

论可压缩平板边界层线性稳定性的分歧¹⁾

赵耕夫

(天津大学力学系, 天津 300072)

摘要 Mack 和 Wazzan 关于可压缩平板边界层线性稳定性结论的主要分歧在于来流马赫数对粘性稳定性的影响. 本文充分考虑了空气热力学参数的影响, 并用配置点方法计算了绝热平板时间模式特征值问题. 数值结果表明粘性对第一模式只起稳定作用, $M = 3$ 粘性第二模式总是稳定的, 结论和 Mack 一致.

关键词 可压缩性, 稳定性, 分歧

引 言

高速可压缩边界层的稳定性是目前普遍关注的重要课题. 可压缩无粘性线性理论已有比较一致的结论, 而粘性理论则存在重要分歧. 问题归结为边界层外缘 M 数对粘性稳定性的影响. 按 Mack 的研究结果, 可压缩平板边界层的线性稳定性和不可压 Blasius 边界层有很大不同^[1]. 粘性对后者起不稳定作用, 对前者则起稳定作用. 从 $M = 0, R = 3\ 200$ 最大增长率 $\alpha_i = 0.00734$ 减小到 $M = 2.2, R = 600$, $\alpha_i = 0.000286$. 由于可压缩边界层内存在广义拐点 $(U'/T)' = 0$, 因此是纯无粘不稳定. 随着广义拐点向外移动, 无粘不稳定性随 M 数的增加而增大. 当边界层的某一部分平均流相对于扰动中性相速度为超音速时会出现多个不稳定模式. 其中第一模式相当于 TS 不稳定波, 而其他高阶模式则是反射于固壁和相对音速线之间的声波. Mack 已证明对二维问题而言, 粘性第二模式总是稳定的. 但是以上结论受到 Wazzan 等研究结果的挑战^[2]. 集中表现在: (1) Wazzan 发现当雷诺数充分大时, $M = 2.2$ 的中性曲线形状和不可压情况类似; (2) $M = 3$ 的第二模式在很低的雷诺数时也是不稳定性的; (3) Wazzan 发现 $M = 6$, 波角 50 度的第一模式的三维扰动存在两个不稳定区, 即 $R < 900$ 的粘性不稳定区和 $R > 1\ 600$ 的无粘不稳定区.

就粘性可压缩线性稳定性理论而言, 并不存在任何分歧. 不同的结果来源于数值方法和热力学参数的选取. Mack 用的是带正交化的四阶 Runge-Kutta 法, 变热力学参数, Wazzan 的数值方法为四点和五点差分, Sutherland 公式, 常数 Prandtl 数和等压比热. Reed 近来得到和 Mack 相同的结果^[3]. 以上结论都是按空间模式作出的. 本文将根据空气的实验数据^[4], 用四阶多项式拟合空气的粘性系数、热传导系数、Prandtl 数和等压比热随温度的变化, 并用精确的 Chebyshev 多项式的配置点方法求解时间模式线性稳定性问题, 同时也按 Wazzan 所用的热力学参数近似法计算同样问题, 以便确定是数值方法还是热力学关系导致了不同结论.

1 基本方程

可压缩流体流过半无限绝热平板. x 沿流动方向, y 为垂直方向坐标. 为求平均流的相似

¹⁾ 国家自然科学基金资助项目.

1994-07-29 收到第一稿, 1996-06-13 收到最后修改稿.

解, 我们采用 Illingworth 变换

$$\xi = \int_0^x \rho_e(x) \mu_e(x) U_e(x) dx = \xi(x), \quad \eta = \frac{U_e}{\sqrt{\xi}} \int_0^y \rho dy \quad (1)$$

