} \mathbf{q} \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{C} = [C_1 \ C_2]^T = \mathbf{\Gamma}^{-1}(\hat{\rho} - \hat{\rho}_i) \quad (4)$$

从式(2)相对 $(O_0 - x y)$ 的投影式导出

$$\mathbf{r} = (1 - C_1) \mathbf{r}_i + C_1 \mathbf{r}_j + C_2 \mathbf{U} = \mathbf{C} \mathbf{q} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{q}$ 为由 $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ 相对 $(O - x y)$ 的笛卡尔坐标组成的广义坐标列阵, $\mathbf{C}$ 为 2×4 变换矩阵

$$\mathbf{q} = [x_i \ y_i \ x_j \ y_j]^T \quad (6)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 - c_1 & c_2 & c_1 & -c_2 \\ -c_2 & 1 - c_1 & c_2 & c_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

利用式(5)计算刚体质心的矢径 r_0 的投影列阵, 得到

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= m^{-1} \int r dm = D q \\ D &= \begin{bmatrix} 1 - a_1 & a_2 & a_1 & -a_2 \\ -a_2 & 1 - a_1 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中, m 为刚体质量, 参数 a_1, a_2 定义为

$$a = [a_1 \ a_2]^T = m^{-1} \int c dm = -\Gamma^{-1} \hat{\rho}_i \quad (9)$$

利用式(8)计算刚体的动量 $Q = m r_0$ 的投影列阵, 得到

$$Q = \Phi \dot{q} \quad (10)$$

其中 $\Phi = mD$.

设 ω 为刚体的角速度, 利用运动学关系式 $\dot{r}_{ij} = \omega \times r_{ij}$, 可导出用笛卡尔坐标表示的角速度法向分量 ω

$$\left. \begin{aligned} \omega &= G \dot{q} \\ G &= \Gamma^{-2} [y_j - y_i, -x_j + x_i, -y_j + y_i, x_j - x_i] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

利用刚体的中心惯量矩 $\hat{J}$ 计算刚体相对质心 O 的动量矩 $\hat{H} = \hat{J} \omega$, 得到

$$\hat{H} = \Psi \dot{q} \quad (12)$$

其中 $\hat{\Phi} = \hat{J}G$ 为刚体相对质心的广义惯量矩阵. 利用式(8), (10), (12) 还可计算刚体相对固定点 O_0 的动量矩 $H = \hat{H} + (r_0 \times Q) \cdot n$ 的投影列阵, 得到

$$H = \Psi \dot{q} \quad (13)$$

其中 Ψ 为刚体相对固定点 O_0 的广义惯量矩阵, 定义为

$$\Psi = \hat{\Psi} + \psi \quad (14)$$

$\psi = [\psi_i]$ 为由以下元素组成的4阶列阵, 其中 $a^2 = a_1^2 + a_2^2$

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= m [-(1 + a^2 - 2a_1)y_i - a_2x_j + (a^2 - a_1)y_j] \\ \psi_2 &= m [(1 + a^2 - 2a_1)x_i - (a^2 - a_1)x_j - a_2y_j] \\ \psi_3 &= m [a_2x_i + (a^2 - a_1)y_i - a^2y_j] \\ \psi_4 &= m [-(a^2 - a_1)x_i + a_2y_i + a^2x_j] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

设 F_x, F_y, M 为刚体上的作用力相对 $(O_0\text{-}xy)$ 的投影和相对 O_0 点的主矩的法向分量, 利用动量定理和动量矩定理可导出刚体的动力学普遍方程

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{q} &= B \\ A &= [\Psi^T, \Psi^T]^T, B = -\dot{A}\dot{q} + [F_x, F_y, M]^T \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

在无外力或无外力矩情况下, 可直接利用动量守恒或动量矩守恒原理, 使动力学方程降阶

2 多体系统的平面运动

讨论由自由漂浮的主刚体 B_1 , 简化为均质细杆的机械臂 B_2, B_3 以转动铰联结的开环多体系统(图3). 选择 B_1 的质心1, 铰点2, 3及抓手端点4为各分体共享的参考点, 各分体的连体基及物理参数如表1所示:

