第 28 卷 第 5 期
1996 年 9 月
ACTA MECHANICA SINICA
Vol. 28, No. 5
Sept, 1996

幂硬化可压缩材料 I 型动态裂纹尖端奇异场[1)]

朱先奎[2)]　黄克智
(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要　研究了平面应变条件下幂硬化可压缩材料中定常扩展的 I 型动态裂纹尖端应力应变奇异场　采用 J_2 流动理论和场量直角坐标分量, 得到了应力应变奇异性不同时的裂纹尖端渐近场, 其中场量的角变化规律和理想弹塑性材料的完全相同

关键词　幂硬化可压缩材料, 平面应变, I 型裂纹, 动态扩展, 奇异场

引　言

裂纹尖端弹塑性应力应变场的研究是断裂力学理论的重要课题　由于幂硬化材料能够反映实际工程材料的硬化行为, 因而在静止裂纹和准静态扩展裂纹尖端场的分析中得到了较多的研究[1]. 但是, 对于幂硬化材料中的动态扩展裂纹目前研究得较少. 文 [2] 和 [3] 分别对平面应变幂硬化不可压缩材料中的 I, II, III型动态裂纹和平面应力幂硬化可压缩材料中的 I 型动态裂纹进行了渐近分析, 给出了相应的奇异场　对于平面应变条件下幂硬化可压缩材料中的 I 型动态裂纹, 由于数学上甚为复杂, 至今还没有被研究或在公开刊物上发表　本文采用场量的直角坐标分量研究了这一问题

1　基本方程

考虑平面应变条件下幂硬化可压缩材料中定常扩展的 I 型动态裂纹　固定在裂纹尖端的直角坐标系 x_1, x_2 和极坐标系 r, θ 具有共同的坐标原点和与裂纹前沿平行的 x_3 轴, 并同时随裂纹以速度 V 沿 x_1 轴方向运动　在小变形理论的框架下, 假设材料变形服从 J_2 流动理论　令 $\sigma_{\alpha\beta}$ 为应力分量, v_α 为速度分量, 则运动方程为

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} = \rho \mathring{v}_\alpha \tag{1}$$

式中 ρ 为质量密度, α, $\beta = 1 \sim 2$　令 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 为应变分量, 则应变率分量可表示为

$$\mathring{\epsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha}) \tag{2}$$

采用小变形 J_2 流动理论时, 应力应变分量应满足如下 Prandtl-Reuss 弹塑性本构方程

$$\mathring{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\mathring{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\mathring{\sigma}_{kk}\delta_{ij}\right) + \lambda s_{ij} \tag{3}$$

1) 国家自然科学基金资助项目.

2) 现在地址: 清华大学水利水电工程系博士后流动站

1995-12-25收到第一稿, 1996-04-22收到修改稿

式中 μ，ν 分别为剪切模量和泊松比，δ_{ij} 为克罗内克尔符号，s_{ij} 为应力偏量，λ 为塑性流动因子，i，j，$k=1\sim3$. 在平面应变条件下，本构方程 (3) 可改写为

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathring{\epsilon}_h=\frac{\bar{\nu}}{\mu}\mathring{\sigma}_h+\frac{2}{3}\bar{\nu}^2\lambda(2\sigma_h-\sigma_p), \quad \mathring{\epsilon}_l=\frac{1}{2\mu}\mathring{\sigma}_l+\lambda\sigma_l\\
&\mathring{\epsilon}_{12}=\frac{1}{2\mu}\mathring{\sigma}_{12}+\lambda\sigma_{12}, \qquad \mathring{\sigma}_p=\frac{4}{3}(1+\nu)\mu\lambda(2\sigma_h-\sigma_p)
\end{aligned}\right\} \tag{4}
$$

