第 28 卷 第 6 期
1996 年 11 月

ACTA MECHANICA SINICA

Vol 28, No. 6
Nov., 1996

一类结构的 (n- 3) 重根及其非退化性[1)]

任革学　　郑兆昌

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要　基于陀螺模态综合法, 从总装阵的块式结构出发, 构造性地证明了具有 n 片桨叶的旋翼型结构陀螺特征值问题存在一系列的 (n- 3) 重特征根, 得到了对应的 (n- 3) 个完备的振型　结论进而推广到有阻尼的旋翼型结构　继续研究证明过程表明: 结论适用于更广泛的一类具有重复子结构的结构系统, 结果表明这类结构几何上的重复性或对称性导致的重根不会引入退化性　不同类型的算例验证了所得到的解析结果　本文还试图说明动力子结构法的定性性质保持特性是值得继续探讨的课题

关键词　动力子结构法, 重复子结构, 重特征根, 非退化

引　言

工程中常见关于空间或其自身具有对称性的结构, 这种结构中的某些类型会导致重根的出现, 例如方形或圆形截面的空间梁、方形板膜、圆柱形筒等, 在两个方向相同的边界条件下就会有二重特征根　然而, 在应用数值方法求解或采用实验研究特征值问题时, 对于得到的一些密集或十分相近特征根, 就很难断定这些结果是问题的重根还是本身即为不同的特征根; 另外, 重根对应不变子空间的性质, 还使得有些计算特征根的数值方法易于漏掉重根的一重或更多, 例如Lanczos 法, 无论初始矢量如何选取, 它在重根的不变子空间上只能有一个有效投影, 理论上的Lanczos 过程[1], 重根只能是一重接一重地收敛于投影系统, 而且新一重特征根必须在Lanczos 过程发生中断后, 重新选取与以前Lanczos 矢量正交的新矢量继续Lanczos 过程, 才可能使重根逐重收敛　Lanczos 过程[2,3]在有限字长运算下与理论上的不同, 但重根仍然是逐重收敛　因此, 这类减缩型算法成为可靠方法的前提是: 必须具备计算并有检验漏根的手段, 尤其对于有重根的问题　总之, 对于理解工程结构的固有特性及建立计算具有重特征根的有效数值方法, 研究重根产生机制及有关问题具有重要的意义

近几十年来得到充分发展的模态综合技术或动态子结构方法[4~6]作为减缩方法, 在减缩过程中可以根据结构的几何特点等划分子结构, 经减缩后再按照子结构的连接方式装配成系统广义坐标描述的运动方程　减缩后的系统矩阵具有明显的块结构, 不论在每个子结构中保留多少广义坐标, 装配系统的块结构形式保持不变, 这些块结构与表征内部及界面运动的广义坐标相对应, 因此这种总装而成的系统矩阵所具有的块结构特点恰好是系统几何特性的数学体现　Lanczos 法则与动力子结构方法不同, 不论原来系统具有什么样的结构

1) 国家自然科学基金和教委博士点基金资助项目.
本文系常务编委姚振汉教授推荐
1996-04-01收到

特点, 减缩后的系统矩阵总是三对角形式, 不仅没有可以观察的结构特点, 而且在计算机上算出的三对角阵几乎都是不可约的[3], 即便系统具有重根也是如此 因此, 由三对角阵所得到的重根只能是近似的 动力子结构法具有保留原系统定性性质于减缩系统的性质, 或者说, 减缩后的系统在各子结构的广义坐标中保持原系统的拓扑结构, 所以, 应用子结构法会有这样的效果, 重根可能数值上不是十分准确, 但其重数确是原系统相应特征根的重数, 这种性质与Lanczos法等存在漏根的可能形成鲜明的对比 综上所述, 子结构法所具有的定性保持性质对于发展新的数值方法具有重要的参考价值, 值得深入研究

引发本文研究的直接原因是: 在计算一个四片桨叶的旋翼系统旋转工况下的陀螺特征值时[7], 发现其特征值四个一族, 比较接近, 无法断定它们是否为重根 郑兆昌等提出的陀螺模态综合技术即状态空间中的动力子结构法[8], 不仅具有物理空间中动力子结构法的优点, 更为重要的是采用了实模态减缩变换, 避免使用复模态 为了揭示旋翼系统重根的问题, 本文采用陀螺模态综合技术[8], 证明了有 n 片桨叶的旋翼系统存在一系列 $(n-3)$ 重根[9,10]. 进一步的研究表明, 对于非旋转、有阻尼的旋翼系统结论仍然成立, 并且适用于更为广泛的一类结构

