第 28 卷 第 4 期
1996 年 7 月
ACTA MECHANICA SINICA
Vol 28, No. 4
July, 1996

大型非经典阻尼系统的动态解耦方法[1)]

郑兆昌　　任革学
(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要　提出了大型非经典阻尼系统动力分析的动态解耦方法, 同时在特征值问题的求解和动力响应的计算中完全避免复数运算. 方法适用于无阻尼陀螺系统、非经典阻尼系统(包括阻尼陀螺系统), 且不论系统亏损与否. 得到了揭示阻尼作用的有趣的理论结果和实用的数值方法

关键词　动态解耦, 非经典阻尼系统, 阻尼陀螺系统, 亏损, 减缩

引　言

众所周知, 由质量矩阵 M 和刚度矩阵 K 组成的无阻尼系统或经典阻尼系统能够在物理空间中通过实模态理论解耦. 由于系统矩阵是正定或半正定的, 其求解过程可完全在实数域内进行. 在包含陀螺矩阵 G 的无阻尼系统中, 相应的二次特征值问题能够转化为状态空间的由一对称矩阵和一非对称矩阵组成的广义特征值问题. Meirovitch[1] 提出了一种将此问题转化为等价的实对称矩阵的特征值问题的方法. 郑兆昌等[2] 提出了陀螺模态综合技术, 陀螺特征值问题在状态空间被解耦为 2×2 的块对角反对称矩阵, 而不涉及复数运算. Caughey 和 O'Kelly[3] 对可在物理空间解耦的对称阻尼系统给出了充要条件. 这些结论被 M. Liu 和 J. M. Wilson[4] 扩展到有阻尼陀螺系统, 但是这些结论不是构造性的, 因为检验一个系统是否满足解耦条件是很困难的事, 尤其对于大型系统而言. 目前, 在物理空间不满足解耦条件的系统, 仅能在状态空间用复模态解耦[5]. 但是用复模态解耦将遇到如下问题: 1) 复数运算不可避免; 2) 左右特征值问题需同时求解, 因虽然左、右模态本身并不是正交的, 左、右模态之间才存在互正交性; 3) 阻尼系统可能是亏损的, 对于一个亏损系统, 将会遇到一些严重的困难. Zhu 和 Shi[6] 曾提出用测试矩阵秩的方法确定亏损系统的亏损特性

为建立一种非经典阻尼系统统一的解耦方法, 基于 Arnoldi 法[7], 进行了一系列的研究[7~11]. 在这些研究中, 广义 Arnoldi 方法用于非对称系统的减缩, 采用构造性的广义 Schur 分解对状态空间中的阻尼陀螺系统实现了动态正交解耦. 所获得关于解耦系统的结构定理[10], 投影系统的结构定理以及本质减缩方法[11] 表明所提出的方法是很有前景的, 同时它克服了以上所述复模态理论的缺点

1　广义 Arnoldi 方法

以下控制方程是相当一般的, 它可代表 n 自由度的阻尼陀螺系统及其在物理和状态

1) 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助项目.
1995-10-04 收到第一稿, 1995-12-26 收到修改稿

空间的各种退化系统

$$M\ddot{x} + (G + C)\dot{x} + Kx = f(t) \tag{1}$$

$$A\dot{y} + By = F(t) \tag{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} G + C & M \\ -M & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} K & \\ & M \end{bmatrix}, \quad y = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}, \quad F(t) = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

其中x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$和$f(t)$分别代表位移、速度、加速度和外力矢量, 同时假设质量阵M和刚度阵K都是正定的

通过推广Arnoldi方法[9,10], 采用以下广义Arnoldi算法可生成B正交矩阵Q, 方程(2)中的矩阵A同时被约化为上Hessenberg阵

1) 任取q_1为满足$||q_1|| = (q_1^{\mathrm{T}} B q_1)^{1/2} = 1$的随机矢量

2) 由下式递推生成后继的广义Arnoldi矢量

$$\beta_{k+1} q_{k+1} = r_k = B^{-1} A q_k - \sum_{i=1}^{k} h_{ik} q_i, \qquad k = 1, 2, \cdots \tag{4}$$