表1

Table 1

rigid body	i	j	$\hat{x}$	$\hat{y}$	l	a_1	a_2	m	$J_{\hat{x}}$
B_1	1	2	r_{12}/l_1	$(n\ r_{12})/l_1$	l_1	0	0	m_1	J_1
B_2	2	3	r_{23}/l_2	$(n\ r_{23})/l_2$	l_2	1/2	0	m_2	$m_2 l_2^2/12$
B_3	3	4	r_{34}/l_3	$(n\ r_{34})/l_3$	l_3	1/2	0	m_3	$m_3 l_3^2/12$

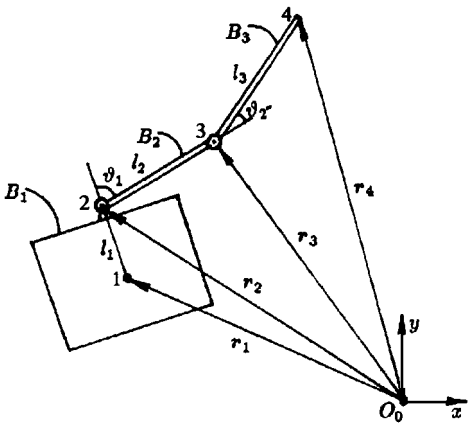


图3 多体系统的平面运动

Fig 3 Planar motion of a multibody system

以系统的总质心 O_0 为原点, 建立平动坐标系 $(O_0\text{-}xy)$, 由于 O_0 运动在坐标系内引起的惯性力与万有引力平衡, $(O_0\text{-}xy)$ 可视作惯性基 将各参考点相对 $(O_0\text{-}xy)$ 的笛卡尔坐标组成广义坐标 q

$$q = [x_1\ y_1\ x_2\ y_2\ x_3\ y_3\ x_4\ y_4]^T \quad (17)$$

有以下几何约束条件

$$(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2 - l_k^2 = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (18)$$

利用式(10), (13) 计算各刚体的动量及相对 O_0 的动量矩并求和, 导出系统的总动量 Q 和总动量

矩 H

$$Q = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_2/2 & 0 & (m_2 + m_3)/2 & 0 & m_3/2 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & m_2/2 & 0 & (m_2 + m_3)/2 & 0 & m_3/2 \end{bmatrix} \ddot{q} \quad (19)$$

$$H = [\Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 \Psi_4 \Psi_5 \Psi_6 \Psi_7 \Psi_8] \ddot{q} \quad (20)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= -[(\hat{J}_1/l_1^2) + m_1]y_1 + (\hat{J}_{11}/l_1^2)y_2 \\ \Psi_2 &= [(\hat{J}_1/l_1^2) + m_1]x_1 - (\hat{J}_1/l_1^2)x_2 \\ \Psi_3 &= (\hat{J}_1/l_1^2)y_1 - [(\hat{J}_1/l_1^2) + (m_2/3)]y_2 - (m_2/6)y_3 \\ \Psi_4 &= -(\hat{J}_1/l_1^2)x_1 + [(\hat{J}_1/l_1^2) + (m_2/3)]x_2 + (m_2/6)x_3 \\ \Psi_5 &= -(m_2/6)y_2 - (1/3)(m_2 + m_3)y_3 - (m_3/6)y_4 \\ \Psi_6 &= (m_2/6)x_2 + (1/3)(m_2 + m_3)x_3 + (m_3/6)x_4 \\ \Psi_7 &= -(m_3/6)(y_3 + 2y_4) \\ \Psi_8 &= (m_3/6)(x_3 + 2x_4) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

