第 29 卷 第 1 期 力 学 学 报 Vol 29, No. 1
1997 年 1 月 ACTA MECHANICA SINICA Jan. , 1997

弱界面复合材料中的基体裂纹[1)]

罗海安 王奇山[2)]
(上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

摘要 利用二维弹性力学模型研究了纤维增强复合材料中基体裂纹与弱界面的相互作用机理 文中首先导出各向异性弹性多层介质中刃型位错的基本解, 然后运用这些基本解建立了弱界面复合材料中典型的H 型缺陷的奇异积分方程组, 通过求解这些方程得到外载荷的大小、弱界面的结合强度、界面的残余压力和摩擦系数、纤维与基体的弹性模量比等微结构参量与基体裂纹附近的应力场的关系

关键词 复合材料, 弱界面, 基体裂纹

引 言

复合材料的相间界面是其重要的微结构, 界面的结合性状与复合材料的损伤和破坏关系密切 当纤维与基体以强界面结合时, 基体裂纹易于穿越界面, 导致承载纤维的断裂与复合材料总体强度的下降; 而在弱界面复合材料中基体裂纹则容易在界面处转折, 从而使大部分纤维保持完整, 维持了沿纤维方向复合材料的承载能力. 文献[1]利用能量准则给出了强界面与弱界面的判据, 为复合材料的界面设计提供了一个重要依据

但问题并没有完全解决 特别是对于大量存在的弱界面复合材料, 它们的界面结合强度与基体裂纹附近的应力分布有什么关系, 基体裂纹附近的未断裂纤维的应力集中情况如何? 这一问题关系到如何正确地设计这类复合材料, 应当引起重视 Dollar 和 Stief 在文[2]中研究了同质材料的弱界面问题, 他们的解可用于象陶瓷基复合材料那样的基体与纤维的弹性模量相当的情况, 但对于纤维与基体的刚度比比较大的复合材料, 上述解的应用则受到限制: Yang 和 Boehler 在文[3]中研究了复合材料层合板的层内多重断裂与层间脱粘的相互作用, 给出了具有这类损伤的正交铺设层合板的应力应变关系曲线, 然而由于他们为断裂铺层引入了一个沿横截面呈二次多项式变化的位移模式, 他们的解若被用于描述缺陷附近的局部应力场便显得不够精确

本文将用二维弹性力学模型研究复合材料相间弱界面的细观作用机理 文中首先导出各向异性弹性多层介质中刃型位错的基本解, 然后运用该基本解建立由复合材料的基体裂纹和与之相交的弱界面上的脱粘所构成的H 型缺陷的奇异积分方程组 这里界面脱粘后被一般地假设为部分张开, 其闭合部分作用有库仑摩擦力, 界面裂纹的强度则用其断裂韧性来表征 通过求解离散后的一组非线性代数方程, 得到外载荷、弱界面结合强度、残余应力和界面摩擦系数、纤维和基体弹性模量比等参量与基体裂纹附近应力分布的关系

1) 国家自然科学基金与上海交通大学金属基复合材料国家重点实验室开放课题资助项目.

2) 现通讯地址: 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072

1995- 07- 21 收到第一稿, 1996- 07- 12 收到修改稿

1　理论分析

1.1　多层介质中刃型位错的基本解

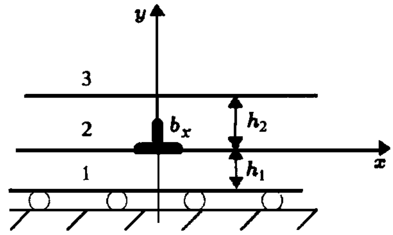

图 1

Fig. 1

如图 1 所示, 弹性介质由三层材料组成, 其中第 1 层与第 2 层均为各向同性材料, 其拉梅弹性常数分别为 (λ_1, μ_1) 与 (λ_2, μ_2), 第 3 层则为正交各向异性材料, 其刚度系数为 $(b_{\alpha\beta}, \mu_{xy})$, 使

$$\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & 0\\ b_{21} & b_{22} & 0\\ 0 & 0 & \mu_{xy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix} \tag{1}$$

