

弹性常曲率扁壳通解的完备性和不唯一性¹⁾

王 炜

(北京大学力学与工程科学系, 北京 105871)

摘要 导出了弹性常曲率扁壳的一种新的通解, 证明了它的完备性和不唯一性, 著名的符拉索夫 (Vlasov) 解是它的特殊情形之一. 论证了符拉索夫解不适用于球形扁壳, 并给出了球形扁壳的新的通解.

关键词 弹性扁壳, 弹性通解, 弹性壳, 符拉索夫解, 完备性

引 言

扁壳是工程中常用的结构, 弹性扁壳是壳体理论研究的重要课题之一. 符拉索夫^[1]给出了扁壳问题的一个通解. 著作 [1] 的译者薛振东、朱世靖指出符拉索夫的解对于球形扁壳似不适用 (见文献 [1] P. 415 脚注), 顾绍德^[2]指出对球形扁壳符拉索夫解差一调和函数, 胡海昌^[3]对符拉索夫解的完备性作了进一步的研究, 王林生^[4]证明了符拉索夫解对非球形扁壳的完备性.

文献 [5~ 7] 研究了弹性力学的通解, 把上述文章中的方法应用于常曲率弹性扁壳, 构造出弹性扁壳的一种新的通解, 因而也就证明了它的完备性, 接着指出了这种通解的不唯一性, 并给出了这种不唯一性的程度, 利用这种任意度导出了两种特殊的完备的通解, 其中之一为符拉索夫解. 文中亦指出这两种通解不适用于球形扁壳, 并给出了球形扁壳问题的通解.

1 基本方程

对常曲率扁壳, 混合法基本方程为^[1, 3]

$$\left. \begin{aligned} D \nabla^4 w + \nabla_k^2 \varphi &= P_z \\ \nabla^4 \varphi - E h \nabla_k^2 w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $\nabla_k^2 = k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, w 为壳体挠度, φ 为应力函数, D 为弯曲刚度, E 为弹性模量, h 为壳厚, P_z 为法向荷载, k_x, k_y 分别为 x, y 方向的曲率, k_{xy} 为扭率.

¹⁾ 国家自然科学基金资助项目.

1995-08-24 收到第一稿, 1996-01-29 收到修改稿.

现考虑公式 (1) 的齐次方程

$$\left. \begin{aligned} D \nabla^4 w + \nabla_k^2 \varphi &= 0 \\ - E h \nabla_k^2 w + \nabla^4 \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

公式 (1) 的一般解由式 (2) 的通解叠加其特解构成.
设

$$P = \begin{bmatrix} D \nabla^4 & \nabla_k^2 \\ - E h \nabla_k^2 & \nabla^4 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中 P 的 2×2 的微分算子矩阵. 于是式 (2) 写为

$$P w = 0 \quad (4)$$

为给出方程 (4) 的通解, 引进矩阵 P 的“伴随矩阵”

$$Q = \begin{bmatrix} \nabla^4 & - \nabla_k^2 \\ E h \nabla_k^2 & D \nabla^4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

则有

$$P Q = Q P = \mathbf{L} I \quad (6)$$

式中 I 为 2×2 单位矩阵, 而

$$\mathbf{L} = D \nabla^8 + E h \nabla_k^4 \quad (7)$$

2 通解及其完备性

下述定理给出了方程 (4) 的通解.

定理 1 设 $F = (F_1, F_2)^T$ 满足条件

$$\mathbf{L} F = 0 \quad (8)$$

其中 T 表示转置, 则

$$w = Q F \quad (9)$$

是扁壳方程 (4) 的解.

证明 将式 (9) 代入式 (4), 利用式 (6) 和式 (8), 有

$$P w = P Q F = \mathbf{L} F = 0 \quad (\text{证毕}) \quad (10)$$

定理 2 若 w 是式 (4) 的一个解, 则存在满足方程 (8) 的 F , 使 w 可表为 (9) 的形式

证明 算子 $\mathbf{L}$ 是椭圆型的, 则方程

$$\mathbf{L} G = w \quad (11)$$

有解 G (见文献 [8] P.43 定理 2.7), 记 $G = \mathbf{L}^{-1}w$, 那么

$$F = P G \quad (12)$$

即合所求.