其中 ρ_e, μ_e, U_e 分别是边界层外缘的密度、粘性系数和速度 对平板边界层而言 ρ_e, μ_e, U_e 与 x 无关, 平均流存在相似解 设无量纲平均流速和温度为

$$U = f'(\eta), \quad T = g(\eta) \quad (2)$$

则边界层的动量方程和能量方程化简为

$$(C_1 f'') + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (3)$$

$$(C_2 g'') + \frac{1}{2} P r C_p f g' = - P r C_1 (g - 1) M^2 f'^2 \quad (4)$$

绝热壁面的边界条件为

$$f(0) = f'(0) = g(0) = 0, f'(\infty) = g(\infty) = 1 \quad (5)$$

其中 $U = U^*/U_e, T = T^*/T_e, C_1 = \rho\mu/\rho_e\mu_e, C_2 = \rho k/(\rho_e k_e), P r = \mu_e C_{pe}/k_e, C_p = C_p^*/C_{pe}$ 为无量纲等压比热 M 为马赫数, 上标*表示有量纲参数, 下标 e 表示边界层外缘的流体参数

为求解平均流方程(3~5), 必须给出 $\mu^*, k^*, C_p^*, P r$ 与温度的函数关系 假定空气是完全气体, 以上热力参数只是温度的函数 根据实测数据, 用四阶多项式和最小二乘法拟和, $\mu^*, k^*, C_p^*, P r$ 与 T 的函数关系 图 1 为粘性系数的拟和曲线和 Sutherland 公式的比较 $T < 1000K$ 时, 两者吻合得很好, 但更高温度时 Sutherland 公式已偏离实测数值, k^* 拟和曲线性状和 μ^* 类似 图 2 为 $P r$ 数的拟和曲线 $T < 200K, P r$ 的数值变化较大, 在此范围内象文献[2]那样假定 $P r$ 为不变常数是 不适宜的 本文用四阶 Runge- Kutta 法求解平均流方程 为了比较, 取与文献[1, 2] 相同的总温 $T_0 = 305K$ 图 3 为平均流速分布 其中实线是用热力学参数多项式近似所算得的结果, 符号则是用 Sutherland 公式, 常数 $P r, C_p$ 所得到的结果 当 $M = 2.2$ 时两者基本符合, $M = 3$ 时常数 $P r, C_p$ 假定产生 10% 的误差 可以断定 M 数越高误差越大

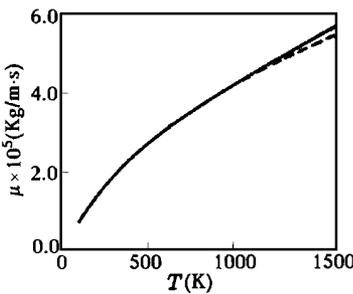


图 1 粘性系数和温度函数关系
Fig. 1 Viscosity coefficient vs temperature

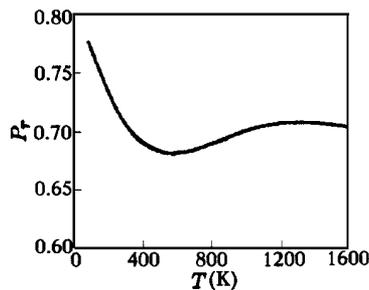


图 2 $P r$ 数与温度的函数关系
Fig. 2 Prandtl number vs temperature

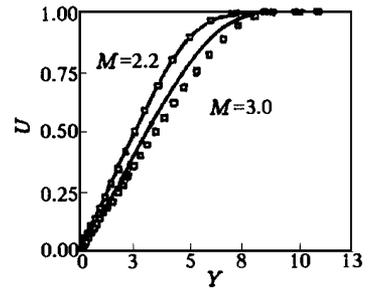


图 3 平均流速分布
Fig. 3 Meanflow velocity distribution

考虑平均流对无限小扰动的稳定性 为此, 取 $\rho_e, \mu_e, U_e, k_e, C_{pe}$ 及边界层特征厚度 $\delta = \sqrt{\nu x/U_e}$ 使三维可压缩 Navier- Stokes 方程无量纲化, 则 Reynolds 数 $R = \sqrt{U_e x}/\nu$ 设 $q =$