[illegible]　设在多层介质的原点处有一刃型位错 b_x, 我们用叠加法来求解[illegible]问题　4

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{xy}^{(1)}(x,y) &= \frac{Cb_x}{\pi}\left[\frac{x}{r^2}-(1-\beta)\frac{2xy^2}{r^4}\right]\\
\tilde{\mu}^{(1)}(x,y) &= \frac{Cb_x}{2\mu_1\pi}\left\{\left[1+\frac{1}{2}(1-\beta)(\kappa_1-1)\right]tg^{-1}\frac{y}{x}+(1-\beta)\frac{xy}{r^2}\right\}\\
\tilde{\upsilon}^{(1)}(x,y) &= \frac{Cb_x}{2\mu_1\pi}\left\{\left[1-\frac{1}{2}(1-\beta)(\kappa_1+1)\right]In\ r+(1-\beta)\frac{y^2}{r^2}\right\}
\end{aligned} \tag{2}$$

当 $y>0$ 时

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{x}^{(2)}(x,y) &= \frac{Cb_x}{\pi}\left[-\frac{y}{r^2}+(1+\beta)\left(\frac{2y^3}{r^4}-\frac{2y}{r^2}\right)\right],\quad \tilde{\sigma}_{y}^{(1)}=\frac{Cb_x}{\pi}\left[\frac{y}{r^2}-(1+\beta)\frac{2y^3}{r^4}\right]\\
\tilde{\sigma}_{xy}^{(2)}(x,y) &= \frac{Cb_x}{\pi}\left[\frac{x}{r^2}-(1+\beta)\frac{2xy^2}{r^4}\right]\\
\tilde{\mu}^{(2)}(x,y) &= \frac{Cb_x}{2\mu_2\pi}\left\{\left[1+\frac{1}{2}(1+\beta)(\kappa_2-1)\right]tg^{-1}\frac{y}{x}+(1+\beta)\frac{xy}{r^2}\right\}\\
\tilde{\upsilon}^{(2)}(x,y) &= \frac{Cb_x}{2\mu_2\pi}\left\{\left[1-\frac{1}{2}(1+\beta)(\kappa_2+1)\right]In\ r+(1+\beta)\frac{y^2}{r^2}\right\}
\end{aligned} \tag{3}$$

在界面 $y=0$ 上

$$\tilde{\sigma}_y(x,0)=-\beta Cb_x\delta(x),\quad \tilde{\sigma}_{xy}=\frac{Cb}{\pi}\frac{1}{x} \tag{4}$$

其中 $\delta(x)$ 是 Dirac 函数, α, β 是 Dundurs 常数[4]

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad C=\frac{2\mu_1(1+\alpha)}{(\kappa_1+1)(1-\beta^2)}=\frac{2\mu_2(1-\alpha)}{(\kappa_2+1)(1-\beta^2)} \tag{5}$$

在平面应变下取 $k_i = 3 - 4\nu_i$，平面应力下取 $k_i = (3-\nu_i)/(1+\nu_i)$，$\nu_i$为泊松比，$i = 1, 2$。对上述位移与应力分量分别作傅里叶变换，有

$$\left.\begin{aligned}
&\widetilde{U}^{(i)}(\xi, y) = \int_0^\infty \tilde{u}^{(i)}(x, y)\sin\xi x\,dx, \qquad \widetilde{V}^{(i)}_{xy}(\xi, y) = \int_0^\infty \tilde{v}^{(i)}(x, y)\cos\xi x\,dx\\
&\Sigma_x^{(i)}(\xi, y) = \int_0^\infty \tilde{\sigma}_x(x, y)\cos\xi x\,dx, \qquad \Sigma_y^{(i)}(\xi, y) = \int_0^\infty \tilde{\sigma}_y(x, y)\cos\xi x\,dx\\
&\Sigma_{xy}^{(i)}(\xi, y) = \int_0^\infty \tilde{\sigma}_{xy}(x, y)\sin\xi x\,dx
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

图 1 所示问题的解可表示成

$$\left.\begin{aligned}
&u^{(i)} = \bar{u}^{(i)} + \tilde{u}^{(i)} \qquad v^{(i)} = \bar{v}^{(i)} + \tilde{v}^{(i)}\\
&\sigma_x^{(i)} = \bar{\sigma}_x^{(i)} + \tilde{\sigma}_x^{(i)}, \qquad \sigma_y^{(i)} = \bar{\sigma}_y^{(i)} + \tilde{\sigma}_y^{(i)}, \qquad \sigma_{xy}^{(i)} = \bar{\sigma}_{xy}^{(i)} + \tilde{\sigma}_{xy}^{(i)}
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中 $\tilde{u}^{(3)} = \tilde{v}^{(3)} = \tilde{\sigma}_x^{(3)} = \tilde{\sigma}_y^{(3)} = \tilde{\sigma}_{xy}^{(3)} = 0$。类似于式(6)可以相应地定义 $\bar{u}^{(i)}$，$\bar{v}^{(i)}$，$\bar{\sigma}_x^{(i)}$，$\bar{\sigma}_y^{(i)}$，$\bar{\sigma}_{xy}^{(i)}$ 的傅里叶变换。从各向同性与各向异性弹性力学的基本方程出发不难导得，当 $i = 1$ 与 2 时，它们的通解是