其中β_{k+1}和h_{ik}由$q_{k+1}^{\mathrm{T}} B q_{k+1} = 1$和$q_{k+1}^{\mathrm{T}} B q_i = 0$确定, 即

$$h_{ik} = q_i^{\mathrm{T}} A q_k, \qquad i = 1, 2, \cdots, k \tag{5a}$$

$$\beta_{k+1} = (r_k^{\mathrm{T}} B r_k)^{1/2} \tag{5b}$$

若到某一步k, 没有遇到中断, 可定义广义Arnoldi矢量矩阵和Hessenberg矩阵为

$$Q_k = [q_1, \cdots, q_k], \quad H_k = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1k} \\ \beta_2 & h_{22} & \cdots & h_{2k} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_k & h_{kk} \end{bmatrix} \tag{6}$$

系统矩阵可投影为

$$Q_k^{\mathrm{T}} B Q_k = I_k, \qquad Q_k^{\mathrm{T}} A Q_k = H_k \tag{7}$$

其中I_k和H_k分别为$k \times k$ $(k \le 2n)$的单位矩阵和上Hessenberg矩阵. 到$k = 2n$步可生成的$2n \times 2n$的上Hessenberg矩阵H_{2n}和B-正交矩阵Q_{2n}. 引入变换

$$y = Q_{2n} z \tag{8}$$

控制方程(2)可写为如下紧凑形式

$$H_{2n}\dot{z} + z = Q_{2n}^{\mathrm{T}} F(t) \tag{9}$$

包含在系统矩阵 M, G, C 和 K 的全部信息现在都包含于约化后的矩阵 H_{2n} 和 B-正交广义 Arnoldi 矢量矩阵 Q_{2n} 中.

对于无阻尼的陀螺系统, 广义 Arnoldi 法甚至比对称矩阵的 Lanczos 法和陀螺 Lanczos 法[12]更为简单, H_{2n} 成为结构非常简单的反对称矩阵[8, 9]

$$H_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_2 & & \\ \beta_2 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\beta_k \\ & & \beta_k & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

关于以上算法的数值特性和系统矩阵稀疏性的利用, 可参阅文献[9], [10]和[13].

2 本质减缩算法[11]

2.1 定理一: 关于上 Hessenberg 投影矩阵 H_k 结构的定理

对于由式(4)和(5a, 5b)确定的广义 Arnoldi 减缩算法, 对于任意 $k \geq 2$, 投影矩阵 H_k 的对角元素、上三角元素和广义的 Arnoldi 矢量 $q_1, \cdots, q_k$, 满足以下公式

$$h_{ii} = q_i^{1\{T} C q_i^1, \qquad i = 1, 2, \cdots, k \tag{11}$$

$$h_{i,i+1} = -\beta_{i+1} + 2 q_i^{1\{T} C q_{i+1}^1, \qquad i = 1, 2, \cdots, k-1 \tag{12}$$

$$h_{ij} = 2 q_i^{1\{T} C q_j^1, \qquad j \geq i+2, \quad i = 1, 2, \cdots, k-2 \tag{13}$$

$q_i^1 \in R^{n\times 1}$ 对应于相应的位移矢量, $q_i = \begin{bmatrix} q_i^1 \\ q_i^2 \end{bmatrix}$, $i = 1, 2, \cdots, k$.

有趣的是定理一本身恰是阻尼系统物理特性的一个良好反映. 阻尼陀螺系统在广义 Arnoldi 减缩过程中, 生成的投影矩阵 H_k 有如此简单的结构, 虽然系统有 M, G, C 和 K 四个矩阵, 但是投影矩阵 H_k 可仅由正交因子 β_i ($i = 2, \cdots, k$), 广义 Arnoldi 矢量 $q_1, \cdots, q_k$ 和阻尼矩阵 C 所表达.

需要指出的是, 正是由于系统矩阵 A 中阻尼阵 C 的出现破坏了 A 矩阵的对称性. 对于无阻尼系统(陀螺或非陀螺系统), 相应的 A 矩阵是反对称的; 对于阻尼系统, 系统矩阵 A 变为非对称的, 所以 A 矩阵的对称特性取决于系统的保守特性.

由定理一关于投影矩阵 H_k 的结构可知, 理论上系统矩阵 A 的对称性将保留于投影矩阵 H_k 中. 但是, 减缩过程中有限字长的数值运算, 使得定理仅能在计算机系统的误差范围内满足, 例如, 对于无阻尼系统的减缩, H_k 的对角元素应为零, 但实际上, 对角元素为与舍入误差同量级的非零值, 假如用双精度计算, 其值为 10^{-15} 量级. 为了提高减缩过程的精度和利用减缩过程中的结构节省计算量, 应用定理一可定义以下本质减缩算法.

