

密频系统的反馈控制¹⁾

孙 涛 林嗣廉 徐博侯

(浙江大学力学系, 杭州310027)

摘要 研究了如何将结构重频系统设计中的反馈控制律用到含有密频子结构的系统上去, 主要解决了如何估计将重频系统控制律用到相应的密频系统对闭环系统的(指数)衰减律的影响, 原系统的结构参数有少量变化后的新系统以及原系统是不可控的密频系统的情形。理论和数值算例表明, 只要对重频系统设计的反馈律作正确的坐标变换, 应用到上述三种情形时, 其闭环系统的衰减律的误差只有相应频率分散度的一阶小量。

关键词 结构振动控制, 密频系统, 闭环系统

引 言

大型空间飞行器存在具有密频子系统的结构^[1,2]。众所周知, 密频系统存在着模态不稳定的情形^[3], 换言之, 当系统的参数有很小的变化时, 其模态就可能有很大的变化, 所以处理密频系统的动力学和控制往往需要考虑这一不稳定性。文[4]讨论了密频子系统用重频子系统代替时, 其动力学特性和控制特性将会有何变化。该文指出, 当 $|\epsilon| \ll 1$, $|\delta_i| \ll 1$ 和 $|\epsilon/\xi_0| \ll 1$ 时, 其动力学特性和控制特性相差很小。这里 ϵ 是第 i 阶模态固有频率分散度, δ_i 是阻尼系数分散度, ξ_0 是重频系统的阻尼系数。以上所作的讨论都是没有考虑反馈控制, 即只是研究开环系统的情形。

本文主要是在文[4]的基础上进一步研究闭环系统的特性, 探讨如何将相应的重频系统设计的反馈控制律用到密频系统上去。我们考虑了三种情形:

(1) 如果原系统是实际可控的密频系统, 我们可以由此导出其相应的重频系统, 并在此重频系统上设计反馈控制, 以达到一定的镇定要求, 然后将此控制律用到原密频系统中去, 看看会发生什么情况。

(2) 如果原系统是实际可控的密频系统, 并且假定此密频系统的参数有少量的变化, 则此时模态将发生很大的变化^[3]。我们考虑, 对原密频系统设计的反馈控制, 能否用到摄动后的系统上去(即考察该闭环系统的鲁棒稳定性)。

(3) 如果原系统是实际上不可控的密频系统, 我们如何设计反馈系统, 以使某些重要的变量达到一定的控制要求, 而其余变量仍是稳定的。

1 密频系统的反馈控制的设计

结构动力学方程为

$$M \ddot{u} + 2C \dot{u} + Ku = Rf \quad (1)$$

¹⁾国家自然科学基金和国家教委博士学科点专项基金资助项目

1996-02-12收到

式中 $u \in R^n$ 为位移向量, M 为质量阵, C 为阻尼阵, K 为刚度阵, R 为控制阵, $f \in R^n$ 为控制力向量. 假定 (1) 是一个实际可控的密频系统, 则可以写成如下的模态坐标向量形式

$$\ddot{y} + 2\omega\xi_0(I + \Lambda_\delta)\dot{y} + \omega^2(I + \Lambda_\epsilon)y = Bf \quad (2)$$

这里 y 为模态坐标, 即 $u = \Phi y$, 式中 $\Lambda_\delta = \text{diag}(\delta_1 \dots \delta_n)$, $|\delta_i| \ll 1$ 为阻尼系数分散度矩阵, $\Lambda_\epsilon = \text{diag}(\epsilon_1 \dots \epsilon_n)$, $|\epsilon_i| \ll 1$ 为固有频率分散度矩阵, $B = \Phi^T R$ 为非奇异的, 即模态坐标下的控制矩阵. 在同一模态坐标下, 相应的重频系统为

$$\ddot{y} + 2\omega\xi_0\dot{y} + \omega^2y = Bf \quad (3)$$

我们用 SVD 分解^[5]来设计 (3) 的反馈控制. 设 B 的 SVD 分解为

$$B = X I Y \quad (4)$$

这里 $X^T X = Y^T Y = I$, $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1 \dots \gamma_n)$. 为使 (3) 可控, 必须有 $\gamma_j \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. 进一步, 令 $x = X^T y$, $v = Y f$, 则 (3) 变成

$$\ddot{x} + 2\omega\xi_0\dot{x} + \omega^2x = \Gamma v \quad (5)$$

假定 (5) 的控制力为

$$v = -G_0 x - 2H_0 \dot{x} \quad (6)$$

这里 $G_0 = \text{diag}(g_1 \dots g_n)$, $H_0 = \text{diag}(h_1 \dots h_n)$. 是待设计的参数, 则方程 (5) 可以解耦

$$\ddot{x}_j + 2(\omega\xi_0 + \gamma_j h_j)\dot{x}_j + (\omega^2 + \gamma_j g_j)x_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