万有引力与惯性力平衡且无外力矩作用时, 系统的总动量为零且总动量矩保持常值 H_0 。将约束条件(18)对 t 求导, 与 $Q = 0$, $H = H_0$ 联立, 可直接写出以下一阶微分方程组

$$A \dot{q} = B \quad (22)$$

系数矩阵 A , B 定义为

$$A = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 & \Psi_5 & \Psi_6 & \Psi_7 & \Psi_8 \\ m_1 & 0 & m_2/2 & 0 & (m_2 + m_3)/2 & 0 & m_3/2 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & m_2/2 & 0 & (m_2 + m_3)/2 & 0 & m_3/2 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & x_4 - x_3 & y_4 - y_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$B = [H_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

空间机械臂的逆动力学问题要求根据给定的抓手运动计算铰的相对转动规律。令广义坐标 q 中的 $x_4(t)$, $y_4(t)$ 为已知函数, 则方程组(22)封闭, 可解出其余坐标以确定铰2, 3的相对转角 ν_2 和 ν_3 。

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= \arcsin [(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)]/l_1 l_2 \\ v_3 &= \arcsin [(x_3 - x_2)(y_4 - y_3) - (x_4 - x_3)(y_3 - y_2)]/l_2 l_3 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

3 刚体的空间运动

讨论刚体的空间运动时, 仍采用式(1)规定的矢量符号. 刚体的空间位置由刚体中任选的二参考点 i, j 以及固结于刚体与 r_{ij} 不共线的参考矢量 u 完全确定(图4). 设 u 与 r_{ij} 有相同的模 l , 夹角为 $\gamma \neq 0$. 令 $\alpha = \sin \gamma, \beta = \cos \gamma$, 引入模为 l 的辅助参考矢量 $v = (\alpha l)^{-1}(r_{ij} \times u)$. 将矢量 $\vec{OP}$ 沿 r_{ij}, u, v 分解为

$$\vec{OP} = r - r_i = \rho - \rho_i = c_1 r_{ij} + c_2 u + c_3 v \quad (25)$$

以固定点 O_0 为原点建立惯性基 $(O_0 \hat{x} \hat{y} \hat{z})$. 以刚体质心 O 为原点建立连体基 $(O \hat{x} \hat{y} \hat{z})$, $\hat{x}$ 和 $\hat{z}$ 轴分别与 r_{ij} 和 v 平行. 各基矢量相对惯性基的投影列阵 e_1, e_2, e_3 组成 $(O \hat{x} \hat{y} \hat{z})$ 与 $(O_0 \hat{x} \hat{y} \hat{z})$ 之间的方向余弦矩阵 R

$$\left. \begin{aligned} R &= [e_1 \ e_2 \ e_3] \\ e_1 &= r_{ij}/l, \ e_2 = (u - \beta r_{ij})/\alpha l, \ e_3 = -\tilde{u} r_{ij}/\alpha l^2 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

其中 r_{ij}, u 为各矢量在 $(O \hat{x} \hat{y} \hat{z})$ 中的投影列阵, $\tilde{u}$ 为 u 在 $(O \hat{x} \hat{y} \hat{z})$ 中的反对称投影方阵. 将式(25)向连体基投影, 导出参数 c_1, c_2, c_3 用 $\rho - \rho_i$ 在 $(O \hat{x} \hat{y} \hat{z})$ 中的投影列阵 $\hat{\rho} - \hat{\rho}_i$ 表示的关系式

$$\left. \begin{aligned} c &= [c_1 \ c_2 \ c_3]^T = L^{-1}(\hat{\rho} - \hat{\rho}_i) \\ L &= l \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

将式(25)向惯性基投影, 导出 r 在 $(O_0 \hat{x} \hat{y} \hat{z})$ 中的投影列阵

$$r = [x \ y \ z]^T = Cq \quad (28)$$

其中 q 为由 r_i, r_j, u 相对 $(O_0 \hat{x} \hat{y} \hat{z})$ 的笛卡尔坐标组成广义坐标列阵, C 为 3×9 变换矩阵

$$q = [r_i^T \ r_j^T \ u^T]^T \quad (29)$$

$$C = [(1 - c_1)E + (\alpha l)^{-1} c_3 \tilde{u}, \ c_1 E - (\alpha l)^{-1} c_3 \tilde{u}, \ c_2 E] \quad (30)$$