2.2 本质减缩算法

1) 取 q_1 为满足 $\|q_1\| = 1$ 的随机矢量,

2) 后继的广义 Arnoldi 矢量由下式递推生成

$$\beta_{k+1} q_{k+1} = \begin{Bmatrix} r_k^1 \\ r_k^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -K^{-1}[(G q_k^1 + C q_k^1) + M q_k^2] \\ q_k^1 \end{Bmatrix} - \sum_{i=1}^{k} h_{ik} q_i, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{14}$$

$$h_{kk} = q_k^{1\{T} C q_k^1 \tag{15 b}$$

$$h_{k-1,k} = -\beta_k + 2 q_{k-1}^{1\{T} C q_k^1 \tag{15 c}$$

$$h_{ik} = 2 q_i^{1\{T} C q_k^1, \quad i = 1, 2, \cdots, k-2 \tag{15 d}$$

$$\beta_{k+1} = (r_k^{1\{T} K r_k^1 + r_k^{2\{T} M r_k^2)^{1/2} \tag{16}$$

和广义 Arnoldi 算法相比, 本质减缩算法有以下重要优点: 即正交化系数可在物理空间通过计算关于阻尼矩阵 C 的内积得到而不是计算关于状态空间矩阵 A 的内积 特别是对于集中阻尼系统, 每一个正交因子只需最多 n 次乘法就可获得而不管质量矩阵、陀螺矩阵和刚度矩阵是满的还是稀疏的, 本质减缩算法不仅在理论上是完善的, 而且在计算上也是经济的; 本质减缩方法在理论和数值上同时满足结构定理, 因此它能给出更精确的结果

3　统一的动态解耦理论

3.1 投影矩阵的 Schur 分解

一般而言, 非经典阻尼系统特征值问题具有复特征值 对于复特征值问题不可能有实的一维不变子空间, 所以如对非经典阻尼动力方程在实域解耦, 必须放弃解耦到单个标量方程的观点 实正交动态解耦方法由郑、任[10]提出

由实 Schur 型定理[15]知, 任意实矩阵都能通过正交矩阵变换为块上三角形式 对于方程(9)中的上 Hessenberg 矩阵 H_{2n}, 其 Schur 型 R 和相应的正交变换阵 U 可直接由带隐式双步移步 QR 法[14]计算, 有

$$H_{2n} U = UR, \quad U^T U = I_{2n} \tag{17 a, 17b}$$

$$U = [u_1, \cdots, u_{2n}], \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ & & \ddots & \\ & & & r_{mm} \end{bmatrix} \in R^{2n\times 2n} \tag{18 a, 18b}$$

$r_{ii}(i=1, \cdots, m)$ 是 1×1 或 2×2 的对角块 每一个 2×2 的对角块含有一对复共轭特征值 对角块的顺序可根据特征频率从低到高进行排序[14]. 定义广义 Schur 向量矩阵

$$V = Q_{2n} U \tag{19}$$

综合(7)和(17), 并利用(19), 广义 Schur 分解可表示为

$$V^T A V = R, \quad V^T B V = I_{2n} \tag{20}$$

令$y=Vs$, 方程(2)可变换为

$$R\overset{\circ}{s}+s=\overline{F}(t) \tag{21}$$

其中 $\overline{F}=V^{\mathrm{T}}F(t)$.

3.2 定理二: 关于解耦动力方程结构的定理

记广义 Schur 分解向量矩阵$V=Q_{2n}U=[v_1, v_2, \cdots, v_{2n}]$, 其中$Q_{2n}$和$U$ 分别为式(17)的B-正交矩阵和正交矩阵. 令$v_i=\begin{Bmatrix} v_i^1 \\ v_i^2 \end{Bmatrix}$ $(i=1, 2, \cdots, 2n)$, 选择 i, j 使 $\tilde{r}_{ij}$为式(21)矩阵R中的非对角 1×1 或 2×2 元素, 则