1 旋翼系统的陀螺模态综合

为研究旋翼系统重根的问题, 简要介绍建立陀螺模态综合系统总装阵的过程, 并讨论动力子结构法中系统矩阵的结构, 以及对称性保持特性 图1的旋翼系统是由 n 个均匀配置的桨叶及一个柔性的旋翼轴构成, 系统以定常角速度 Ω 旋转 将 n 片桨叶分别定义为第 $r=1, \cdots, n$ 个子结构, 旋翼轴定义为第 $r=n+1$ 个子结构 采用空间梁单元离散, 第 r 个子结构在旋转的局部坐标架下无阻尼运动方程

$$M^r \ddot{x}^r + G^r \dot{x}^r + K^r x^r = f^r + \bar{f}^r \qquad (r=1, \cdots, n+1)$$

式中, M^r, G^r, K^r 为质量阵、陀螺阵和刚度阵, f^r, $\bar{f}^r$ 为外力和界面力 可以按下标 i, j 划分内部和界面坐标并写成分块形式

$$\begin{bmatrix} M^r_{ii} & M^r_{ij} \\ M^r_{ji} & M^r_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}^r_i \\ \ddot{x}^r_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G^r_{ii} & G^r_{ij} \\ G^r_{ji} & G^r_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}^r_i \\ \dot{x}^r_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K^r_{ii} & K^r_{ij} \\ K^r_{ji} & K^r_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^r_i \\ x^r_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{f}^r_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f^r_i \\ f^r_i \end{Bmatrix} \tag{1}$$

将 (1) 写成状态空间运动方程

$$\begin{bmatrix} A^r_{ii} & A^r_{ij} \\ A^r_{ji} & A^r_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}^r_i \\ \dot{y}^r_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B^r_{ii} & B^r_{ij} \\ B^r_{ji} & B^r_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y^r_i \\ y^r_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{F}^r_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F^r_i \\ F^r_i \end{Bmatrix} \tag{2}$$

$$A_{kl}^{r}=\begin{bmatrix}G_{kl}^{r} & M_{kl}^{r}\\ -M_{kl}^{r} & 0\end{bmatrix},\quad B_{kl}^{r}=\begin{bmatrix}K_{kl}^{r} & \\ & M_{kl}^{r}\end{bmatrix},$$

$$y_{k}^{r}=\begin{Bmatrix}x_{k}^{r}\\ \dot{x}_{k}^{r}\end{Bmatrix},\quad \overline{F}_{k}^{r}=\begin{Bmatrix}\overline{f}_{k}^{r}\\ 0\end{Bmatrix},\quad F_{k}^{r}=\begin{Bmatrix}f_{k}^{r}\\ 0\end{Bmatrix}\quad (k, l= i, j)$$

矩阵A_{kl}^{r}是反对称的，B_{kl}^{r}是正定的

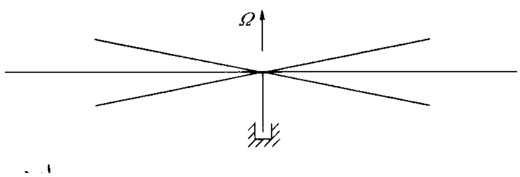


图1 (a) 旋翼系统模型

Fig. 1 (a) A Rotarywing Model

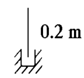


图1 (b) 旋翼轴模型

g 1 (b) The Shaft Model

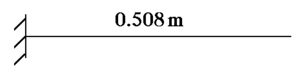


图1 (c) 单片桨叶模型

Fig 1 (c) The Blade Model

在陀螺模态综合法中，r-子结构状态变量与广义坐标Q^{r}之间的变换关系取为

$$\begin{Bmatrix}y_{i}^{r}\\ y_{j}^{r}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_{s} & \Phi_{c}\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q^{r}\\ y_{j}^{r}\end{Bmatrix}=\Psi^{r}Q^{r}\,(r=1,\cdots,n+1) \tag{3}$$