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{U}^{(i)}(\xi, y) = (A_1^{(i)}h_1 + A_2^{(i)}y)\exp(-\xi y) + (A_3^{(i)}h_1 + A_4^{(i)}y)\exp(\xi y)\\
&\overline{V}^{(i)}(\xi, y) = \left[A_1^{(i)}h_1 + A_2^{(i)}\left(\frac{K_i}{\xi} + y\right)\right]\exp(-\xi y) + \left[-A_3^{(i)}h_1 + A_4^{(i)}\left(\frac{K_i}{\xi} - y\right)\right]\exp(\xi y)\\
&\Sigma_x^{(i)}(\xi, y) = [\xi(A_1^{(i)}h_1 + A_2^{(i)}y) - 2\upsilon A_2^{(i)}]\exp(-\xi y) + [\xi(A_3^{(i)}h_1 + A_4^{(i)}y)\\
&\qquad + 2\upsilon A_4^{(i)}]\exp(\xi y)\\
&\Sigma_y^{(i)}(\xi, y) = -[\xi(A_1^{(i)}h_1 + A_2^{(i)}y) + 2(1-\upsilon_i)A_2^{(i)}]\exp(-\xi y) + [-\xi(A_3^{(i)}h_1 + A_4^{(i)}y)\\
&\qquad + 2(1-\upsilon_i)A_4^{(i)}]\exp(\xi y)\\
&\Sigma_{xy}^{(i)}(\xi, y) = -[\xi(A_1^{(i)}h_1 + A_2^{(i)}y) + (1-2\upsilon_i)A_2^{(i)}]\exp(-\xi y) + [\xi(A_3^{(i)}h_1 + A_4^{(i)}y)\\
&\qquad - (1-2\upsilon_i)A_4^{(i)}]\exp(\xi y)
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

当 $i = 3$ 时

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{U}^{(i)}(\xi, y) = \sum_{j=1}^{4} A_j^{(i)}\exp(s_j\xi y), \qquad \overline{V}^{(i)}(\xi, y) = \sum_{j=1}^{4} A_j^{(i)}d_j\exp(s_j\xi y)\\
&\Sigma_x^{(i)}(\xi, y) = b_{11}\xi\sum_{j=1}^{4} A_j^{(i)}\exp(s_j\xi y) + b_{12}\xi\sum_{j=1}^{4} d_j s_j A_j^{(i)}\exp(s_j\xi y)\\
&\Sigma_y^{(i)}(\xi, y) = b_{12}\xi\sum_{j=1}^{4} A_j^{(i)}\exp(s_j\xi y) + b_{22}\xi\sum_{j=1}^{4} d_j s_j A_j^{(i)}\exp(s_j\xi y)\\
&\Sigma_{xy}^{(i)}(\xi, y) = \mu_{xy}\left[\xi\sum_{j=1}^{4} A_j^{(i)}s_j\exp(s_j\xi y) - \xi\sum_{j=1}^{4} d_j A_j^{(i)}\exp(s_j\xi y)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中$A_j^{(i)}$为 ξ 的待定函数. 在式(9)中

$$d_j = [\beta_2 s_j^3 - (\beta_1\beta_2 - \beta_3^2) s_j]\beta_3 \tag{10}$$

为方程

$$s^4 + \frac{\beta_3^2 - \beta_1\beta_2 - 1}{\beta_2} s^2 + \frac{\beta_1}{\beta_2} = 0 \tag{11}$$

的 4 个根, 且满足$Re(s_1) > Re(s_2) > 0$, $s_3 = -s_1$, $s_4 = -s_2$. 以上两式中

$$\beta_1 = b_{11}\mu_{xy}, \quad \beta_2 = b_{22}\mu_{xy}, \quad \beta_3 = 1 + b_{12}\mu_{xy} \tag{12}$$