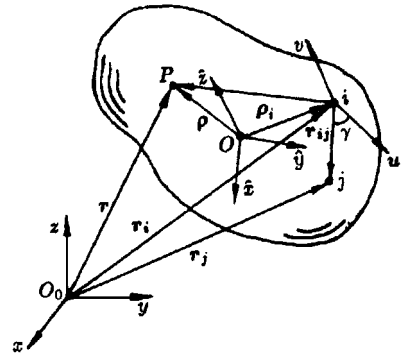


图4 刚体的空间运动

Fig 4 Spatial motion of a rigid body

其中 E 为 3 阶单位阵, r_i, r_j 为各矢量在 $(O_0\text{-}xyz)$ 中的投影列阵 将式(28)代入式(8) 计算刚体质心矢径 r_0 的投影列阵, 得到 $r_0 = Dq$ 的同样结果, 但 D 矩阵定义为

$$D = [(1 - a_1)E + (\alpha l)^{-1}a_3\tilde{U}, a_1E - (\alpha l)^{-1}a_3\tilde{U}, a_2E] \quad (31)$$

其中参数 a_1, a_2, a_3 定义为

$$a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T = m^{-1} \int c dm = -L^{-1}\hat{\rho}_i \quad (32)$$

将 r_0 对 t 求导, 计算刚体的动量 $Q = m \dot{r}_0$ 的投影列阵, 得到 $Q = \Phi \dot{q}$ 的同样结果, 但 Φ 矩阵定义为

$$\Phi = m [(1 - a_1)E + (l)^{-1}a_3\tilde{U}, a_1E - (\alpha l)^{-1}a_3\tilde{U}, a_2E + (\alpha l)^{-1}a_3\tilde{r}_{ij}] \quad (33)$$

其中 $\tilde{r}_{ij}$ 为 r_{ij} 在 $(O_0\text{-}xyz)$ 中的反对称投影方阵

刚体的角速度 ω 可利用连体基矢量 e_1, e_2, e_3 及其变化率表示, 导出 ω 在 $(O_0\text{-}xyz)$ 中的投影列阵

$$\omega = (\dot{e}_3^T e_2, e_1^T \dot{e}_3, \dot{e}_2^T e_1)^T = G \dot{q} \quad (34)$$

G 为 3×9 矩阵, 定义为

$$G = \frac{1}{\alpha^2 l^3} \begin{bmatrix} \beta(\tilde{u}r_{ij})^T & -\beta(\tilde{u}r_{ij})^T & -\alpha(\tilde{u}r_{ij})^T \\ -\alpha(\tilde{u}r_{ij})^T & \alpha(\tilde{u}r_{ij})^T & 0 \\ -\alpha l(U - \beta r_{ij})^T & \alpha l(U - r_{ij})^T & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

设 $\hat{J}$ 为刚体的中心惯量张量在 $(O\text{-}\hat{x}\hat{y}\hat{z})$ 中的投影矩阵, 利用式(34), (35) 计算刚体相对质心的动量矩 $\hat{H}$ 在 $(O_0\text{-}xyz)$ 中的投影列阵 $\hat{H} = R\hat{J}R^T X \omega$ 得到

$$\hat{H} = \hat{\Psi} \dot{q} \quad (36)$$

其中 3×9 矩阵 $\hat{\Psi}$ 为刚体相对质心的广义惯量矩阵

$$\hat{\Psi} = R\hat{J}R^T G \quad (37)$$

利用式(31), (33), (36) 等计算刚体相对固定点 O_0 的动量矩 H 在 $(O_0\text{-}xyz)$ 中的投影列阵 $H = \hat{H} + \tilde{r}_0 Q$, 导出

$$H = \Psi \dot{q} \quad (38)$$

其中 Ψ 为刚体相对固定点的广义惯量矩阵

$$\Psi = \hat{\Psi} + \tilde{r}_0 \Phi \quad (39)$$

$\tilde{r}_0$ 为 r_0 在 $(O_0\text{-}xyz)$ 中的反对称投影方阵

设 F, M 为刚体上的作用力相对 O_0 点的主矢和主矩在 $(O_0\text{-}xyz)$ 中的投影列阵, 利用动量定理和动量矩定理可导出刚体的动力学普遍方程

$$\left. \begin{aligned} A \ddot{q} &= B \\ A &= [\Phi^T, \Psi^T]^T, B = -\dot{A} \dot{q} + [F^T, M^T]^T \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