式中，$[\Phi_{s}]_{2m_{i}^{r}\times 2m_{s}^{r}}$为固定界面主模态即广义 Schur 矢量，$[\Phi_{c}]_{2m_{i}^{r}\times 2m_{j}^{r}}$为约束模态，其中$m_{i}^{r}$，$m_{j}^{r}$，$m_{s}^{r}$分别是第 r 个子结构的内部、界面自由度和保留主模态数，满足关系

$$\Phi_{s}^{T}A_{ii}^{r}\Phi_{s}=\text{block-diag}\{\Lambda_{1}^{r},\Lambda_{2}^{r},\cdots,\Lambda_{m_{s}^{r}}^{r}\}=\Lambda^{r},\quad \Lambda_{k}^{r}=\begin{bmatrix}0 & -\lambda_{k}^{r}\\ \lambda_{k}^{r} & 0\end{bmatrix}\quad (k=1,\cdots,m_{s}^{r}) \tag{4}$$

$$\Phi_{s}^{T}B_{ii}^{r}\Phi_{s}=I^{r} \tag{5}$$

$$\Phi_{c}=\begin{bmatrix}(K_{ii}^{r})^{-1}K_{ij} & \\ & (K_{ii}^{k})^{-1}K_{ij}\end{bmatrix} \tag{6}$$

方程 (1) 经变换 (3) 得子结构的方程为

$$\overline{A}^{r}\dot{Q}^{r}+\overline{B}^{r}Q^{r}=\widetilde{F}_{j}^{r}+\overline{F}^{r}\,(r=1,\cdots,n+1) \tag{7}$$

式中

$$\overline{A}^{r}=\Psi^{rT}A^{r}\Psi^{r}=\begin{bmatrix}\Lambda^{r} & A_{12}^{r}\\ \overline{A}_{21}^{r} & \overline{A}_{21}^{r}\end{bmatrix},\quad \overline{B}^{r}=\Psi^{rT}B^{r}\Psi^{r}=\begin{bmatrix}I^{r} & \overline{B}_{12}^{r}\\ \overline{B}_{21}^{r} & \overline{B}_{21}^{r}\end{bmatrix}$$

$$\widetilde{F}_{j}^{r}=\Psi^{rT}\begin{Bmatrix}0\\ F_{j}^{r}\end{Bmatrix},\qquad \overline{F}^{r}=\Psi^{rT}\begin{Bmatrix}F_{i}^{r}\\ F_{j}^{r}\end{Bmatrix}$$

各子结构在连接处（位移矢量为 y_h）界面位移协调和界面力平衡条件

$$T_1 y_j^1 = T_2 y_j^2 = \cdots = T_n y_j^n = T_{n+1} y_j^{n+1} = y_h \tag{8a}$$

$$\sum_{r=1}^{n+1} T_r \widetilde{F}_j^r = 0 \tag{8b}$$

可得系统总装配方程

$$\widetilde{A}\,\dot{\widetilde{y}} + \widetilde{B}\,\widetilde{y} = F \tag{9}$$

其中

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} \Lambda^1 & & & & \overline{A}_{12}^1 T_1^{\mathrm{T}} \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \Lambda^n & & \overline{A}_{12}^n T_n^{\mathrm{T}} \\ & & & \Lambda^{n+1} & \overline{A}_{12}^{n+1} T_{n+1}^{\mathrm{T}} \\ \text{skew} & & & & \sum_{r=1}^{n+1} T_r \overline{A}_{22}^r T_r^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{bmatrix} I^1 & & & & \overline{B}_{12}^1 T_1^{\mathrm{T}} \\ & \ddots & & & \\ & & I^n & & \overline{B}_{12}^n T_n^{\mathrm{T}} \\ & & & I^{n+1} & \overline{B}_{12}^{n+1} T_{n+1}^{\mathrm{T}} \\ \text{sym.} & & & & \sum_{r=1}^{n+1} T_r \overline{B}_{22}^r T_r^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{y} = \begin{Bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^{n+1} \\ y_h \end{Bmatrix}, \quad T_r = \begin{bmatrix} \overline{T}_r & & & \\ & \overline{T}_r & & \\ & & \overline{T}_r & \\ & & & \overline{T}_r \end{bmatrix}, \quad \overline{T}_r = \begin{bmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r & 0 \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (r = 1, \cdots, n)$$

其中，T_r 是第 r 个桨叶根部状态矢量变换到整体坐标 y_h 的转换矩阵，θ_r 是第 r 个桨叶的方位角. 令 $\theta_1 = 0$，对于均匀配置的桨叶，第 r 片桨叶的方位角 $\theta_r = (r-1)2\pi/n$.