式中 $\epsilon_h=(\epsilon_{11}+\epsilon_{22})/2$，$\epsilon_l=(\epsilon_{11}-\epsilon_{22})/2$，$\sigma_h=(\sigma_{11}+\sigma_{22})/2$，$\sigma_l=(\sigma_{11}-\sigma_{22})/2$，$\bar{\nu}\sigma_p=\sigma_{33}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})$，$\bar{\nu}=0.5-\nu$

对于幂硬化材料，假设在单向拉伸时服从 Ramberg-Osgood 幂律应力应变关系

$$
\epsilon=\sigma/E \quad (\sigma<\sigma_0), \qquad \epsilon=\sigma/E+c\sigma^n \quad (\sigma\geq\sigma_0) \tag{5}
$$

式中 E 为杨氏模量，σ_0 为初始屈服应力，c 为材料常数，$n>1$ 为硬化指数

根据塑性变形的正交法则，利用 (5) 式可得幂硬化材料的塑性流动因子为

$$
\lambda=\frac{3}{2}nc(\sigma_e)^{n-2}\mathring{\sigma}_e \tag{6}
$$

式中 σ_e 为等效应力，在平面应变条件下可表示为

$$
\sigma_e=\sqrt{3}\left[\sigma_l^2+\sigma_{12}^2+1/3\bar{\nu}^2(2\sigma_h-\sigma_p)^2\right]^{1/2} \tag{7}
$$

2 渐近分析与塑性区控制方程

假设动态裂纹尖端附近应力分量具有如下对数奇异性

$$
\sigma_{\alpha\beta}(r,\theta)=\xi^{\delta}\sum_{m=0}^{\infty}\sigma_{\alpha\beta}^{(m)}(\theta)\xi^{-m} \tag{8}
$$

式中 $\xi=\ln(R/r)$，δ 为待定常数，R 是一具有裂尖主塑性区尺度量级的长度参数. 若只考虑应力奇异主项，将 (8) 代入运动方程 (1) 并利用定常扩展条件 $(\mathring{\cdot})=-V(\ )_{,1}$，则裂纹尖端附近速度分量必须取如下渐近展式

$$
v_{\alpha}(r,\theta)=\xi^{\delta}[A_{\alpha}\xi+B_{\alpha}(\theta)]+O(\xi^{\delta}) \tag{9}
$$

式中 $A_1>0$ 为未知常数，对于 Ⅰ 型裂纹 $A_2\equiv0$，$B_{\alpha}(\theta)$ 为速度角函数. 将 (9) 式代入应变速度关系 (3) 得应变率分量

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathring{\epsilon}_{11}=-r^{-1}\xi^{\delta}[(1+\delta)A_1\cos\theta+\sin\theta B_1'(\theta)]+O(r^{-1}\xi^{\delta})\\
&\mathring{\epsilon}_{22}=r^{-1}\xi^{\delta}\cos\theta B_2'(\theta)+O(r^{-1}\xi^{\delta})\\
&\mathring{\epsilon}_{12}=-\frac{1}{2}r^{-1}\xi^{\delta}[(1+\delta)A_1\sin\theta-\cos\theta B_1'(\theta)+\sin\theta B_2'(\theta)]+O(r^{-1}\xi^{\delta})
\end{aligned}\right\} \tag{10}
$$

式中 “ ′” 表示 $\frac{\partial}{\partial\theta}$，该式表明应变分量 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 具有 $\xi^{\delta+1}$ 的对数奇异性

根据应力分量的渐近展式 (8), 等效应力 σ_e 和塑性应力 σ_p 可设为

$$\sigma_e(r,\theta) = \xi^{\delta}\sigma_e^{(0)}(\theta) + \xi^{\delta-1}\sigma_e^{(1)}(\theta) + O(\xi^{\delta-1}) \qquad (e,p) \tag{11}$$