各笛卡尔坐标满足以下约束方程

$$r_{ij}^T r_{ij} - l^2 = 0, u^T u - l^2 = 0, r_{ij}^T u - \beta l^2 = 0 \tag{41}$$

动力学方程(40)和约束方程(41)共含6个常微分方程和3个二次代数方程,完全确定9个笛卡尔坐标的变化规律 在无外力或无外力矩情况下,可直接利用动量守恒或动量矩守恒原理,使动力学方程降阶

4 多体系统的空间运动

讨论与图3有相同结构的开环多体系统,但铰2改为万向铰(图5). 仍选择1, 2, 3, 4为参考点,矢量u与B₁固结且与r₁₂正交,万向铰2的转轴之一沿r₁₂,另一转轴矢量为v,转动铰3的转轴矢量与v平行 u, v的模分别为l₁, l₂ 表2中给出各分体的参考点、连体基和物理参数

表2

Table 2

rigid body	i	j	x	y	z	l	a ₁	a ₂	m	K _x	K _y	K _z
B ₁	1	2	r ₁₂ /l ₁	u/l ₁	r ₁₂ u/l ₁ ²	l ₁	0	0	m ₁	J _{1x}	J _{1y}	J _{1z}
B ₂	2	3	r ₂₃ /l ₂	v/l ₂	r ₂₃ v/l ₂ ²	l ₂	1/2	0	m ₂	0	m ₂ l ₂ ² /12	m ₂ l ₂ ² /12
B ₃	3	4	r ₃₄ /l ₃	v/l ₂	r ₃₄ v/l ₂ l ₃	l ₃	1/2	0	m ₃	0	m ₃ l ₃ ² /12	m ₃ l ₃ ² /12

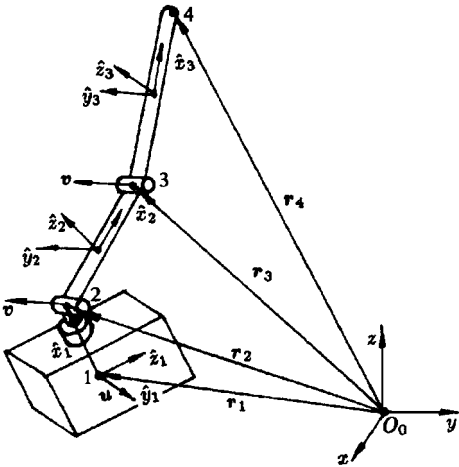


图5 多体系统的空间运动

Fig 5 Spatial motion of a multibody system

建立以总质心O₀为原点的平动坐标系(O₀-xyz)为惯性基 定义各分体的广义坐标列阵q_i(i= 1, 2, 3)

$$q_1 = [r_1^T, r_2^T, U^T]^T, q_2 = [r_2^T, r_3^T, v^T]^T, q_3 = [r_3^T, r_4^T, v^T]^T \tag{42}$$

利用式(33), (39)计算各分体的动量Q_i(i= 1, 2, 3)和相对O₀点的动量矩H_i(i= 1, 2, 3)的投影列阵,得到

$$Q_i = \Phi \dot{q}_i, H_i = \Psi \dot{q}_i (i = 1, 2, 3) \tag{43}$$

其中矩阵 $\Phi_i (i=1, 2, 3)$ 定义为

$$\Phi_1 = m_1 [E, 0, 0], \Phi_2 = (m_2/2) [E, E, 0], \Phi_3 = (m_3/2) [E, E, 0] \quad (44)$$