事实上, 从式 (12), (11) 和 (4), 有

$$\mathbf{L} F = \mathbf{L} P G = P w = 0 \quad (13)$$

另外, 应用式 (12), (6) 和 (11), 可得

$$Q F = Q P G = \mathbf{L} G = w \quad (\text{证毕}) \quad (14)$$

定理 1 和定理 2 表明: 扁壳方程 (2) 具有如下形式的完备的通解

$$\left. \begin{aligned} w &= \nabla^4 F_1 - \nabla_k^2 F_2 \\ \varphi &= E h \nabla_k^2 F_1 + D \nabla^4 F_2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中

$$\mathbf{L} F_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

3 通解的不唯一性与符拉索夫解的完备性

通解 (9), (8) 或 (15), (16) 中的势函数 F 不唯一, 对此有下述两个定理成立.

定理 3 若式 (4) 的解 w 已表为 $\hat{F}$ (9), (8) 的形式, 那么将 F 改成

$$F = \hat{F} + P H \quad (17)$$

其中

$$\mathbf{L} H = 0, \quad H = (H_1, H_2)^T \quad (18)$$

则 (9), (8) 亦成立.

证明 从方程 (17), (18), (8), (9), (6) 有

$$\hat{\mathbf{L}} F = \mathbf{L} F + \mathbf{L} P H = 0 \quad (19)$$

$$\hat{\theta} F = Q F + Q P H = w + \mathbf{L} H = w \quad (20)$$

于是 $\hat{F}$ 也满足 (9), (8), 定理得证.

定理 4 若式 (4) 的解 w 有两种 (9), (8) 的表达形式

$$\left. \begin{aligned} w &= Q F = Q F_1 \\ \mathbf{L} F &= \mathbf{L} F_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

则存在 H , 满足 $\mathbf{L} H = 0$, 并且

$$F_1 - F = P H \quad (22)$$

证明 从 (21) 可得

$$Q(F_1 - F) = 0 \quad (23)$$

设

$$G = \mathbf{L}^{-1}(F_1 - F) \quad (24)$$

则

$$\bar{H} = QG \quad (25)$$

即合所求. 因为从 (25), (6), (24), (23) 可得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}H &= \mathbf{L}QG = Q(F_1 - F) = 0 \\ PH &= PQG = \mathbf{L}G = F_1 - F \end{aligned} \right\} \quad (\text{证毕}) \quad (26)$$

定理 3 表明通解 (9), (8) 是不唯一的, 定理 4 说明了这种不唯一的程度.

现在利用这种任意的程度来证明下述定理.

定理 5 (符拉索夫解的完备性) 如果条件

$$k_x = k_y, \quad k_{xy} = 0 \quad (27)$$

不同时成立, 那么解 (15), (16) 中的 F_1 和 F_2 中的一个可以略去, 而不失一般性.

证明 按定理 3, 可将式 (15), (16) 中的 F_1 和 F_2 换成

$$\left. \begin{aligned} \hat{F}_1 &= F_1 + D \nabla^4 H_1 + \nabla^2_k H_2 \\ \hat{F}_2 &= F_2 - Eh \nabla^2_k H_1 + \nabla^4 H_2 \\ \mathbf{L}H_i &= 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

先证明存在 H_1 和 H_2 , 使 $\hat{F}_2 = 0$.

在式 (28) 中, 令 $H_1 = 0$, 于是要求下面的式子成立

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 H_2 &= -F_2 \\ D \nabla^8 H_2 + Eh \nabla^4_k H_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

为此, 令

$$H_2 = -\mathbf{F}(\mathbf{F}(F_2)) + A \quad (30)$$

式中 $\mathbf{F}$ 为对数位势

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}(F_2) &= -\frac{1}{2\pi} \iint F_2(\xi, \eta) \ln \frac{1}{\rho} d\xi d\eta \\ \rho &= [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

即有

$$\nabla^2 \mathbf{F}(F_2) = F_2 \quad (32)$$

而

$$\nabla^4 A = 0 \quad (33)$$

将式 (30) 代入 (29) 的第二式, 得

$$Eh \nabla^4 A = B \quad (34)$$

式中

$$B = D \nabla^4 F_2 + Eh \nabla_k^4 \mathbf{F} \mathbf{F} (F_2) \quad (35)$$

从式 (16) 知

$$\nabla^4 B = 0 \quad (36)$$

因此求解问题式 (29) 归结为下述问题

$$\left. \begin{aligned} Eh \nabla^4 A &= B \\ \nabla^4 A &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

其中 B 满足式 (36) .