将该等效应力展式代入 (6) 式得幂硬化材料塑性流动因子的渐近关系如下

$$\lambda = \frac{3}{2r}ncV\xi^{(n-1)\delta}(\sigma_e^{(0)})^{n-2}\left[\sin\theta\sigma_e^{(0)\prime} + \xi^{-1}(\sin\theta\sigma_e^{(1)\prime} + \delta\cos\theta\sigma_e^{(0)})\right] + \cdots \tag{12}$$

另外, 将 (8), (10) 式代入本构方程 (3) 得 $\lambda\sim r^{-1}$. 于是, 由方程 (12) 两边的主奇异性协调得

$$\sigma_e^{(0)}(\theta) = \sqrt{3}K, \qquad \delta = \frac{1}{n-1} \tag{13}$$

其中第一式就是幂硬化材料的塑性约束条件, K 为待定常数. 这时 (12) 式变为

$$\lambda = \frac{1}{2K^2}ncV(\sqrt{3}K)^n\left[\sin\theta\sigma_e^{(1)\prime}(\theta) + \sqrt{3}K\delta\cos\theta\right]\frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r}\right) \tag{14}$$

将 (8), (11), (13) 代入 (7) 式得主项渐近场应力分量角函数之间的关系式

$$(\sigma_l^{(0)}(\theta))^2 + (\sigma_{12}^{(0)}(\theta))^2 + \frac{1}{3}\bar{\nu}^2(2\sigma_h^{(0)}(\theta) - \sigma_p^{(0)}(\theta))^2 = K^2 \tag{15}$$

该式相当于理想弹塑性材料的Mises 屈服条件, 由此可以定义两个应力函数 Ψ 和 Φ, 使得

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_l^{(0)}(\theta) = -K\cos\Phi(\theta)\cos(\Psi(\theta) - 2\theta)\\
&\sigma_{12}^{(0)}(\theta) = K\cos\Phi(\theta)\sin(\Psi(\theta) - 2\theta)\\
&\bar{\nu}(2\sigma_h^{(0)}(\theta) - \sigma_p^{(0)}(\theta)) = \sqrt{3}K\sin\Phi(\theta)
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

将 (8), (9), (16) 式代入运动方程 (1), (8), (10), (11), (16) 式代入本构方程 (4), 利用定常扩展条件可得下列幂硬化材料 I 型动态裂纹尖端塑性区主项渐近场的控制方程

$$\left.\begin{aligned}
&(\Psi'(\theta) - 2)\cos\Phi\Delta(\theta,\Psi,\Phi) = \frac{2}{3}\bar{A}_1\Delta_\Psi(\theta,\Psi,\Phi)\\
&\Phi'(\theta)\cos\Phi\Delta(\theta,\Psi,\Phi) = \frac{2}{3}\bar{A}_1\Delta_\Phi(\theta,\Psi,\Phi)\\
&\lambda\cos\Phi\Delta(\theta,\Psi,\Phi) = \frac{V}{\mu r}\bar{A}_1\Delta_\lambda(\theta,\Psi,\Phi)\\
&\bar{\sigma}_h'(\theta) = \frac{1+\nu}{1+\nu-3\bar{\nu}M_n^2}\left[(\Psi'-2)\cos\Phi\sin\Psi + \Phi'\left(\sin\Phi\cos\Psi - \frac{\sqrt{3}\bar{\nu}}{1+\nu}M_n^2\cos\Phi\right)\right]\\
&\bar{B}_1'(\theta) = M_n^{-2}\sin\theta[(\Psi'-2)\cos\Phi\cos(\Psi-\theta) - \Phi'\sin\Phi\sin(\Psi-\theta) -\\
&\qquad \bar{\sigma}_h'\sin\theta - \bar{A}_1M^2\cos\theta]\\
&\bar{B}_2'(\theta) = M_n^{-2}\sin\theta[-(\Psi'-2)\cos\Phi\sin(\Psi-\theta) - \Phi'\sin\Phi\cos(\Psi-\theta) + \bar{\sigma}_h'\cos\theta]
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