弹性场(7)应满足界面的连续条件, 在 ξ 域内它们是

$$\left.\begin{aligned} &\overline{U}^{(2)}(\xi,0) - \overline{U}^{(1)}(\xi,0) = 0, \quad \overline{V}^{(2)}(\xi,0) - \overline{V}^{(1)}(\xi,0) = 0 \\ &\Sigma_y^{(2)}(\xi,0) - \Sigma_y^{(1)}(\xi,0) = 0, \quad \Sigma_{xy}^{(2)}(\xi,0) - \Sigma_{xy}^{(1)}(\xi,0) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

及

$$\left.\begin{aligned} &\overline{U}^{(3)}(\xi,h_2) - \overline{U}^{(2)}(\xi,h_2) = \widetilde{U}^{(2)}(\xi,h_2), \quad \overline{V}^{(3)}(\xi,h_2) - \overline{V}^{(2)}(\xi,h_2) = \widetilde{V}^{(2)}(\xi,h_2) \\ &\Sigma_y^{(3)}(\xi,h_2) - \Sigma_y^{(2)}(\xi,h_2) = \Sigma_y^{(2)}(\xi,h_2), \quad \Sigma_{xy}^{(3)}(\xi,h_2) - \Sigma_{xy}^{(2)}(\xi,h_2) = \Sigma_{xy}^{(2)}(\xi,h_2) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

此外, 在边界上还应满足相应的边界条件

$$\left.\begin{aligned} &\overline{V}^{(1)}(\xi,-h_1) = -\widetilde{V}^{(1)}(\xi,-h_1), \quad \Sigma_{xy}^{(1)}(\xi,-h_1) = -\Sigma_{xy}^{(1)}(\xi,-h_1) \\ &\Sigma_y^{(3)}(\xi,\infty) = 0, \qquad \Sigma_{xy}^{(3)}(\xi,\infty) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

式(13)～(15)共包含 12 个方程, 可用于求解 12 个未知数$A_j^{(i)}(\xi)$. 然后对式(8)与式(9)进行傅里叶逆变换可求得: $\overline{\sigma}_y(x,0) = F_1(x)b_x$, $\overline{\sigma}_{xy}(x,0) = G_1(x)b_x$, $\overline{\sigma}_x^{(i)}(x,y) = H_1^{(i)}(x,y)b_x$.

完全类似地, 我们可以分别求得当原点存在刃型位错 b_y 以及在点$(0,\zeta)$ $(\zeta < 0)$处存在刃型位错 b_x 时的基本解, 其中对应于 $\overline{\sigma}_y(x,0)$, $\overline{\sigma}_{xy}(x,0)$, $\overline{\sigma}_x^{(i)}(x,0)$ 那部分应力的影响函数分别为$F_2(x)$, $G_2(x)$, $H_2^{(i)}(x,y)$与$F_3(x)$, $G_3(x)$, $H_3^{(i)}(x,y)$.

1.2 H 型缺陷的奇异积分方程组

考虑如图 2 所示的由复合材料中的基体裂纹与弱界面的界面裂纹所组成的平面应变 H 型缺陷. 这里层 1 与层 2 的弹性模量为(E_1,μ_1)与(E_2,μ_2), 分别代表复合材料中基体与纤维的杨氏模量与剪切模量. 按照广义自洽模型, 层 3 的弹性性质由复合材料的等效模量 $(b_{\alpha\beta}, \mu_{xy})$ 来表征[5]. 图中 σ_∞为无穷远处沿 x 方向的应力, σ_0则用以表征纤维横向的残余应力.

由于界面$y=0$是弱界面, 在载荷σ_∞的作用下它将于基体裂纹的尖端附近发生脱粘, 设脱粘区域为$|x| < a_s$. 若层1与层2的弹性模量不同, 则脱粘后的界面在界面裂纹尖端附近始终存在一接触区[6], 其张开部分设为$|x| < a_g < a_s$. 在脱粘界面的闭合部分$a_g < |x| < a_s$上

界面处于库仑摩擦滑移状态, 记摩擦系数为 μ 因图 2 的问题关于 $y = -h_1$ 对称, 故仅需考虑 $y \geq -h_1$ 的部分. 运用叠加原理, 该裂纹问题的边界条件可表达为

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma_x(0, y) = -\sigma_1 \quad (-h_1 < y < 0), \qquad \sigma_{xy}(0, y) = 0 \quad (-h_1 < y < 0) \\
&\sigma_y(x, 0) = -\sigma_0 \quad (|x| < a_g), \qquad \sigma_{xy}(x, 0) = 0 \quad (|x| < a_g) \\
&\sigma_{xy}(x, 0) = \mu[\sigma_y(x, 0) + \sigma_0]\mathrm{sgn}(x) \qquad (a_g < |x| < a_s) \\
&\sigma_y(x, 0) + \sigma_0 \leq 0 \quad (a_g < |x| < a_s) \\
&v(x, -h_1) = 0, \quad \sigma_{xy}(x, -h_1) = 0 \\
&\sigma_y(x, \infty) = 0, \quad \sigma_{xy}(x, \infty) = 0
\end{aligned}
\right\} \tag{16}
$$