从附录的引理 4 知, 如果条件 (27) 不同时成立, 式 (37) 有解, 从而问题 (29) 的解 H_2 存在. 故 F_2 可省略. 不妨仍记 F_2 为 F_2 , 即 F_2 可省略.

同理在 (15), (16) 中可省略 F_1 .

因此当条件 (27) 不同时成立时, 有下列两个完备的解

$$\left. \begin{aligned} w &= \nabla^4 F_1 \\ \varphi &= Eh \nabla_k^2 F_1 \end{aligned} \right\} \quad (\mathbf{L} F_1 = 0) \quad (38)$$

$$\left. \begin{aligned} w &= -\nabla_k^2 F_2 \\ \varphi &= D \nabla^4 F_2 \end{aligned} \right\} \quad (\mathbf{L} F_2 = 0) \quad (39)$$

其中式 (38) 即为著名的符拉索夫解, 而式 (39) 是本文所导出的一个新解.

4 球形扁壳问题的通解

对球形扁壳, 有 $k_x = k_y = k$, $k_{xy} = 0$, 即式 (27) 中的两式同时成立, 故定理 5 不能用于该情形. 本节将讨论球形扁壳的通解, 从定理 6 可知解 (38) 和 (39) 式对球形扁壳是不适用的, 而定理 7 给出了一种新的完备的解.

先将方程 (2), (3) 改写为

$$\left. \begin{aligned} D \nabla^4 w + k \nabla^2 \varphi &= 0 \\ -Ehk \nabla^2 w + \nabla^4 \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$P^0 = \begin{bmatrix} D \nabla^4 & k \nabla^2 \\ - E h k \nabla^2 & \nabla^4 \end{bmatrix} \quad (41)$$

设

$$Q^0 = \begin{bmatrix} \nabla^2 & -k \\ E h k & D \nabla^2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbf{L}^0 = D \nabla^6 + E h k^2 \nabla^2 \quad (43)$$

则将定理 1~ 定理 4 中的 P , Q , $\mathbf{L}$ 分别换为 P^0 , Q^0 , $\mathbf{L}^0$, 各定理依然成立. 于是有下列完备的通解

$$\left. \begin{aligned} w &= \nabla^2 F_1^0 - k F_2^0 \\ \varphi &= E h k F_1^0 + D \nabla^2 F_2^0 \end{aligned} \right\} \quad (\mathbf{L}^0 F_i^0 = 0, i = 1, 2) \quad (44)$$

定理 6 解方程 (44) 中的 F_1^0 或 F_2^0 不可省略.

证明 如若不然, 设 F_2^0 可省略, 即存在 H_1^0, H_2^0 使下面两式成立

$$\hat{F}_2^0 = F_2^0 - E h k \nabla^2 H_1^0 + \nabla^4 H_2^0 = 0 \quad (45)$$

$$\nabla^2 (D \nabla^4 + E h k^2) H_i^0 = 0, \quad i = 1, 2 \quad (46)$$

按附录的引理 5, 可知 H_i^0 可作如下分解

$$H_i^0 = H_{i1}^0 + H_{i2}^0, \quad i = 1, 2 \quad (47)$$

其中

$$\nabla^2 H_{i1}^0 = 0, \quad (D \nabla^4 + E h k^2) H_{i2}^0 = 0, \quad i = 1, 2, \quad (48)$$

同理

$$\left. \begin{aligned} F_2^0 &= F_{21}^0 + F_{22}^0 \\ \nabla^2 F_{21}^0 &= 0, \quad (D \nabla^4 + E h k^2) F_{22}^0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

将式 (47) ~ (49) 代入式 (45) 得

$$\hat{F}_2^0 = F_{21}^0 + F_{22}^0 - E h k \nabla^2 H_{12}^0 + \nabla^4 H_{22}^0 = 0 \quad (50)$$

从式 (50) 及式 (49) 中第三式和式 (48) 的第二式, 可得

$$(D \nabla^4 + E h k^2) F_{21}^0 = 0 \quad (51)$$

考虑到 (49) 第二式, 从式 (51) 则有

$$F_{21}^0 = 0 \quad (52)$$

从式 (52) 可知, 如果 F_2^0 中包含调和函数 F_{21}^0 , 则有矛盾, 即 F_2^0 不可省略.