$q(U, T, P)$ 为平均流, $q_1 = (u_1, v_1, \omega, T_1, p_1)$ 为小扰动, 则瞬时流场可表示成

$$q(x, y, z, t) = q(x, y, z) + q_1(x, y, z, t) \quad (6)$$

其中 q_1 取 TS 波形式

$$q_1 = q_0(y) \exp\{i(ax + \beta z - \omega t)\} + c.c. \quad (7)$$

$q_0 = (u_0, v_0, \omega, T_0, p_0)$. a, β 分别为流向和横向波数, ω 为频率. 采用局部平行假设, 忽略平均流的垂直速度分量. 因而平均流各量只是垂直坐标 y 的函数, 即 $q = q(y)$. 由于 μ, k, Pr, Cp 只是温度的函数, 而 T_1 是无限小量, 因此粘性系数按 Taylor 展成

$$\mu_t = \mu + (d\mu/dT)T_1 \quad (8)$$

把(6)~(8)代入无量纲 Navier-Stokes 方程, 并取 q_1 的线性项可得如下线性扰动方程组:
连续方程

$$-i\rho(\omega - aU - \beta V)(p_0/P - T_0/T) + i\rho(\alpha u_0 + \beta v_0) + D(\rho v_0) \quad (9)$$

动量方程

$$\begin{aligned} & i\rho(\omega - \alpha U - \beta V)u_0 + \rho DU v_0 + i\alpha p_0 + \frac{\alpha^2(2\mu + \lambda)u_0}{R} - \frac{d\mu/dT D T_0 u_0}{R} - \\ & \frac{\mu D^2 u_0}{R} + \frac{\mu \beta^2 u_0}{R} - \frac{i\alpha(\lambda + \mu)D v_0}{R} - \frac{i\alpha d\mu/dT D T_0 v_0}{R} + \frac{\alpha \beta(\lambda + \mu)\omega}{R} - \\ & \frac{(DU d^2\mu/dT^2 D T + d\mu/dT D^2 T)T_0}{R} - \frac{DU d\mu/dT D T_0}{R} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & -i\rho(\omega - aU - \beta V)v_0 + D p_0 - \frac{ia(\lambda + \mu)D u_0}{R} - \frac{i\alpha d\lambda/dT D T_0 u_0}{R} + \\ & \frac{(a^2 + \beta^2)\mu v_0}{R} - \frac{(2d\mu/dT + d\lambda/dT)D T_0 v_0}{R} - \frac{(2\mu + \lambda)D^2 v_0}{R} - \frac{i\beta(\lambda + \mu)D \omega}{R} - \\ & \frac{i\beta d\lambda/dT D T_0 \omega}{R} - \frac{i(\alpha DU + \beta DV)d\mu/dT T_0}{R} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & -i\rho(\omega - \alpha U - \beta V)\omega + \rho DW v_0 + i\beta p_0 + \frac{\beta(2\mu + \lambda)\omega}{R} - \frac{d\mu/dT D T_0 \omega}{R} - \\ & \frac{\mu D^2 \omega}{R} + \frac{\mu \alpha^2 \omega}{R} - \frac{i\beta(\lambda + \mu)D v_0}{R} - \frac{i\beta d\mu/dT D T_0 v_0}{R} + \frac{\alpha \beta(\lambda + \mu)U}{R} - \\ & \frac{(DW d^2\mu/dT^2 D T + d\mu/dT D^2 T)T_0}{R} - \frac{DW d\mu/dT D T_0}{R} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

能量方程

$$\begin{aligned} & -iC_p \rho(\omega - \alpha U - \beta V)T_0 + C_p \rho D T_0 v_0 + (\gamma - 1)M^2 i(\omega - \alpha U - \beta V)p_0 - \\ & \frac{(\gamma - 1)M^2 \varphi}{R} + \frac{\kappa(\alpha^2 + \beta^2)T_0}{R Pr} - \frac{2d\kappa/dT D T_0}{R Pr} - \frac{\kappa D^2 T_0}{R Pr} - \\ & \frac{(d\kappa/dT D^2 T + d^2\kappa/dT^2 [D T]^2)T_0}{R Pr} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