式中 $\mathrm{sgn}(x)$ 为符号函数, $\sigma_1 = (E_1 E_x)\sigma_\infty$, E_x 为复合材料沿 x 方向的等效模量

上述边界条件可通过裂纹面上的连续分布位错来满足, 设在界面 $y = 0$, $|x| < a_g$ 上及基体裂纹面 $x = 0$, $-h_1 < y < 0$ 上分别作用有密度为 $B_y^{int}(x)$ 与 $B_x^{nch}(y)$ 的张开型位错, 沿界面 $y = 0$, $|x| < a_s$ 上作用有密度为 $B_y^{int}(x)$ 的滑移型位错, 利用上节推导的基本解和问题的对称性, 可建立如下的奇异积分方程组

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int_0^{a_g} \frac{B_y^{int}(x_0)}{x - x_0} dx_0 - \beta\pi B_x^{int}(x) + \int_0^{a_g} K_{1y}(x, x_0) B_y^{int}(x_0) dx_0 + \int_0^{a_s} K_{2y}(x, x_0) B_x^{int}(x_0) dx_0 + \\
&\quad \int_{-h_1}^0 K_{3y}(x, \zeta) B_x^{nch}(\zeta) d\zeta = -\frac{\pi}{C}\sigma_0 \quad (0 < x < a_g) \\
&\int_0^{a_s} \frac{B_x^{int}(x_0)}{x - x_0} dx_0 - \rho\beta\pi B_y^{int}(x) + \int_0^{a_s} K_{1xy}(x, x_0) B_x^{int}(x_0) dx_0 + \int_0^{a_g} K_{2xy}(x, x_0) B_y^{int}(x_0) dx_0 + \\
&\quad \int_{-h_1}^0 K_{3xy}(x, \zeta) B_x^{nch}(\zeta) d\zeta = -0 \quad (0 < x < a_g) \\
&\int_0^{a_s} \frac{B_x^{int}(x_0)}{x - x_0} dx_0 - \mu\beta\pi B_x^{int}(x) + \int_0^{a_s} [K_{1xy}(x, x_0) - \mu K_{2y}(x, x_0)] B_x^{int}(x_0) dx_0 - \\
&\quad \mu \int_0^{a_g} \frac{B_y^{int}(x_0)}{x - x_0} dx_0 + \int_0^{a_g} [K_{2xy}(x, x_0) - \mu K_{1y}(x, x_0) B_y^{int}(x_0) dx_0 + \\
&\int_{-h_1}^0 [\mu K_{3xy}(x, \zeta) - \mu K_{3y}(x, \zeta)] B_x^{nch}(\zeta) d\zeta = \frac{\pi}{C}\mu\sigma_0 \quad (a_g < x < a_s) \\
&\int_{-h_1}^0 \frac{B_x^{nch}(\zeta)}{y - \zeta} d\zeta + \int_{-h_1}^0 K_{1x}(y, \zeta) B_x^{nch}(\zeta) d\zeta + \int_0^{a_s} K_{2x}(y, x_0) B_x^{int}(x_0) dx_0 + \\
&\quad \int_0^{a_g} K_{3y}(y, x_0) B_y^{int}(x_0) dx_0 = \frac{\pi}{C} \frac{(1 + \alpha)}{(1 - \beta^2)} \sigma_1 \quad (-h_1 < y < 0)
\end{aligned}
\right\} \tag{17}
$$

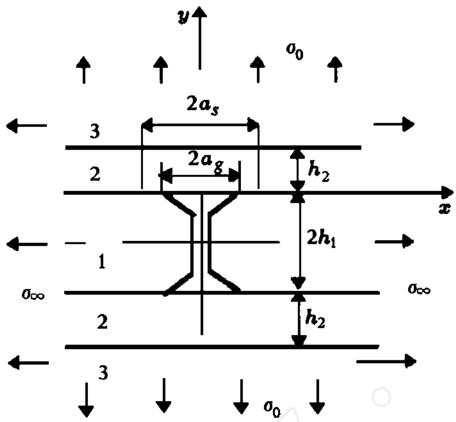

图 2

Fig. 2

式中 K_{1x}, K_{1y}, K_{1xy} 为正则积分核, 它们的表达式由附录给出, 当 $x \le a_g$ 时, $\rho = 1$, 当 $a_g < x < a_s$ 时, $\rho = 0$.