振动镇定控制的关键问题是振动的衰减率. 如果我们事先指定闭环系统第 j 阶模态的衰减率为 $\alpha_j > 0$, 则只要使

$$\omega\xi_0 + \gamma_j h_j = \alpha_j$$

也就是取

$$h_j = (\alpha_j - \omega\xi_0) \gamma_j^{-1} \quad (8)$$

就可以了. 至于 g_j 的值可以进一步指定该模态在闭环系统的频率为 β_j 得到

$$\omega^2 + \gamma_j g_j - \alpha_j^2 = \beta_j^2$$

即

$$g_j = (\beta_j^2 + \alpha_j^2 - \omega^2) \gamma_j^{-1} \quad (9)$$

将由 (8), (9) 得到的 H_0 , G_0 代入 (6) 并考虑到 $f = Y^T v$, $x = X^T y$, 于是 (3) 的控制力为

$$f = -Y^T G_0 X^T y - 2Y^T H_0 X^T \dot{y} \quad (10)$$

此时闭环系统的极点 (即特征值) 为 $-\alpha_j \pm i\beta_j$, $j = 1, 2, \dots, n$

现在我们将控制力 (10) 作用到密频系统 (2) 上去

$$\ddot{y} + 2\omega\xi_0(I + \Lambda_\delta)\dot{y} + \omega^2(I + \Lambda_\epsilon)y = -BY^T G_0 X^T y - 2BY^T H_0 X^T \dot{y} \quad (11)$$

对(11)式中 y 作变换 $x = X^T y$, 则

$$\ddot{x} + 2\omega\xi_0(I + X^T \Lambda_\delta X)\dot{x} + \omega^2(I + X^T \Lambda_\epsilon X)x = -\Gamma(G_0 x + 2H_0 \dot{x})$$

即

$$\ddot{x} + 2(\Lambda_\alpha + \epsilon T)\dot{x} + (\Lambda_\alpha^2 + \Lambda_\beta^2 + \epsilon P)x = 0 \quad (12)$$

这里

$$\Lambda_\alpha = \text{diag}(\alpha_1 \dots \alpha_n), \quad \Lambda_\beta = \text{diag}(\beta_1 \dots \beta_n)$$

$$\epsilon T = \omega\xi_0 X^T \Lambda_\delta X, \quad \epsilon P = \omega^2 X^T \Lambda_\epsilon X$$

ϵ 是一适当选择的正的小参数 这样, 我们可以用小参数摄动方法求得 (12) 的特征值问题的摄动解

$$\lambda_j = \lambda_{0j} + \epsilon \lambda_{1j} + o(\epsilon^2), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

这里

$$\lambda_{0j} = -\alpha_j \pm i\beta_j$$

$$\lambda_{1j} = -\frac{2\lambda_{0j} t_{jj} + p_{jj}}{2(\lambda_{0j} + \alpha_j)} = -t_{jj} \pm i \frac{2\alpha_j t_{jj} - p_{jj}}{2\beta_j} \quad (14)$$

而 t_{jj} , p_{jj} 分别是 T 和 P 的第 j 个对角元

很明显, 密频系统第 j 阶模态衰减率的变化, 只跟 $\omega\xi_0 X^T \Lambda_\delta X$ 的第 j 个对角元有关 考虑到 $X^T X = I$ 我们立刻可以得到下列结论

记 $\delta_n = \min_i \delta_i$, $\delta_r = \max_i \delta_i$, 则密频闭环系统第 j 阶模态衰减率 η 满足

$$\alpha_j + \omega\xi_0 \delta_n \leq \eta \leq \alpha_j + \omega\xi_0 \delta_r \quad (15)$$

所以为了得到有足够稳定裕度的密频系统, 我们只要选取合适的 α_j 就可以了.

在文 [4] 中曾指出, 为了保证重频系统代替密频系统所引起的动力学响应的相对误差比较小, 除 $|\delta_i|$, $|\epsilon|$ 足够小外, 还需要 $|\epsilon/\xi_0|$ 足够小 但是如果仅仅考虑闭环系统的衰减率的误差, 则从 (15) 可以看到, 只要 $|\delta_i|$ 足够小就可以了 (这一点并不引起与文 [4] 的矛盾, 因为即使衰减率误差很小, 但也可以出现响应的相对误差很大的情形).