边界条件为

$$u_0 = v_0 = w_0 = T_0 = 0 \quad y = 0, \quad (14)$$

其中 $D = d/dy$, $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ 耗散函数

$$\mathcal{Q} = 2\mu DUD u_0 + 2\mu i\alpha DU v_0 + 2\mu DW D \omega + 2\mu i\beta DW v_0 + d\mu/dT ([DU]^2 [DW]^2) T_0$$

可压缩条件下, 由于不存在 Squire 变换, 以上方程实际上是八阶常微分主程组, 只须如 (14) 式给出的边界条件. 对不可压情况上述方程可简化为四阶的 Orr-Sommerfield 方程. 尽管平均流是绝热的, 但温度扰动量的边界条件仍可写成等温形式. 这是因为平均流和温度扰动的时间尺度是完全不同的. Morkovin 分析了 Morkovin, Phinney 及 Kistler 的实验数据后, 发现超音速边界层中总温的脉动量比静温的脉动量小得多^[4]. 由此可导出静温脉动量和速度脉动之间存在关系式 $T \sim -uu/C_p$. 在壁面上 $u = 0$, $u' = 0$ 因此 $T = 0$.

齐次方程 (9~13) 和齐次边界条件 (14) 构成一特征值问题. 给定 R 并解得平均流之后, 我们得到一色散关系

$$\omega = \omega(\alpha, \beta, R) \quad (15)$$

时间增长模式, α, β 为实数, ω 为复数, 其虚部 ω 代表小扰动的时间增长率, 实部 ω 则为频率. 空间模式, ω 为实数, α, β 的虚部为小扰动的空间增长率. 本文计算平板边界层时间模式特征值问题, 取 $w = 0$.

为求解特征值问题, 我们采用变换 $\eta = y_0/(y + y_0)$ 把区间 $[0, \infty)$ 变为 $[1, 0]$. 然后用 Chebyshev 多项式的配置点方法进行数值求解. 常数 y_0 的选取应使得有半数的配置点位于动量损失厚度之内.

2 数值结果

文献 [1, 2] 关于 $M = 2.2$ 第一模式中中性曲线的主要区别表现在曲线的上一分支随 R 的变化趋势. 图 4 给出了我们用热力学参数的不同近似所算得的 $M = 2.2$ 第一模式中中性曲线. 其中实线是用热力学参数多项式近似所得, 而符号代表的结果所用的热力学参数和文献 [2] 相同. 但是, 不管那种情况, R 越大中性曲线上分支对应的波数也越大, 并逐渐趋向于无粘性结果. 这一特性和文献 [1] 的图 1 相同. 它所反应的物理实质是粘性对可压缩边界层的稳定作用, 最不稳定第一模式应是无粘性的. 文献 [2] 给出的中性曲线上分支随 R 的变化趋势正好和图 4 相反, 而类似于不可压缩情况. 正如 Mack 指出的, 由于二阶稳定性方程在相对超音速区内是双曲型, 允许有无限多个离散的特征值. 第二模式是最低频的高阶模式. 作为二维波它是无粘最不稳定的, 其最大增长率为 $-a_i = 0.00268$. Mack 已证明高阶模式不会有粘性不稳定性. Wazzan 给出了不同结论. 文献 [2] 得到 $M = 3$ 时第二模式最大增长率 $-a_i = 0.0203$ ($R = 258$), 这一数值是无粘最大增长率的 7.6 倍. 图 5 给出了 $M = 3$ 第二模式时间增长率和波数的函数关系曲线. 其中符号表示的结果是按 Sutherland 公式, 常数 P_r, C_p 所得, 实线是本文参数近似得到的结果. 尽管据动的增长率随 R 的增大而增大, 但直到 $R = 4000$ 也没发现不稳定的扰动, 何况更小的雷诺数了. 这一事实证明不管用何种热力学参数近似, $M = 3$ 粘性第二模式总是衰减的, 与 Mack 的结论完全一致.