矩阵 $\Psi_i (i=1, 2, 3)$ 定义为

$$\Psi_i = [\Psi_{i1}, \Psi_{i2}, \Psi_{i3}] \quad (i=1, 2, 3) \quad (45)$$

各子矩阵 $\Psi_{ij} = R_i \hat{J}_i R_i^T G_{ij} + \tilde{r}_{0i} \Phi_j (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$, 其中 G_{ij} , Φ_j 分别为 G_i 和 Φ 的第 j 列子矩阵, $\tilde{r}_{0i}$ 为第 i 分体的质心相对 O_0 的矢径 r_{0i} 在 $(O_0\text{-}xyz)$ 中的反对称投影方阵 且有

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= [r_{12} l_1^{-1}, u l_1^{-1}, -\tilde{u} r_{12} l_1^{-2}], & \hat{J}_1 &= \text{diag}(\hat{J}_{1x}, \hat{J}_{1y}, \hat{J}_{1z}) \\ R_2 &= [r_{23} l_2^{-1}, v l_2^{-1}, -\tilde{v} r_{23} l_2^{-2}], & \hat{J}_2 &= \text{diag}(0, m_2 l_2^2/12, m_2 l_2^2/12) \\ R_3 &= [r_{34} l_3^{-1}, v l_3^{-1}, -\tilde{u} r_{34} l_3^{-1} l_3^{-1}], & \hat{J}_3 &= \text{diag}(0, m_3 l_3^2/12, m_3 l_3^2/12) \\ G_1 &= \frac{1}{l_1^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(\tilde{u} r_{12})^T \\ -(\tilde{u} r_{12})^T & (\tilde{u} r_{12})^T & 0 \\ -l_1 u^T & l_1 u^T & 0 \end{bmatrix} \\ G_2 &= \frac{1}{l_2^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(\tilde{u} r_{23})^T \\ -(\tilde{u} r_{23})^T & -(\tilde{u} r_{23})^T & 0 \\ -l_2 v^T & l_2 v^T & 0 \end{bmatrix} \\ G_3 &= \frac{1}{l_2^2 l_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(\tilde{v} r_{34})^T \\ -(\tilde{v} r_{34})^T & (\tilde{v} r_{34})^T & 0 \\ -l_3 v^T & l_3 v^T & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

将广义坐标缩并为由18个笛卡尔标组成的列阵 q

$$q = [r_1^T, r_2^T, r_3^T, r_4^T, u^T, v^T]^T \quad (47)$$

将系统内各分的动量矩简单叠加, 得到系统的总动量 Q 和总动量矩 H 的投影列阵

$$Q = \Phi q, H = \Psi q \quad (48)$$

矩阵 Φ, Ψ 定义为

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= [\Phi_1^*, \Phi_2^*, \Phi_3^*, \Phi_4^*, 0, 0] \\ \Psi &= [\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*, \Psi_4^*, \Psi_5^*, \Psi_6^*] \\ \Phi_1^* &= m_1 E, \Phi_2^* = (m_2/2)E, \Phi_3^* = [(m_2 + m_3)/2]E, \Phi_4^* = (m_3/2)E \\ \Psi_1^* &= \Psi_{11}, \Psi_2^* = \Psi_{12} + \Psi_{21}, \Psi_3^* = \Psi_{22} + \Psi_{31} \\ \Psi_4^* &= \Psi_{32}, \Psi_5^* = \Psi_{13}, \Psi_6^* = \Psi_{23} + \Psi_{33} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

无约束条件下系统的自由度为 g . 由于总动量为零和总动量矩守恒, 存在6个动力学约束条件

$$Q = 0, H = H_0 \quad (50)$$

因此系统的实际自由度为3. 式(47)中的18个笛卡尔坐标除满足条件(50)以外, 还受以下9个几何约束条件的限制

$$\left. \begin{aligned} (r_{k+1} - r_k)^T (r_{k+1} - r_k) - l_k^2 &= 0 \quad (k = 1, 2, 3) \\ u^T u - l_1^2 = 0, v^T v - l_2^2 = 0, (r_2 - r_1)^T u &= 0 \\ (r_{k+1} - r_k)^T v &= 0 \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