式中 $\bar{A}_1 = \mu A_1(1+\delta)/KV$, $\bar{B}_\alpha(\theta) = \mu B_\alpha(\theta)/KV$, $\bar{\sigma}_h(\theta) = \sigma_h^{(0)}(\theta)/K$, $M = V(\rho/\mu)^{1/2}$, $M_n = M\sin\theta$, 而且

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta(\theta,\Psi,\Phi) = {} & \cos^2\Psi - 2M_n^2(1-\nu-\bar{\nu}M_n^2) - \\
& \frac{4}{\sqrt{3}}\bar{\nu}(1-M_n^2)\cos\Psi\tan\Phi + \frac{1}{3}(1-M_n^2)(5-4\nu-6\bar{\nu}M_n^2)\tan^2\Phi \\
\Delta_\Psi(\theta,\Psi,\Phi) = {} & -2(1+\nu)\tan^2\Phi\cot\theta\sin\Psi - \sqrt{3}\bar{\nu}M^2\tan\Phi[\cos 2\theta + \\
& \cos\Psi\cos(\Psi-2\theta)] + \frac{3}{2}M^2(1-2\bar{\nu}M_n^2)\cos(\Psi-2\theta) + \\
& \frac{1}{2}M^2(5-4\nu-6\bar{\nu}M_n^2)\tan^2\Phi\cos(\Psi-2\theta) \\
\Delta_\Phi(\theta,\Psi,\Phi) = {} & -2(1+\nu)\tan\Phi\cot\theta\cos\Psi + \sqrt{3}\bar{\nu}M^2\sin\Psi\cos(\Psi-2\theta) - \\
& \frac{1}{2}M^2(5-6\bar{\nu}M_n^2)\tan\Phi\sin(\Psi-2\theta) \\
\Delta_\lambda(\theta,\Psi,\Phi) = {} & \cos\theta\cos\Psi - \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\nu}(1-M_n^2)\cos\theta\tan\Phi + \\
& M^2(1-\nu-\bar{\nu}M_n^2)\sin\theta\sin(\Psi-2\theta)
\end{aligned}\right\}\quad(18)
$$

比较 (14) 和 $(17)_3$, 由边界条件 $\Psi(0) = \Phi(0) = 0$, 令 $\theta = 0$ 得常数 $A_1 = \sqrt{3}/2(\sqrt{3}K)^n cV$.

3 可能的弹性卸载条件

如果在可能的弹性卸载边界 $\theta = \theta^*$ 上场量全连续, 则弹性卸载区内应力和速度的渐近展式仍可取为 (8) 和 (9) 式. 在弹性区内塑性流动因子 $\lambda = 0$, 类似上节分析得弹性卸载区应力主项场的微分方程如下

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_h^{(0)\prime}(\theta) &= -\frac{\bar{A}_1 K\cot\theta}{1-\nu-\bar{\nu}M^2\sin^2\theta} \\
\sigma_l^{(0)\prime}(\theta) &= -\frac{\bar{A}_1 K\cos 2\theta\cot\theta}{(1-M^2\sin^2\theta)(1-\nu-\bar{\nu}M^2\sin^2\theta)} \\
\sigma_{12}^{(0)\prime}(\theta) &= -\frac{\bar{A}_1 K[2\cos^2\theta - M^2(1-\nu-\bar{\nu}M^2\sin^2\theta)]}{(1-M^2\sin^2\theta)(1-\nu-\bar{\nu}M^2\sin^2\theta)} \\
\sigma_p^{(0)\prime}(\theta) &= 0
\end{aligned}\right\}\quad(19)
$$