文献[6]和[7]证明: 在界面 $y=0$, $x=a_s$ 处, 应力 σ_{xy} 具有 1/2 次的奇异性, 在 $y=0$, $x=a_g$ 处应力 σ_y 有界, 在基体裂纹的端点即坐标原点处应力 σ_x 有界. 因此位错密度 $B_x^{int}(x)$ 可以表达成

$$B_x^{int}(x) = \phi_x^{int}(x)/\sqrt{a_s - x} \tag{18}$$

其中 $\phi_x^{int}(x)$ 为 x 的正则函数. 同时为了计算方便, 取

$$\left.\begin{aligned} B_y^{int}(x) &= \phi_y^{int}(x)/\sqrt{a_g - x}, & \phi_y^{int}(a_g) &= 0 \\ B_x^{nch}(y) &= \phi_x^{nch}(y)/\sqrt{h_1 + y}, & \phi_x^{nch}(-h_1) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

其中 $\phi_y^{int}(x)$ 与 $\phi_x^{nch}(y)$ 分别为 x 与 y 的正则函数. 通过对正则函数 ϕ_x^{int}, ϕ_y^{int}, ϕ_x^{nch} 进行分片二次光滑插值, 具有广义柯西核的奇异积分方程组(17) 可以化成一组关于 ϕ_x^{int}, ϕ_y^{int}, ϕ_x^{nch} 的节点值的代数方程[8].

如上所述, 当界面两侧材料的弹性性质不同时, 由于界面裂纹的尖端附近始终存在一 Comninou 接触区, 因此它应是 II 型裂纹, 其应力强度因子为

$$K_{II} = \lim_{x \to a_s} [\sqrt{2\pi(x - a_s)}\,\sigma_{xy}] = \sqrt{2\pi a_s} C \phi_x^{int}(a_s) \tag{20}$$

如果层 1 与层 2 的材料相同, 则如文献[2]的计算表明, 当界面裂纹长度 a_s 很短时裂纹面可能张开, 这时界面裂纹尖端 I 型和 II 型应力强度因子共存, 但在大部分情况下 $a_g < a_s$, 界面裂纹仍是 II 型的. 值得注意的是上述 Comninou 界面裂纹模型使得我们可以避免引入双材料界面裂纹尖端的振荡奇异性. 正如 Rice 在文[9]中所指出, 对于本文所讨论的接触区较长的界面裂纹, 采用具有振荡奇异性的混合型应力强度因子将导致较大的误差.

2　计算结果与讨论

在载荷 σ_∞ 的作用下, 上述基体裂纹首先在靠近裂纹尖端的弱界面上形成脱粘, 脱粘的长度与载荷的大小及弱界面的结合强度均有关. 对于给定结合强度的弱界面, 式 (17) 中的 a_s 与

a_g是载荷 σ_1与 σ_0的函数, 界面裂纹的应力强度因子则与 a_s, a_g及载荷的大小均有关. 设图 2 中层 1 与层 2 的材料性质不同, 根据前面的分析, 对于脆性的界面裂纹, 它的起裂条件为 K_{II}达到其临界值 K_{IIc}. 令式(20) 中 $K_{II}= K_{IIc}$, 则由式(17)～ (20) 可以求得对应于初始界面脱粘长度 a_s 使其达到起裂状态所需之载荷 σ_1. 在实际计算中我们把 σ_1 与 σ_0无量纲化, 即引入

$$\Sigma_1 = \frac{\sigma_1 \sqrt{h_1}}{\sqrt{8\mu_1 G_C/(\kappa_1+1)}}, \quad \Sigma_0 = \frac{\sigma_0 \sqrt{h_1}}{\sqrt{8\mu_1 G_C/(\kappa_1+1)}} \tag{21}$$

其中 $G_C= K_{IIC}^2/4C$ 为上述界面裂纹的断裂韧性[10].

为验证本文给出的算法的正确性, 我们首先计算了纤维与基体具有相同弹性性质且残余应力为零的情况, 所得到的界面裂纹的应力强度因子与界面脱粘长度的关系和文[11]的结果完全一致.