2 密频闭环系统对参数变化的鲁棒稳定性

上一节讨论了给定密频系统 (1) 或 (2) 条件下, 通过构造相关的重频系统 (3), 设计出反馈控制律 (10), 使得闭环系统有足够的稳定裕度 本节讨论如果系统 (1) 中的结构参数产生小量变化摄动后, 反馈控制律 (10) 是否仍适用?

假定摄动后的结构动力学方程为 (与 (1) 比较)

$$M \ddot{u} + 2C \dot{u} + K u = R f \quad (16)$$

为了将控制律 (10) 用到方程 (16) 上去, 我们需要将 f 用 u 和 \dot{u} 表示出来

$$f = - Y^T G_0 X^T \Phi^T u - 2Y^T H_0 X^T \Phi^T \dot{u} \quad (17)$$

代入 (16) 则有

$$M \ddot{u} + 2[C + \Phi B Y^T H_0 X^T \Phi^T] \dot{u} + [K + \Phi B Y^T G_0 X^T \Phi^T] u = 0 \quad (18)$$

这里我们已考虑到 $B = \Phi^T R$. 由(4), (8) 和(9) 我们可以进一步将(18) 写成

$$M \ddot{u} + 2[C + \Phi X (\Lambda_\alpha - \omega \xi_0 I) X^T \Phi^T] \dot{u} + [K + \Phi X (\Lambda_\alpha^2 + \Lambda_\beta^2 - \omega^2 I) X^T \Phi^T] u = 0 \quad (19)$$

设(16) 的模态矩阵为 Φ , 即 $u = \Phi \xi$, ξ 为(16) 的模态坐标. 由于密频系统的模态不稳定性^[6], 所以(1) 的模态矩阵 Φ 可以和 Φ 相差甚大. 将(19) 作模态变换, 并进一步令 $z = P \xi$, $P = X^T \Phi^T \Phi$, 则(19) 变成

$$\ddot{z} + 2[\Lambda_\alpha + \omega \xi_0 P \Lambda_\delta P^T] \dot{z} + [\Lambda_\alpha^2 + \Lambda_\beta^2 + \omega^2 P \Lambda_\epsilon P^T] z = 0 \quad (20)$$

这里 $\Lambda_\delta = \text{diag}(\delta_1 \dots \delta_n)$, $|\delta_j| \ll 1$ 和 $\Lambda_\epsilon = \text{diag}(\epsilon_1 \dots \epsilon_n)$, $|\epsilon_j| \ll 1$ 分别是摄动后系统(16) 的阻尼分散度矩阵和固有频率分散度矩阵. 在式(19) 中我们已用到 $P^T P = I$, 这是由于 $M = M$, 所以

$$\begin{aligned} P^T P &= \Phi^T \Phi X^T \Phi^T \Phi = \\ &= \Phi^T \Phi \Phi^T \Phi = \Phi^T M \Phi \\ &= \Phi^T M \Phi = I \end{aligned}$$

这样, 我们完全可以类似上节的讨论得到摄动后闭环系统 (18) 的第 j 阶模态衰减率 η_j 的估计

$$\alpha_j + \omega \xi_0 \delta_m \leq \eta_j \leq \alpha_j + \omega \xi_0 \delta_M \quad (21)$$

式中 $\delta_m = \min_i \delta_i$, $\delta_M = \max_i \delta_i$.

显然, 只要我们在相应的重频系统的反馈控制设计中, 选取足够大的 α , 则对应摄动后的系统(16) 就有较好的鲁棒稳定性.

这里应该指出的是, 我们所用的反馈控制力是表示成直接物理量的函数(17) (这里是位移 u 和速度 \dot{u}), 而不是模态坐标形式(10). 我们不能简单地把(10) 直接用到另一模态坐标系上去, 因为对控制力 f 也存在一个在坐标系下表示的问题; 所以同一控制力在不同坐标下的表示也有一个坐标变换问题.

3 实际不可控的密频系统

所谓实际不可控的密频系统, 指对应的重频系统是不可控的^[4], 因为此时密频系统可控度很小, 所需控制力可能超过了激励器的能力. 实际中这种情况常常发生, 因为只要独立控制力的维数小于子系统的维数, 其相应的重频系统必定是不可控的.