显然，总装阵 $\widetilde{A}$ 及 $\widetilde{B}$ 具有子结构级的块式结构. 这些块是旋翼系统的周期旋转对称特性的体现. 事实上，桨叶子结构保留相同主模态数，即 $m_s^1 = m_s^2 = \cdots = m_s^n$，$\widetilde{A}$ 及 $\widetilde{B}$ 的块具有以下性质

$$\Lambda^1 = \Lambda^2 = \cdots = \Lambda^n,\ \overline{A}_{12}^1 = \overline{A}_{12}^2 = \cdots = \overline{A}_{12}^n \tag{10a}$$

$$I^1 = I^2 = \cdots = I^n,\ \overline{B}_{12}^1 = \overline{B}_{12}^2 = \cdots = \overline{B}_{12}^n \tag{10b}$$

$$T_1 = T_h,\ T_{r+1} = T T_r,\ r = 1, \cdots, n-1,\ T = T_r \big|_{\theta_r = 2\pi/n} \tag{11}$$

由此可见，只要各对称子结构保留相同的主模态，则原系统的旋转对称性质在减缩方程中得到保持，并与各子结构保留多少个主模态无关. 其结果是对被保留的主模态而言，总装方程与相应原系统的特征值具有相同的几何特征.

2 旋翼型结构特征值问题的（$n-3$）重根及其振型

基于动力子结构法所建立的系统方程所具有的子结构级的块结构形式，导出了下面单片桨叶与旋翼系统重特征根之间关系的结论.

命题1　由 n $(n\geq 3)$ 片均匀配置的桨叶和一个弹性的旋翼轴构成的旋翼系统，对应单片桨叶（固定界面）的每个特征根，旋翼系统具有一个相同的至少是 $(n-3)$ 重的特征根

证　在（3）式中取全部的主模态进行满秩变换，相应于（9）的 $2N$ 阶特征方程可写为

$$(\tilde{A}+\mu\tilde{B})\tilde{y}=0 \tag{12}$$

由线性代数理论知，特征方程（12）等价于原旋翼系统特征方程　若 μ 取某值，$(\tilde{A}+\mu\tilde{B})$ 的秩为 s $(s<2N)$，则 μ 是（12）的 $(2N-s)$ 重的特征根　试取 μ 为单片固定界面桨叶的第 k 个特征根 $i\lambda_k$，则（12）的特征行列式为

$$\left|\tilde{A}+i\lambda_k\tilde{B}\right|=\begin{vmatrix} (i\lambda_k I^1+\Lambda^1) & & & & (\bar{A}^1_{12}+i\lambda_k\bar{B}^1_{12})T_1^{T} \\ & \ddots & & & \\ & & (i\lambda_k I^n+\Lambda^n) & & (\bar{A}^n_{12}+i\lambda_k\bar{B}^n_{12})T_n^{T} \\ & & & (i\lambda_k I^{n+1}+\Lambda^{n+1}) & (\bar{A}^n_{12}+i\lambda_k\bar{B}^n_{12})T_{n+1}^{T} \\ T_1(\bar{A}^1_{21}+i\lambda_k\bar{B}^1_{21}) & \cdots & T_n(\bar{A}^n_{21}+i\lambda_k\bar{B}^n_{21}) & T_{n+1}(\bar{A}^{n+1}_{21}+i\lambda_k\bar{B}^{n+1}_{21}) & \sum_{r=1}^{n+1}T_r(\bar{A}^r_{22}+i\lambda_k\bar{B}^r_{22})T_r^{T} \end{vmatrix} \tag{13}$$

由 $(10a-b)$ 知(13) 行列式的前 n 个对角块 $(i\lambda_k I^r+\Lambda^r)$ 是相同的，且第 r $(r=1,\cdots,n)$ 个对角块的第 k 个 2×2 对角块为 $\begin{bmatrix} i\lambda_k & -\lambda_k^r \\ \lambda_k^r & i\lambda_k \end{bmatrix}$．对 $r=1,\cdots,n$，$(\bar{A}^r_{12}+i\lambda_k\bar{B}^r_{12})$ 也是相同的　设 N_b 及 N_h 分别为桨叶和旋翼轴内部自由度，将(13) 中第 $[2(r-1)N_b+2k-1]$ 行的 $i=\sqrt{-1}$ 倍加到 $[2(r-1)N_b+2k]$ 行上，则对 $r=1,\cdots,n$，行列式的第 $[2(r-1)N_b+2k]$ 行的前 $[n\times 2N_b+2N_h]$ 列为零，所以(13) 中 $[2(r-1)N_b+2k]$ 行之间的线性相关性等价于矩阵 $S(\bar{A}^r_{12}+i\lambda_k\bar{B}^r_{12})T_r^{T}$ $(r=1,\cdots,n)$ 的第 $2k$ 行之间的线性相关性，其中 $S=block\text{-}diag[\Lambda_1,\cdots,\Lambda_k,\cdots,\Lambda_{N_b}]$，$S$ 中除 $\Lambda_k=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix}$ 外，其余对角块都是 2×2 单位阵；由于各 $(\bar{A}^r_{12}+i\lambda_k\bar{B}^r_{12})$ $(r=1,\cdots,n)$ 都相同，故 $S(\bar{A}^r_{12}+i\lambda_k\bar{B}^r_{12})T_r^{T}$ 第 $2k$ 行的相关性决定于 T_r $(r=1,\cdots,n)$ 的相关性　由式 T_r 的表达式可看出，如果对某一组 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 满足