1) 对于 1×1 和 2×2 非对角块

$$\tilde{r}_{ij}=2v_i^{1\{\mathrm{T}}Cv_j^1 \tag{22}$$

2) 对于 1×1 对角块

$$\tilde{r}_{ii}=v_i^{1\{\mathrm{T}}Cv_i^1, \qquad i=1, 2, \cdots, 2n \tag{23}$$

3) 对于 2×2 对角块 $r_{kk}=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$, 其中非对角元

$$\alpha_{12}=-\alpha_{21}+2v_l^{1\mathrm{T}}Cv_{l+1}^1, \quad \alpha_{21}=-v_l^{2\{\mathrm{T}}Mv_{l+1}^1+v_l^{1\{\mathrm{T}}Mv_{l+1}^2+v_l^{1\{\mathrm{T}}Gv_{l+1}^1+v_l^{1\{\mathrm{T}}Cv_{l+1}^1 \tag{24}$$

v_l 和v_{l+1}相应于 r_{kk}的V 的列元素

从以上定理可以看出, 解耦矩阵 R 的结构揭示了相应于系统的物理特性

1) R 矩阵的非对角块和对角块仅由阻尼矩阵和相应的广义 Schur 矢量所确定. 如果没有阻尼, 则矩阵 R 被解耦为对角块形式

2) 由阻尼矩阵C 的半正定性得, $r_{ii}\geq 0$, $i=1, 2, \cdots, 2n$.

3) 不同的 Schur 矢量通过系统阻尼相耦合.

4) 如果将此实正交解耦方法限制在无阻尼陀螺系统, 则其结果正好是Meirovitch[1]和郑[2]的结果

3.3 动态解耦方法

1) 特征值的提取: 由式(2)到(21)相似变换, 两者具有等价的特征值解, 式(21)的特征值问题为

$$(\lambda R+I)S=0 \quad 或 \quad (R+1/\lambda I)S=0 \tag{25}$$

所以, 每一个特征值 λ 易于由 $\lambda=-1/\mu_i$ 求出, μ_i 是矩阵R 的 1×1 对角块或是 2×2 对角块的复特征值

2) 动力响应的计算: 将式(25)根据(18b)中R 的块结构写成块形式

$$r_{ii}\overset{\circ}{s}_i+s_i=\tilde{f}_i(t), \quad i=1, 2, \cdots, m \tag{26}$$

$$\tilde{f}_i(t)=\overline{f}_i(t)-\sum_{k=i+1}^{m}r_{ik}\overset{\circ}{s}_k, \quad \overline{F}(t)=\{\overline{f}_1^{\mathrm{T}}(t), \cdots, \overline{f}_m^{\mathrm{T}}(t)\}^{\mathrm{T}}, \quad s=\{s_1^{\mathrm{T}}, \cdots, s_m^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} \tag{27}$$

通过 $i=m,\cdots,1$ 反向求解(26)式, 能够以解耦的方式求得动力响应, 因为使用这一求解次序, 式(26)中的 $\tilde{f}_i(t)$ 由于所用到的 $\mathring{s}_k$ 都已解得, 所以其为已知的 1×1 和 2×1 矢量 解一个含有一个或两个未知参数的微分方程是没有困难的, 这就是所谓的非经典阻尼系统的动态正交解耦 和复模态理论相比, 有以下优点:

1) 适用于亏损系统: 不管投影矩阵 H_{2n} 的特征值问题亏损与否, 式(2)到(21)的系统方程的减缩和相应的解耦过程都不受影响

2) 不需要求解左特征值问题: 由于非对称矩阵左、右特征矢量和互正交性, 在复模态理论中, 为解耦动力方程不得不计算左右特征矢量 值得庆幸的是, 本文的解耦方法使用正交变换, 因而没有必要求解左特征矢量

3) 完全避免复数运算: 动力方程的减缩和动态解耦过程都仅涉及实正交变换 全部的计算都在实数域内进行, 数值特性很稳定

4　低频不变子空间和实用数值方法

由于现代结构系统的复杂性和有限元技术的广泛应用, 大量的系统动力分析需要很在的自由度来模拟其实际状态 但是, 在大型系统动力分析中包括所有的模态不仅不经济而且也没有必要, 其一是受到计算机能力的限制, 其二是通过有限元法离散所求得的高阶模态准确性也不高[16]. 因而寻找相应于低频的系统的不变子空间和分析系统在不变子空间上的投影是明智的选择 为了实现以减缩的方式在大型阻尼系统中应用本文的动态解耦方法, 需要以下的部分 Schur 分解

$$V_k^{\mathrm{T}}BV_k=I_k,\quad AV_k=V_kR_k \tag{28 a, 28b}$$

这里 R_k 是实 Schur 型, 所有 R_k 的对角块的特征值构成方程(2)特征值问题的连续的低频谱 对角块的顺序可根据特征频率的次序排列[14].