对于实际不可控的密频系统, 我们假定 $f \in R^k, k < n, R \in R^{n \times k}$ 并且 $\text{rank}(R) = k$, 其余不变. 将 (1) 化成模态坐标形式 (3), 并对 B 进行 SVD 分解式 (4), 不过此时 $X \in R^{n \times n}, Y \in R^{k \times k}$, 并且

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Gamma_0 = \text{diag}(\gamma_1 \dots \gamma_k), \gamma_j > 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

令 $x = X^T y = \begin{cases} x_C \\ x_R \end{cases}$, $x_C \in R^k, x_R \in R^{n-k}, v = Yf$, 则 (5) 变成

$$\begin{cases} \ddot{x}_C + 2\xi_0 \omega \dot{x}_C + \omega^2 x_C = \Gamma_0 v \\ \ddot{x}_R + 2\xi_0 \omega \dot{x}_R + \omega^2 x_R = 0 \end{cases} \quad (23)$$

显然, 控制力对 x_R 不起作用; 但对 x_C 可以通过反馈控制, 使其具有任意事先给定的闭环系统的稳定裕度. 类似 (6), 假定

$$v = -G_{c0} x_C - 2H_{c0} \dot{x}_C = -G_0 x - 2H_0 \dot{x} \quad (24)$$

这里 $G_0 = [G_{c0} \quad 0], H_0 = [H_{c0} \quad 0]$, 于是

$$\ddot{x}_C + 2\Lambda_{c\alpha} \dot{x}_C + (\Lambda_{c\alpha}^2 + \Lambda_{c\beta}^2) x_C = 0 \quad (25)$$

从而可以得到系统 (3) 的控制力式 (10). 这样, 我们得到对 X 前 k 列向量来说其闭环系统稳定裕度为 $\alpha_j, j = 1, 2, \dots, k$, 而对后 $n-k$ 列保持原先的 $\xi_0 \omega$ 的稳定裕度. 如果我们令

$$\Lambda_\alpha = \begin{bmatrix} \Lambda_{c\alpha} & 0 \\ 0 & \xi_0 \omega L \end{bmatrix}, \Lambda_\beta = \begin{bmatrix} \Lambda_{c\beta} & 0 \\ 0 & \omega \sqrt{1 - \xi_0^2} L \end{bmatrix} \quad (26)$$

则可以将可控部分和不可控部分联合起来写成

$$\ddot{x} + 2\Lambda_\alpha \dot{x} + (\Lambda_\alpha^2 + \Lambda_\beta^2) x = 0 \quad (27)$$

这样一来, 我们得到了与前面类似的结果. 以后对密频系统的分析完全类似, 可参照 (12) ~ (14) 进行. 由此可以得到:

(1) 实际不可控的密频系统可以分成两部分: 可控子空间和几乎完全不可控子空间. 对可控子空间来说, 我们可以用第二段的结果, 即只要选取合适的 α_j , 就可以使相应密频子空间有足够的稳定裕度. 对完全不可控子空间来说, 则保持开环系统本身所具有的衰减率, 控制力对其的影响为 $O(\epsilon)$.

(2) 我们只可以对可控子空间中的某些向量预先指定稳定裕度, 而对不完全在可控子空间中的向量是不能预先指定稳定裕度的.

4 数值例子与结论

考虑下列弹簧质量系统 (图1).

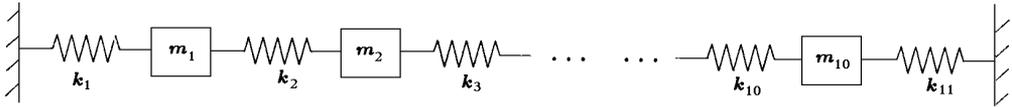


图1 弹簧质量系统

Fig. 1 Spring-mass system

这里刚度系数 $k_1=0.92, k_2=k_3=\dots=k_{10}=0.03, k_{11}=1.02, m_1=m_2=\dots=m_{10}=1$, 则其第9阶和第10阶固有频率将非常接近, 构成一密频子空间 (见表1).

表1 弹簧质量系统的固有频率

Table 1 The natural frequencies of the spring-mass system

order	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
freq.	0.059 74	0.117 74	0.172 28	0.221 72	0.264 56	0.299 44	0.325 23	0.341 07	0.975 2	1.000 5

如果取 $\omega_b = \frac{1}{2}(\omega_9 + \omega_{10}) = 0.9879$, 则 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.013$ 考虑初始条件 $y_i = \sin \frac{i\pi}{11}, y'_i = 0, i = 1, 2, \dots, k$, 则