在弹性卸载边界上, 卸载条件要求等效应力率 $\mathring{\sigma}_e(\theta^*) \le 0$. 根据卸载边界上应力连续条件, 由 (7), (16) 和 (19) 得可能的弹性卸载条件为

$$
\begin{aligned}
& \cos\theta^*\cos\Psi(\theta^*) - \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\nu}(1-M^2\sin^2\theta^*)\cos\theta^*\tan\Phi(\theta^*) + \\
& M^2(1-\nu-\bar{\nu}M^2\sin^2\theta^*)\sin\theta^*\sin(\Psi(\theta^*)-2\theta^*) \le 0
\end{aligned}\quad(20)
$$

4 动态解与结论

经比较, 上面导出的幂硬化可压缩材料中 I 型动态裂纹尖端主项场控制方程组 (17) 与可能的弹性卸载条件 (20) 和理想弹塑性可压缩材料尖端场相应的控制方程与卸载条件

(见文献 [4, 5]) 完全相同, 而且边界条件也相同, 因此两种可压缩材料尖端场角变量的分布规律完全相似　当幂硬化可压缩材料趋向不可压缩时, 该结论不变, 且和文 [2] 一致

关于理想弹塑性可压缩和不可压缩材料尖端场的动态解　文 [4] 和 [6] 已分别进行了求解, 所给解曲线都含有“包络线”. 然而, 本文作者最近得到的动态解[5, 7]不含“包络线”, 但含有一结点型奇点 P (证明参见文献 [7, 8]), 无弹性卸载, 应力应变间断, 而间断解只能给出变化范围　但微分方程的特性[8]决定了不同间断点的积分曲线都汇合于奇点 P, 并且差别不大　如果给定间断条件, 可以得到唯一解　如假定只有沿间断面径向正应力可以间断, 对于给定的 $\overline{A}_1$, M 和 ν, 可以得到应力函数 ψ 和 ϕ 的积分曲线, 如图1所示　由应力函数的解曲线可进一步求得应力应变场的角分布规律, 具体参见文 [5, 7].

图1　应力函数的积分曲线 ($\overline{A}_1 = 0.15$, $\nu = 0.3$)

Fig. 1　The integral curves of stress functions

通过以上分析, 可以得出以下结论:

1) 本文构造的动态裂纹尖端应力应变场具有如下对数奇异性

$$\sigma_{\alpha\beta} \sim \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad \epsilon_{\alpha\beta} \sim \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{\frac{n}{n-1}}$$

2) 幂硬化可压缩材料Ⅰ型动态裂纹尖端主项场的结构和理想弹塑性材料的结构完全相似, 即角函数的分布规律一致, 裂纹尖端全部由塑性区包围着, 无弹性卸载, 存在强间断

参　考　文　献

1　Hwang KC, Yu SW, Yang W. *Appl Mech Rev*, 1990, 43: 19～31

2　Gao YC, Nemat-Nasser S. *Mechanics of Materials*, 1983, 2: 305～317

3　章梓茂, 高玉臣　力学学报, 1988, 20: 19～30

4　Gao YC. *Int J Fracture*, 1985, 29: 171～180

5　朱先奎　现代数学和力学 (MMM) -Ⅵ, 1995: 173～178

6　Gao YC, Nemat-Nasser S. *Mechanics of Materials*, 1983, 2: 47～60

7　朱先奎　弹塑性材料动态裂纹尖端场研究: [博士论文]. 北京: 清华大学, 1995

8　朱先奎　江西科学, 1994, 3: 1～8

NEAR-TIP SINGULAR FIELDS FOR MODE-I CRACK DYNAMICALLY PROPAGATING IN A POWER-LAW COMPRESSIBLE MATERIAL

Zhu Xiankui Hwang Kehchih

(*Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*)

Abstract Near-tip singular stress and strain fields of a mode-I crack dynamically propagating in a power-law compressible material under plane strains are considered. With J_2 flow theory and the rectangular components, this paper obtains the near-tip asymptotic fields in which the singularities of stress and strain are different and the angular variations of field quantities are the same as those in elastic-perfectly plastic materials

Key words power-law compressible material, plane strain, mode-I crack, dynamic propagation, singular field