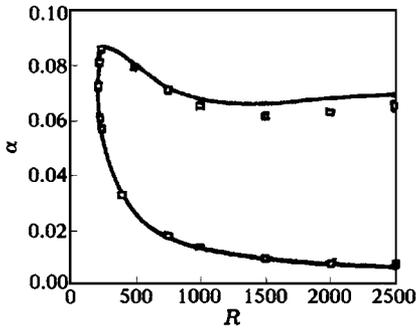
图4 绝热平均第一模式中中性曲线 $M = 2.2$

Fig. 4 Neutral curve for the first mode

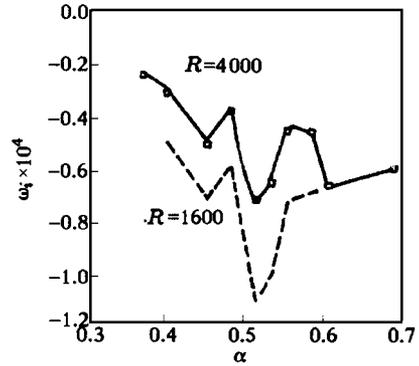
A adiabatic flat plate $M = 2.2$ 

图5 绝热平板第二模式增长率与波数的关系

Fig. 5 Growth rates for the second mode

vs. the wave number $M = 3.0$

如上所述,文献[2]发现 $M = 6$, 波角 50° 三维第一模式有两个不稳定区,文献[1]给出了 $M = 6$ 相应扰动从 $R = 200$ 直到无粘性的增长率与波数关系曲线,增长率随 R 的增大而增大,不存在粘性不稳定区,因此粘性对可压缩三维扰动也是起稳定作用.文献[1, 2]对同一问题的计算结果在数值上也有显著差别.如[1]得到的最低临界雷诺数近三倍于文献[2]的数值.虽然两者在 $R = 1500$ 时的增长率一致,但所对应的频率却不相同.文献[2]得到 $R = 300$ 上分支中性点频率比文献[1]的数值高出 75% ,值得注意的是文献[2]报告的 $R = 300$ 的增长率甚至大于 $R = 1500$ 的增长率.这和粘性的稳定作用是矛盾的.由于很高 M 数时 Chebyshev 式配置点方法已不是很有用的数值方法.本文没有给出相应的结果,但有一点是明确的 $T_0 = 305, M = 6$, 按本文近似 $Pr = 0.81$, 而文献[2]取 $Pr = 0.7$. 这也是产生数值误差的原因之一.

3 结论

本文给出了平板可压缩边界层线性稳定性的独立数值结果,其结论和文献[1]一致. [1, 3]和本文的工作,证明不管是时间模式还是空间模式, Mack 有关可压缩边界层线性稳定性的结论都是正确的.同时本文结果也证明不同的结果并非产生于热力学参数的近似方法.但是对热力学参数的不同近似也会对平均流和扰动的增长率产生较大影响.本文给出的热力学参数近似是计算高 M 数稳定性问题的有效方法.

参 考 文 献

- 1 Mack LM. Remarks on disputed numerical results in compressible boundary layer stability theory. *Phys Fluids*, 1984, 27(2): 342~347
- 2 Wazzan AR, Taghavi H, Keltner G. The effect of Mach number on the spacial stability of adiabatic flat plate flow to oblique disturbances. *Phys Fluids*, 1984, 27(2): 331~341
- 3 Reed HL. Compressible boundary layer stability theory. *Phys Fluids*, 1990, A2(8): 1341~1349
- 4 Cebeci T, Bradshaw P. 对流传热的物理特性和计算. 北京: 清华大学出版社, 1988

ON THE DISPUTE WITH REGARD TO VISCOUS LINEAR
STABILITY OF COMPRESSIBLE BOUNDARY
LAYER FLOW OVER FLAT PLATE

Zhao Gengfu

(Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract The major dispute between Mack's and Wazzan's results of the linear instability for flat plate boundary layer lies in the effect of free stream Mach number on the viscous instability. In the paper, taking influence of the air thermodynamic properties into account a temporal eigenvalue problem of an adiabatic flat plate is calculated by a collocation technique. The numerical results indicate that the viscosity is only stabilizing for the first mode and the second viscous mode is always stable at $M = 3$. It is consistent with Mack's conclusion.

Key words compressibility, stability, dispute