同理 F_1^0 不可省略.

定理 7 方程 (40) 有如下通解

$$\left. \begin{aligned} w &= \nabla^2 F_1^0 - k F_{21}^0 \\ \varphi &= E h k F_1^0 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 (D \nabla^4 + E h k^2) F_1^0 &= 0 \\ \nabla^2 F_{21}^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

证明 从定理 6 的证明过程可知式 (50) 第一式成立, 令其中 $H_{12}^0 = 0$, 再应用式 (48) 第二式, 可得

$$\hat{F}_2^0 = F_{21}^0 + F_{22}^0 - \frac{E h k^2}{D} H_{22}^0 \quad (55)$$

取 $H_{22}^0 = \frac{D}{E h k^2} F_{22}^0$, 则从式 (55) 有

$$\hat{F}_2^0 = F_{21}^0 \quad (56)$$

因此, 式 (53), (54) 成立, 定理证毕.

参 考 文 献

- 1 符拉索夫 瓦札著. 壳体的一般理论. 薛振东, 朱世靖译. 北京: 人民教育出版社, 1960
- 2 顾绍德. 圆底球扁壳微分方程的积分问题. 土木工程学报, 1965, 11 (1): 69~ 72
- 3 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京: 科学出版社, 1981
- 4 王林生. 关于弹性扁薄壳问题的通解. 力学学报, 1985, 17 (1): 64~ 71
- 5 Wang W, Wang M Z. Constructivity and completeness of the general solutions in elastodynamics, *Acta Mechanica*, 1992, 91: 209~ 214
- 6 Wang M Z, Wang W. Completeness and nonuniqueness of general solutions of transversely isotropic elasticity. *Int J Solids Structures*, 1995, 32 (3/4): 501~ 513
- 7 王炜, 徐新生, 王敏中. 横观各向同性弹性体轴对称问题的通解及其完备性. 中国科学, A 辑, 1994, 24 (6): 586 ~ 598
- 8 Schechter M 著. 偏微分方程的现代方法. 叶其孝译. 北京: 科学出版社, 1983

附 录

下面将给出本文所用到的五个引理及其证明.

引理 1 问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= g, & (\nabla^2 g &= 0) \\ \nabla^2 f &= 0 \end{aligned} \right\}$$

有解.

证明 令 $\tilde{g}$ 是与 g 共轭的调和函数, 即

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y} = - \frac{\partial g}{\partial x} \quad (A 1)$$

那么

$$f = \int \tilde{g} dx + g dy \quad (\text{A } 2)$$

即合所求. 其中积分为区域中的线积分, 从 (A 1) 的第一式可知线积分与路径无关, 而从 (A 2) 和 (A 1) 的第二式即有 $\nabla^2 f = 0$.

重复应用引理 1, 可得

引理 2 问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y^n} &= g, \quad (\nabla^2 g = 0) \\ \nabla^2 f &= 0 \end{aligned} \right\}$$

其中 n 为自然数.

引理 3 设 B 为双调和函数, 则存在调和函数 g_1 和 g_2 , 使

$$B = yg_1 + g_2$$

证明 令

$$g = \nabla^2 B$$

由于 B 是双调和函数, 所以

$$\nabla^2 g = 0$$

从引理 1 知, 存在调和函数 f , 使 $\frac{\partial f}{\partial y} = g$, 那么取

$$g_1 = \frac{1}{2}f, \quad g_2 = B - \frac{1}{2}yf$$

即合所求.