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cdots & \cos\theta_n \\ \sin\theta_1 & \sin\theta_2 & \cdots & \sin\theta_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix}=0 \tag{14}$$

则必有

$$\sum_{r=1}^{n}\alpha_r T_r^{T}=0 \tag{15}$$

方程(14) 中 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的系数矩阵是 $3\times n$ 实矩阵，所以(14) 的线性无关解至少为 $(n-3)$

个，矩阵$(\tilde{A}+i\lambda_k\tilde{B})$的秩$s\leq[2N-(n-3)]$. 所以$i\lambda_k$至少是旋翼系统的$(n-3)$重根. 证毕.

命题2　旋翼系统的$(n-3)$重特征根对应的每个整体振型是：旋翼轴保持静止，而每片桨叶完全等同于根部固定情况下的振型. 但各片桨叶的运动保持由(14)的解所规定的比例. (14)的$(n-3)$个解对应$(n-3)$重根的完备的振型.

证　将命题中所述的特征值及相应的振型代入特征方程(12)并考虑(15)即可验证.

作为旋转旋翼型结构的特例，对于不旋转($\Omega=0$)的旋翼型结构，上述结论仍然成立.

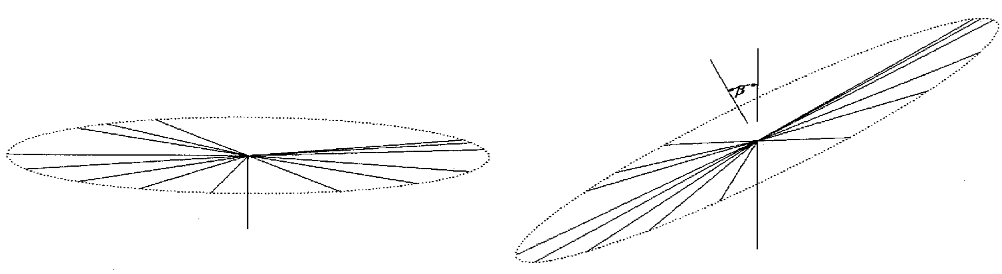
命题3　若每片桨叶还具有相同的阻尼特性，则单片桨叶固定界面的每一个特征值是整个系统的$(n-3)$重根，且单片桨叶的每一个振型都对应整个系统相应$(n-3)$重根的$(n-3)$个振型，由命题2中的方法确定.

命题3的证明可借助于状态空间中复模态综合技术，与命题1，2的证明过程类似(略). 以上命题表明重复结构重复性引起的重根不会引入亏损或是退化的.

从物理角度分析，若对某阶模态，来自各桨叶的作用力在连接处平衡，则尽管轴的弹性存在，但它不参与这阶模态，也就是桨叶与根部固定时具有相同的动力特征，这时单片桨叶的固有频率也就表现为旋翼系统的固有频率.

3　具有$(n-3)$重根的结构类型

仔细观察上节命题的证明过程便可发现，并非所有旋翼型结构的特点都在证明中用到了或是必须的，例如：1) 各桨叶的均匀配置；2) 子结构$(n+1)$的方位角T^{n+1}；3) 对接处是一个节点，对于多个对接节点，只要在T_r $(r=1, \cdots, n+1)$的对角线上相应地增加$\bar{T}_r$，而不影响命题的证明. 所以所得到的结论对于图2(a)，2(b)及图3中所示结构仍然成立. 总之，若一个结构上具有n个通过单轴旋转易位的重复子结构，且这n个重复子结构仅通过旋转易位轴上对接处(部分或全部)与结构上的其它部分相连接，只要每个重复子结构在局部坐标系下运动方程一样，则不论重复子结构是否关于旋转易位轴均匀分布，重复子结构在对接处固定下的每一个特征根都是整个结构的$(n-3)$重根；相应于重复子结构的每一个振型，整个结构都有由上节命题2确定的$(n-3)$个阵型与之对应，也就是说这种由于几何上的重复或对称所导致的重根不会引入新的退化性.