则独立变量数与自由度相等. 动力学条件(50)和微分形式的几何约束条件(51)共提供15个一阶微分方程, 综合为

$$A \dot{q} = B \quad (52)$$

系数矩阵 A, B 定义为

$$A = \begin{bmatrix} \Psi_1^* & \Psi_2^* & \Psi_3^* & \Psi_4^* & \Psi_5^* & \Psi_6^* \\ \Phi_1^* & \Phi_2^* & \Phi_3^* & \Phi_4^* & 0 & 0 \\ -r_{12}^T & r_{12}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{23}^T & r_{23}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_{34}^T & r_{34}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v^T \\ -u^T & u^T & 0 & 0 & r_{12}^T & 0 \\ -v^T & v^T & 0 & 0 & 0 & r_{12}^T \\ 0 & -v^T & v^T & 0 & 0 & r_{23}^T \\ 0 & 0 & -v^T & v^T & 0 & r_{34}^T \end{bmatrix} \quad B = [H_0 \ 0^T]^T \quad (53)$$

其中 B 矩阵中的 0 为12个 0 组成的列阵

讨论空间机械臂的逆动力学问题时, 对于给定的抓手运动 $r_4(t)$, 可从封闭的方程组(53)积分, 解出其余坐标以确定万向铰2的相对转角 θ_1 , θ_2 以及转动铰3的相对转角 θ_3 的控制规律

$$\gamma_1 = \arcsin(\tilde{u}_v/l_1 l_2), \gamma_2 = \arcsin(\tilde{r}_{12} r_{23}/l_1 l_2), \gamma^3 = \arcsin(\tilde{r}_{23} r_{34}/l_2 l_3) \quad (54)$$

若系统内存在闭环, 只需相应地增加多余铰的几何约束条件, 不需对原方程作任何改动

致谢 作者感谢 J. Wittenburg 教授对本文的讨论和建议

参 考 文 献

- 1 Garc á de Jal ón J, Serna MA, Avil é R. Computer method for kinematic analysis of lower- pair mechanisms *Mechanism and Machine Theory*, 1981, 16(5): 543~ 556
- 2 Garc á de Jal ón J, Uda J, Avello A. Natural coordinates for the computer analysis of multibody systems *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 1986, 56: 309~ 327
- 3 Bayo E, Garc á de Jal ón J, Avello A, Cuadrado J. An efficient computational method for real time multibody dynamic simulation in fully Cartesian coordinates *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1991, 92: 377~ 395
- 4 Garc á de Jal ón J, Boyo E. Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems—The Real- Time Challenge Springer-Verlag, 1993
- 5 Garc á de Jal ón J, Cuadrado J, Avello A, Jimenez JM. Kinematic and dynamic simulation of rigid and flexible systems with fully Cartesian coordinates *Computer Aided Analysis of Rigid and Flexible Mechanical Systems*, NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers 1994: 285~ 323
- 6 刘延柱, 洪嘉振, 杨海兴. 多刚体系统动力学. 高等教育出版社 1989

ON DYNAMICS OF MULTIBODY SYSTEM DESCRIBED BY FULLY CARTESIAN COORDINATES

Liu Yanzhu

(Shanghai Jiaotong University, Department of Engineering Mechanics, Shanghai 200030, China)

Abstract The formulation of kinematics and dynamics of multibody system based on the fully Cartesian coordinates has an important advantage in computational efficiency. In present paper the analytical expression of linear and angular momentums of rigid body and multibody systems in fully Cartesian coordinates and the corresponding generalized inertia matrix are given. The dynamics of a torque-free multibody system described by the fully Cartesian coordinates in the form of differential equations of first order is formulated and can be used for the analysis of attitude motion of spacecraft

Key words dynamics of rigid body, multibody dynamics, attitude dynamics of spacecraft