图 3 给出了纤维与基体的泊松比相同, 弹性模量比为 $E_2/E_1= 1.1, 2, 10$ 三种情况下无量纲界面起裂应力 Σ_1 与界面脱粘长度 a_s/h_1 的关系. 由图可见, 对于具有一定结合强度的界面, 在脱粘的起始阶段界面裂纹的扩展是稳定的, 即需要不断增加载荷才能使界面的脱粘长度增大. 但是当载荷达到其临界值, 界面裂纹便失稳扩展, 这时不需要增加载荷界面也会突然被拉开一段距离. 这种现象也同时存在于同质材料的界面[2]. 此外由 Σ_1 的定义可知, 界面的结合强度愈弱, Σ_1 的临界值就愈小.

图 4 给出了无量纲载荷 Σ_1与基体裂纹前沿未断裂纤维的应力集中因子 $(\sigma_x)_{tip}/\sigma_1$的关系. 由图 3 与图 4 可知, 当载荷 σ_1很小时, 基体裂纹尖端前缘的应力集中很大(如脱粘长度 $a_s= 0$, $(\sigma_x)_{tip}$就具有奇异性). 随着 Σ_1的增大, 界面的脱粘长度也增大, 纤维处的应力集中则显著下降. 特别是当 Σ_1达到其临界值时, 界面被突然拉开, 纤维的应力集中也跳跃到一个较低的值.

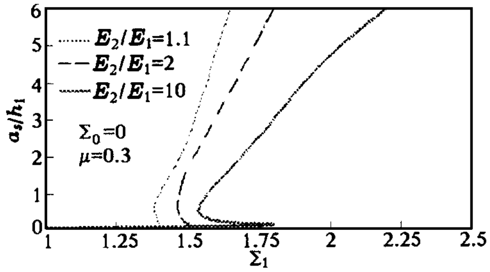

图 3

Fig. 3

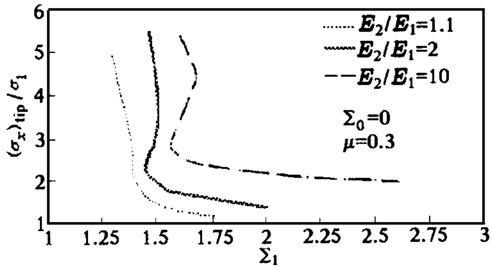

图 4

Fig. 4

通过改变 Σ_0 与 μ 可分析残余应力及界面摩擦系数对 $(\sigma_x)_{tip}/\sigma_1$ 的影响. 计算表明, 增加残余应力或增大界面的摩擦系数将使界面裂纹失稳的临界载荷增大, 同时也使与基体裂纹相邻的纤维的应力集中加大. 图 5 给出不同 Σ_0 值下 $(\sigma_x)_{tip}/\sigma_1$ 与 Σ_1 的关系. 为了计算方便, 图中仅绘出界面裂纹完全闭合即 $a_g= 0$ 阶段的值. 由图可见, 在相同 Σ_1 下 $\Sigma_0= -0.3$ 时的 $(\sigma_x)_{tip}/\sigma_1$最大, 这是因为此时通过界面传递的应力最为有效. 在同一 Σ_0 下, 随着 Σ_1 的增大, $(\sigma_x)_{tip}/\sigma_1$ 趋于一渐近值, 比较图 3 可知这时纤维与基体的界面已在相当程度上脱粘, 两侧材料主要依靠摩擦来传递应力.

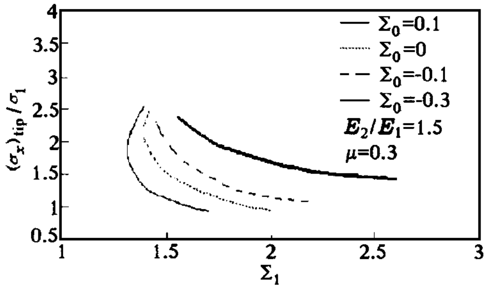

图 5

Fig. 5

3 结　论

通过上述二维弹性力学模型, 仔细分析了复合材料基体裂纹与弱界面相互作用的力学机理, 计算结果表明, 界面的结合强度、界面处的残余应力、纤维与基体的模量比等均对基体裂纹附近的应力场有明显的影响. 在进行复合材料界面的细观力学设计时, 应综合考虑上述因素的作用.