(a)　　　　(b)

图2

Fig. 2

4 算　例

例1　为了验证解析结果及算法而构造的旋翼系统计算模型见图1, 图2, 本算例中采用动力子结构法, 陀螺Arnoldi法和SRR-子空间迭代法计算得到所有的固有频率结果都一致 见表2, 表3 (a~ c), 表4, 表5 (a). 从本文的解析结果知对于具有4, 6, 9, 40片桨叶的系统单片桨叶的每阶固有频率都分别对应整系统的1重 (单根), 3重, 6重及37重的固有频率, 对此从表2, 表3 (a~ c), 表4, 表5 (a) 计算结果中得到完全证实, 并且可用于考证各种算法对重根的效率 在动力子结构法中, 桨叶子结构保留6阶主模态, 旋翼轴子结构保留3阶主模态, 表3 (b) 是一个6片非均匀分布桨叶旋翼系统前24阶固有频率, 各桨叶的方位角分别取: 0°, 45°, 105°, 120°, 240°, 320°. 表3 (c) 是非均匀桨叶且旋转面具有倾角的结构 (图2 (b)) 的结果, 其桨叶的不均匀同表3 (b) 中参数, 倾角 β = 30°.

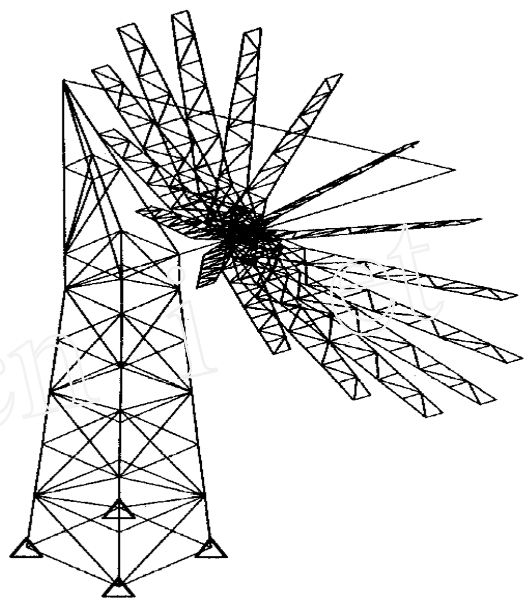


图3

Fig 3

桨叶的截面参数: $E = 2.1\times10^{11}$ Pa, $\gamma = 0.3$, $J_y = 1.167\times10^{-11} m^4$, $J_z = 1.167\times10^{-8} m^4$, $\rho_l = 1.13\times10^{-1}$ kg/m, $A = 2.231\times10^{-5} m^2$.

表1　桨叶的前6阶固有频率 (rad/s)

Table 1　The first 6 frequencies of the blade (rad/s)

80.369 1	494.746	1 230.09	1 998.03	2 328.57	3 792.85

旋翼轴的截面参数: $E = 2.1\times10^{12}$ Pa, $\gamma = 0.3$, $J_y = J_z = 1.167\times10^{-8} m^4$, $\rho_l = 1.13\times10^{-1}$ kg/m, $A = 2.231\times10^{-5} m^2$. 系统的旋转速度为 $\Omega = 1\ 200$ rpm.

表2　4片桨叶旋翼系统前24阶固有频率 (rad/s)

Table 2　The first 24 frequencies of the 4-bladed rotarywing model (rad/s)

80.348 5	80.348 5	80.367 2	80.369 1	494.684	494.684	494.735	494.746
1 229.91	1 229.91	1 230.04	1 230.09	1 477.94	1 957.26	1 973.66	1 998.04
2 328.22	2 328.23	2 328.38	2 328.57	3 792.17	3 792.17	3 792.40	3 792.85

表3 (a)　6片桨叶旋翼系统前24阶固有频率 (rad/s)

Table 3 (a)　The first 24 frequencies of the 6-bladed rotarywing model (rad/s)

80.338 2	80.338 3	80.366 3	80.369 1	80.369 1	80.369 1	494.653	494.653
494.730	494.746	494.746	494.746	1 229.81	1 229.82	1 230.01	1 230.09
1 230.09	1 230.09	1 333.40	1 935.46	1 960.67	1 998.04	1 998.04	1 998.04

表3（b） 6片桨叶（非均匀分布）旋翼系统前24阶固有频率（rad/s）

Table 3（b） The first 24 frequencies of 6-bladed（non-isotropic）rotarywing model（rad/s）