引理 4 问题

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 A &= B \quad (\nabla^4 B = 0) \\ \nabla^4 A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

有解, 如果下述条件不同时成立

$$k_x = k_y, \quad k_{xy} = 0 \quad (\text{A } 3)$$

证明 首先作坐标变换

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

在新的坐标系下

$$\begin{aligned} \nabla'^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} = \nabla^2 \\ \nabla_k'^2 &= k_y' \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2k_{xy}' \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} + k_x' \frac{\partial^2}{\partial y'^2} = \nabla_k^2 \end{aligned}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} k_x' &= k_x \sin^2 \theta - 2k_{xy} \sin \theta \cos \theta + k_y \cos^2 \theta \\ k_y' &= k_x \cos^2 \theta + 2k_{xy} \sin \theta \cos \theta + k_y \sin^2 \theta \\ k_{xy}' &= \frac{k_y - k_x}{2} \sin 2\theta + k_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A } 4)$$

令 θ 满足方程

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2k_{xy}}{k_x - k_y} \quad (\text{A } 5)$$

则有 $k'_{xy} = 0$. 由于条件 (A 3) 中的两式不同时成立, 故有

$$k'_x \neq k'_y \quad (\text{A } 6)$$

事实上, 若 (A 6) 不成立, 则从 (A 4) 前两式得

$$(k_x - k_y) \cos 2\theta + 2k_{xy} \sin 2\theta = 0 \quad (\text{A } 7)$$

从 (A 5), (A 7) 可推出 $k_x = k_y$, $k_{xy} = 0$, 与本引理的条件矛盾.

于是, 在新坐标系下, 引理 4 的问题为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 A &= B \quad (\nabla^2 B = 0) \\ \nabla^4 A &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A } 8)$$

按引理 3, 可设

$$B = y g_1 + g_2, \quad (\nabla^2 g_1 = \nabla^2 g_2 = 0)$$

然后, 令

$$A = y f_1 + f_2, \quad (\nabla^2 f_1 = \nabla^2 f_2 = 0) \quad (\text{A } 9)$$

而

$$\begin{aligned} \nabla^4 A &= \left[k'_y \nabla^2 + (k'_x - k'_y) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 (y f_1 + f_2) = \\ &= k_y^2 \nabla^4 A + 4k'_y (k'_x - k'_y) \frac{\partial f_1}{\partial y} + \\ &+ (k'_x - k'_y)^2 \left(4 \frac{\partial f_1}{\partial y^3} + y \frac{\partial f_1}{\partial y^4} + \frac{\partial f_2}{\partial y^4} \right) \end{aligned}$$

今设 f_1, f_2 分别满足下列问题

$$\left\{ \begin{aligned} (k'_x - k'_y)^2 \frac{\partial f_1}{\partial y^4} &= g_1 \\ \nabla^2 f_1 &= 0 \\ (k'_x - k'_y)^2 \frac{\partial f_2}{\partial y^4} &= g_2 - 4[k'_y (k'_x - k'_y) + (k'_x - k'_y)^2] \frac{\partial f_1}{\partial y^3} \\ \nabla^2 f_2 &= 0 \end{aligned} \right.$$

按引理 2, 上述两个问题当 $k'_x \neq k'_y$ 时有解, 因此由 (A 9) 所定义的 A 为问题 (A 8) 的解. 即引理 4 所提问题有解.

引理 5 若 f 满足方程

$$\nabla^2 (D \nabla^4 + E h k^2) f = 0$$

则存在 f_1, f_2 , 使

$$f = f_1 + f_2$$

且

$$\nabla^2 f_1 = 0, \quad (D \nabla^4 + E h k^2) f_2 = 0$$

证明 令

$$g = \nabla^2 f$$

于是

$$(D \nabla^4 + E h k^2) g = 0$$

那么

$$\nabla^2 f = g = \frac{1}{E h k^2} (D \nabla^4 + E h k^2) g - \frac{D}{E h k^2} \nabla^4 g = - \frac{D}{E h k^2} \nabla^4 g$$

即

$$\nabla^2 \left(f + \frac{D}{E h k^2} \nabla^2 g \right) = 0$$

因此, 令

$$f_1 = f + \frac{D}{E h k^2} \nabla^2 g$$

$$f_2 = - \frac{D}{E h k^2} \nabla^2 g$$

即合所求, 证毕.

COMPLETENESS AND NONUNIQUENESS OF GENERAL SOLUTIONS OF ELASTIC SHALLOW SHELLS WITH CONSTANT CURVATURE

Wang Wei

(Dept. of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract A new general solution of elastic shallow shells with constant curvature is derived. its completeness and nonuniqueness are proved. Famous Vlasov solution is one of its special case. Furthermore it is proved that Vlasov solution does not suit for shallow spherical shells. And we give a new general solution of shallow spherical shells.

Key words elastic shallow shell, elastic general solution, elastic shell, Vlasov solution, completeness