参 考 文 献

1 He M, Hutchinson JW. Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials. *Int J Solids Struct*, 1989, 25: 1053～1067

2 Dollar A, Steif PS. Interface blunting of matrix cracks in fiber- reinforced ceramics. *J Appl Mech*, 1992, 59: 796～803

3 Yang W, Boehler JP. Micromechanics modelling of anisotropic damage in cross- ply laminates. *Int J Solids Struct*, 1992, 10: 1303～1328

4 Dundurs J. Elastic interaction of dislocations with inhomogeneities. in Mathematical Theory of Dislocations, Mura T. (ed.), Am Soc Mech Engng, 1969

5 Christensen RM. Mechanics of Composite Materials, John Wiley & Sons Inc, 1979

6 Comninou M. The interface crack in a shear field. *J Appl Mech*, 1978, 45: 287～290

7 Lu MC, Erdogan F. Stress intensity factors in two bonded elastic layers containing cracks perpendicular to and on the interface —— I analysis. *Engng Frac Mech*, 1983, 18: 491～506

8 Gerasoulis A. The use of piecewise quadratic polynomials for the solution of sigular integral equations of Cauchy type. *Comput Math Appl*, 1982, 8: 15～22

9 Rice JR. Elastic fracture mechanics concepts for interfacialcracks. *J Appl Mech*, 1988, 55: 98～103

10 Comninou M. The interface crack. *J Appel Mech*, 1977, 44: 631～636

11 Dollar A. Steif PS. The branched crack problem revisited. *J Appl Mech*, 1991, 58: 584～586

附录

式(17)中的正则积分核

$$K_{1y}(x,x_0) = -\frac{1}{x+x_0} + \frac{\pi}{C}[F_2(x-x_0) - F_2(x+x_0)]$$

$$K_{2y}(x,x_0) = \frac{\pi}{C}[F_1(x-x_0) + F_1(x+x_0)]$$

$$K_{3y}(x,\zeta) = \frac{\zeta}{x^2+\zeta^2} - 2(1-\beta)\frac{x^2\zeta}{(x^2+\zeta^2)^2} + \frac{\pi}{C}F_3(x,\zeta)$$

$$K_{1xy}(x,x_0) = \frac{1}{x+x_0} + \frac{\pi}{C}[G_1(x-x_0) + G_1(x+x_0)]$$

$$K_{2xy}(x,x_0) = \frac{\pi}{C}[G_2(x-x_0) - G_2(x+x_0)]$$

$$K_{3xy}(x,\zeta) = \frac{x}{x^2+\zeta^2} - 2(1-\beta)\frac{x\zeta^2}{(x^2+\zeta^2)^2} + \frac{\pi}{C}G_3(x,\zeta)$$

$$K_{1x}(y,\zeta) = \frac{\alpha+\beta^2}{1-\beta^2}\frac{1}{y+\zeta} + \frac{\alpha-\beta}{1+\beta}\frac{2\zeta}{(y+\zeta)^2} - \frac{\alpha-\beta}{1+\beta}\frac{4\zeta^2}{(y+\zeta)^3} - \frac{\pi(1+\alpha)}{C(1-\beta^2)}H_3^{(1)}(y,\zeta)$$

$$K_{2x}(y,x_0) = -\frac{1+\alpha}{1+\beta}\frac{4y^3}{(x_0^2+y^2)^2} + \frac{(1+\alpha)(3-2\beta)}{1-\beta^2}\frac{2y}{x_0^2+y^2} - \frac{2\pi(1+\alpha)}{C(1-\beta^2)}H_1^{(1)}(-x_0,y)$$

$$K_{3x}(y,x_0) = \frac{(1+\alpha)(1-2\beta)}{1-\beta^2}\frac{2x_0}{x_0^2+y^2} - \frac{1+\alpha}{1+\beta}\frac{4x_0y^2}{(x_0^2+y^2)^2} - \frac{2\pi(1+\alpha)}{C(1-\beta^2)}H_2^{(1)}(-x_0,y)$$

MATRIX CRACK IN A COMPOSITE WITH WEAK INTERFACES

Luo Haian Wang Qishan

(*Department of Engineering Mechanics, Jiaotong University, Shanghai* 200030, *China*)

Abstract With two-dimensional elastic model, this paper studied the mechanism of the interaction between a matrix crack and weak interfaces in fiber-reinforced composites. The basic solutions of edge dislocations embedded in an anisotropic multi-layered medium were first derived. Then, by using them as kernels, a set of singular integral equations was established for a typical H-shaped defect in weak-interface composites. Finally, the effects of various microstructural parameters, such as interfacial bonding strength, residual stress, ratio of stiffness between the fiber and matrix on the stress distribution near the matrix crack were examined.

Key words composite material, weak interface, matrix crack