80.016 2	80.099 2	80.345 8	80.369 1	80.369 1	80.369 1	493.579	493.869
494.620	494.746	494.746	494.746	539.375	1 219.47	1 225.43	1 229.41
1 230.09	1 230.09	1 230.09	1 337.40	1 546.17	1 998.04	1 998.04	1 998.04

表3（c） 6片桨叶（非均匀分布，$\beta=30°$）旋翼系统前24阶固有频率（rad/s）

Table 3（c） The first 24 frequencies of 6-bladed（non-isotropic，$\beta=30°$）rotarywing model（rad/s）

79.917 2	80.129 0	80.316 2	80.369 1	80.369 1	80.369 1	492.901	493.973
494.514	494.746	494.746	494.746	561.884	1 216.33	1 226.00	1 229.26
1 230.09	1 230.09	1 230.09	1 425.84	1 634.78	1 998.04	1 998.04	1 998.04

表4 9片桨叶旋翼系统前36阶固有频率（rad/s）

Table 4 The first 36 frequencies of 9-bladedrotarywing model（rad/s）

80.322 8	80.322 8	80.364 9	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1
494.605	494.607	494.723	494.746	494.746	494.746	494.746	494.746	494.746
1 178.66	1 229.66	1 229.68	1 229.97	1 230.09	1 230.09	1 230.09	1 230.09	1 230.09
1 230.09	1 901.15	1 940.21	1 998.04	1 998.04	1 998.04	1 998.04	1 998.04	1 998.04

表5（a） 40片桨叶旋翼系统前45阶固有频率（rad/s）

Table 5（a） The first 36 frequencies of 9-bladed rotarywing model（rad/s）

80.162 4	80.164 0	80.350 3	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1
80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1
80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1
80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1
80.369 1	80.369 1	80.369 1	80.369 1	494.085	494.119	494.643	494.746	494.746

表5（b） 计算表5（a）中结果各种方法的比较

Table 5（b） Comparison of various solution methods with the computation in Table 5（a）

Methods	Size of the reduced system	Number of iterations	Computer time
dynamics substructure method	418	1	27 min and 45 s
Arnoldi reduction method	61	5	59 min and 8 s
SRR-subspace iteration	88	3	45 min and 21 s

例2 图3中所示的刚架结构，尺寸见图4（a），4（b）．所有构件都由截面相同的钢管制成：$E=2.1\times10^{11}$ Pa，$\nu=0.3$，$\rho=7\,800$ kg/m^3，$A=0.09$ m^2，$J_y=J_z=2.5\times10^{-9}$ m^4．采用子空间迭代法计算出的单个重复结构及整个结构的结果分别见表6与表7．

表6 单个重复结构对接处固定的前5阶固有频率（rad/s）

Table 6 The frequencies of the single repetitive substructure（rad/s）

0.313 532	1.825 93	4.180 62	4.967 36	9.042 58

表7 整个结构的前40阶固有频率（rad/s）

Table 7 The first 40 frequencies of the whole structure（rad/s）

.049 878	.068 221	.105 353	.313 532	.313 532	.313 532	.313 532	.313 532	.313 532	.313 532
.313 532	.313 532	.313 532	.313 532	.313 532	.313 532	.321 168	.324 065	.404 079	.717 778
.725 019	1.224 93	1.825 93	1.825 93	1.825 93	1.825 93	1.825 93	1.825 93	1.825 93	1.825 93
1.825 93	1.825 93	1.825 93	1.825 93	1.825 93	1.982 48	1.993 41	1.995 77	3.729 78	4.180 62

关于有阻尼情况下的算例可参阅文献[12, 13].

5 总　结

本文借助于动力子结构法, 构造性地证明了具有一类重复子结构的结构系统存在一系列的 (n- 3) 重根, 而且不论所讨论的是一般的无阻尼特征值问题、陀螺特征值问题或是阻尼陀螺特征值问题 (包括非经典阻尼), 这种由于结构几何上的重复性或对称性所导致的重根不会引入退化性或亏损. 结论对重复结构关于其易位轴的不均匀分布仍然成立表明, 所研究的重根对重复结构的关于其易位轴的摄动是不敏感的. 结论的证明乃是通过研究动力子结构法建立的总装阵中的块式结构完成的, 而总装阵中的块式结构恰是所研究结构中的重复性、对称性等结构拓扑性质的数学表征, 对它的研究有可能得到结构动力学特性的定性性质, 本文所得到的解析结果就是一个例子. 与 Lanczos 法等大型特征值问题的减缩求解方法相比, 动力子结构法在减缩过程中可以保持结构的定性性质是它的重要优点之一, 这对于发展新的数值方法具有参考价值.