现有的可求解大型系统的部分实 Schur 分解的数值算法有不变子空间迭代法和最近发展带重启动的本质减缩方法[11]. 这里必须强调重启动技术对于减缩式特征值求解方法的重要性, 若没有检查并求出丢失的特征值手段, 则此特征值解法是不完善的, 特别是对于具有重特征值系统 算例充分展示了本质减缩算法和重启动技术[11]方法的有效性

5　结　论

通过一系列研究, 给出了大型阻尼系统动力分析的完全实数域方法 新方法的实质是用广义实 Schur 矢量对阻尼系统进行正交解耦代替了直接用复模态解耦 所得到的关于解耦系统结构的定理和在减缩过程中的本质规律表明新的动力分析方法很好地揭示了阻尼系统的物理特性, 同时, 基于两个定理得到了理论上完整、数值上稳定的本质算法, 且因在算法中嵌入理论结果而使得算法极大地降低了运算量 与复模态理论比较, 动态解耦理论具有以下优点: 完全避免了复数计算; 适用于亏损和非亏损系统; 同时克服了计算伴随问题; 计算稳定且更有效

参　考　文　献

1　Meirovitch L. A new method of solution of the eigenvalue problem for gyroscopic systems *AIAA J*, 1974, 12(10): 1337～1342

2 Zheng ZC, Zhou XP. Gyroscopic mode synthesis in the dynamic analysis of a multi-shaft rotor-bearing system. ASME 85-IGT-73, 1985. 1～7
3 Caughey TK, O'Kelly MEJ. Classical normal mode in damped linear dynamic system. *ASME J of Applied Mechanics*, 1965, 32: 583～588
4 Liu M and Wilson JM. Criterion for decoupling dynamic equation of motion of a linear gyroscopic system. *AIAA J*, 1992, 30(12): 2989～2991
5 Meirovitch L. Analytical Methods in Vibrations. London: The Macmillan Co, 1967
6 Zhu DC, Shi GQ. The determination of the defectiveness of linear structural dynamic systems. *Computer and Structure*, 1988, 30: 897～899
7 Arnoldi WE. The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problems. *Quart Appl Math*, 1951, 9: 17～29
8 Ren GX. Numerical methods for large scale gyroscopic eigenvalue problem: [Dissertation]. Beijing: Tsinghua University, 1993. 1～100
9 Zheng ZC, Ren GX. Large scale non-symmetric eigenvalue problem in structural dynamics. In: Proc. 13-th IMAC, Nashville, USA, 1995-02-13-16. 1995. 1622～1629
10 Zheng ZC, Ren GX. Dynamic orthogonal decoupling of the non-classically damped dynamic systems. In: D. M. Zhu and J. M. Ko ed. Proc. SDVNC'95, Hong Kong, 1995-12-05-07, Hong Kong: Color Max Commercial Printing Company Ltd, 1995. 125～130
11 Ren GX. Method for large scale non-classically damped eigenvalue problem, Part - I, A material reduction algorithm, Part - II, A restart technique: [Postdoctoral research report]. Beijing: Tsinghua University, 1995. 20～55
12 Bauchau OA. A solution of the eigenvalue problem for undamped gyroscopic systems. *Int J Num Met Eng*, 1986, 25: 1705～1713
13 Wilkinson JH. The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford: Clarendon Press, 1965
14 Stewart GW, Algorithm 406: HQR3 and EXCHNG: Fortran subroutines for calculating and ordering the eigenvalues of a real upper Hessenberg matrix. *ACM Trans Math Soft*, 1976, 2: 275～280
15 Golub, GH, Van Loan CF. Matrix Computations. Baltimore and London: The John Hopkins University Press, 1989. 361～362
16 Strang G, Fix GJ. An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1973
17 Stewart GW. Simultaneous iteration for computing invariant subspaces of non-Hermitian matrices. *Numer Math*, 1976, 25: 123～136

THE ANALYTICAL APPROACH FOR LARGE SCALE NON-CLASSICALLY DAMPED DYNAMIC SYSTEM

Zheng Zhaochang Ren Gexue
(*Dept. of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*)

Abstract This paper gives a dynamic decoupling approach for the analysis of large scale non-classically damped system, in which the complex number computations were completely avoided not only in solving for the eigenvalue problem but also in the calculation of the dynamic response. The analytical approach for undamped gyroscopic system, non-classicaly damped system, including the damped gyroscopic system were unified. Very interesting and useful theoretical results, practical algorithms were obtained which is applicable to both non-defective and defective systems

Key words dynamic decoupling approach, non-clasically damped system, gyroscopic system, defective, reduction