1. 假定每个质量 m_i 上都可以作用一独立的控制力 f_i . 按本文提供的方法先设计密频子空间用重频子空间代替后的反馈控制力使其各阶模态的衰减率在 $\alpha=0.6$ 左右 然后将其用到原系统上去, 看其反馈控制的效果 最后将原问题 k_1, k_{11} 换成 $k_1=1.07, k_{11}=0.87$, 这时 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.05$ 再计算按原来的反馈控制律来控制这一摄动后的新系统 图2 给出上述三种情形下, 用同一反馈控制律得到 u_1 随时间变化的情形 很明显, 其差别是很小的

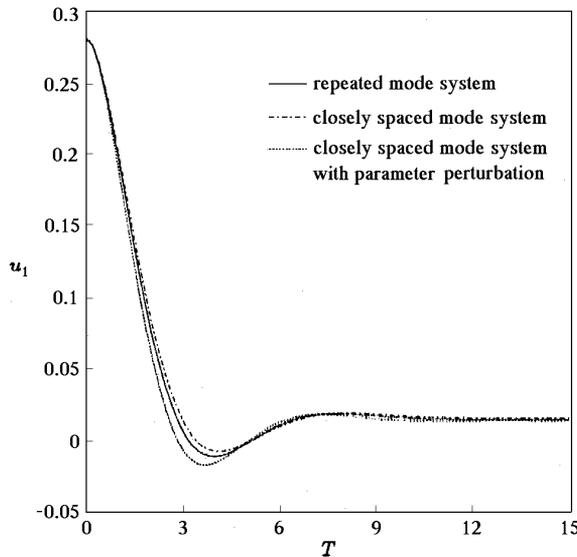


图2 重频系统反馈控制律用于重频系统、密频系统及摄动后密频系统的响应曲线

Fig. 2 Close-loop responses of repeated mode system,

closely spaced mode system and closely spaced mode system with parameter perturbation

2. 假定只在质量 m_1 上作用控制力, 此时系统实际上为不可控系统 我们的主要目的是为了保证 m_1 的运动按规定的衰减率 $\alpha=0.6$ 趋于零. 为了同时保证其它质点运动是稳定的, 假定在每个质量上加上阻尼系数为 $\xi_0=0.05$ 的阻尼器 这样按本文第四段提供的方法设计

反馈控制律, 最后得到 u_1 的运动是以 $\alpha=0.57$ 为衰减率的运动, 而 u_{10} 的运动是以 $\alpha=0.051$ 为衰减率的运动 (而与本身阻尼器衰减率 $\xi_0(\omega)=0.0498$ 只相差 2%)。

上述数值例子进一步证明了我们在前面提到的, 只要把按重频子空间设计的反馈控制力化为物理坐标下 (不是模态坐标下的形式), 则其可以同样应用到相应的含密频子空间的系统, 或在其上进行摄动后的每一含密频子空间系统上去, 其误差是一小量, 并且可以事先估计出来。以上方法同样可以用到相应的实际不可控系统上去。这样, 我们圆满解决了引言中最后提出的三个问题。

本文在形成过程中曾与北京大学王大钧教授, 陈德成教授和白浩博士进行讨论, 得到了很多有益的启发, 在此特表谢意。

参 考 文 献

- 1 Balas M J. Trends in large space structures control theory, foudest hopes, widest dreams 1982, *IEEE. Trans Automat Control* AC-27, 522~ 535
- 2 Rao S S, Pan T S, Vekayya V B. Modeling control and design of flexible structures: a survey. *App. Mech. Rev.*, 1990, 43: 99~ 117
- 3 Meirovitch L. Dynamics and Control of Structures 1990, John Wiley & Sons, New York
- 4 Xu B, Bao R. Exploration of substitution of repeated mode subspace for closely spaced mode subspace *ACTA Mechanica Sinica*, 1996, 12 (1): 65~ 72
- 5 Eckant C, Young G. A principal axis transformation for non-hermite matrices *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1936, 445
- 6 胡海昌. 多自由度结构的固有振动理论. 北京: 科学出版社, 1987

FEEDBACK CONTROL OF CLOSELY SPACED MODE SYSTEM

Sun Tao Lin Silian Xu Bohou

(Department of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract This paper studies closely spaced mode system using feedback control law designed for repeated mode system. The damping factors of close-loop system is analysed in three cases, the repeated mode system's feedback controller used in closely spaced mode system, in closely spaced mode system with parameter perturbation, in partly controllable closely spaced mode system. It is shown that with right coordinate transformation in the cases, the error of the close-loop system's damping factors is equal to the first order small parameter of the corresponding frequency disperse.

Key words structure vibration control, closely spaced mode system, close-loop system