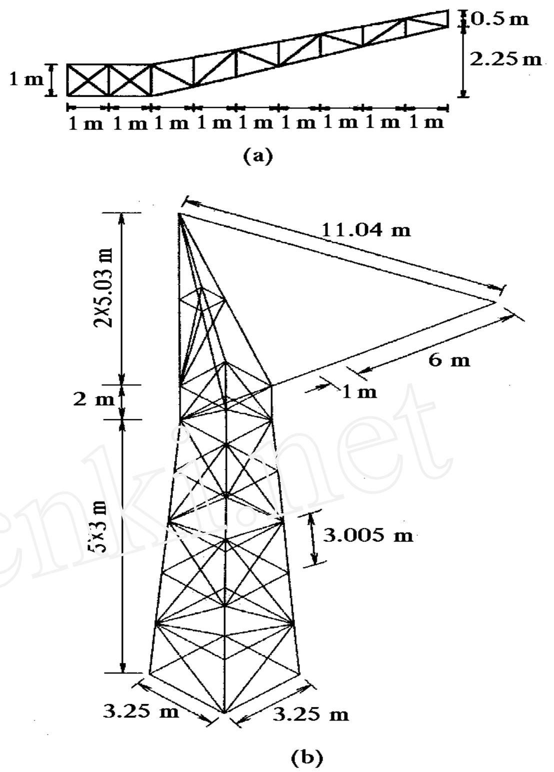


图4
Fig. 4

参　考　文　献

1 Wilkinson JH. The algebraic eigenvalue problem. OXFORD: Clarendon Press, 1965
2 Paige CC. The computation of eigenvalues and eigenvectors of very large sparse matrices: [Dissertation]. London: University of London, 1971 (转引自 [3])
3 Parlett BN. The symmetric eigenvelue problem. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1980
4 胡海昌. 多自由度结构固有振动理论. 北京: 科学出版社, 1987
5 王文亮等, 结构振动与动态子结构方法, 上海: 复旦大学出版社, 1985
6 郑兆昌. 复杂结构模态综合技术. 清华大学工程力学系讲义, 编号: 82-018, 1982
7 郑兆昌等. 直升机旋翼/机身耦合系统研究报告. 北京: 清华大学工程力学系, 1991
8 Zheng ZC. et al. Gyroscopic mode synthesis in the dynamic analysis of a multi-shaft rotor-bearing system. ASME 85-IGT-73, 1985
9 任革学. 大型陀螺特征值问题的实用数值方法: [博士论文]. 北京: 清华大学工程力学系, 1993. 1～100
10 Zheng Zhaochang, Ren Gexue. Eigensolution of the rotarywing system. In: Proc. of the 4-th International Conference on Rotor Dynamics, Chicago: 1994
11 郑兆昌, 任革学. 陀螺特征值问题的 SRR 子空间迭代法及其加速方法. 第三届全国转子动力学会议论文集, 1992. 54～59
12 Zheng ZC, Ren GX. Large scale non-symmetric eigenvalue problem in structural dynamics, In: Proc. 13-th MAC, Nashville, USA, 1995-02-13～16. 1995. 1622～1629

13 Ren GX. Method for large scale non-classically damped eigenvalue problem, Part-I, A material reduction algorithm, Part-II, A restart technique: [Post-doctoral research Report]. Beijing: Tsinghua University, 1995. 20～55

THE (n- 3) -MULTIPLE EIGENVALUES FOR A CLASS OF STRUCTURES AND ITS NON-DEFECTIVENESS

Ren Gexue Zheng Zhaochang
(*Tsinghua University, Beijing* 100084, China)

Abstract Based on the block structure of the assembled system matrix by gyroscopic mode synthesis technique, it is proved constructively that there is a series of the (n- 3) -multiple eigenvalues in the spectrum of the gyroscopic eigenvalue problem for the rotarywing type structures, corresponding to the n repeated substructures mounted on the structure. The associated complete eigenvectors or modes are also obtained. The obtained analytical results are extended to the nonrotating, undamped and damped rotarywing type structures. Further examination of the proof of the analytical results conclude that the multiple eigenvalues induced by the geometric symmetry or repetition introduce no defectiveness to the system. A variety of the numerical examples are presented to verify the results. The symmetry reaining property of the dynamic substructure method is also discussed, and it is considered to be a virtue deserved to be studied furthermore.

Key words dynamic substructure method, repetitive substructure, multiple eigenvalues, nondefctiveness