第 28 卷 第 3 期 力 学 学 报 Vol 28, No. 3
1996 年 5月 ACTA MECHANICA SINICA May, 1996

一类强非线性振动系统的分叉

唐驾时 尹小波
(湖南大学工程力学系, 长沙 410082)

摘要 对于参数激励和强迫激励共同作用的一类强非线性系统, 本文先用改进的L-P 方法求出了变换参数, 使该系统的解能展为小参数的幂级数. 然后利用多尺度法求出了该系统的分叉响应方程. 研究了这类强非线性系统的余维1分叉问题, 画出了转迁集和分叉图.

关键词 强非线性系统, 分叉, 亚谐共振

引 言

非线性振动系统的分叉研究是非线性动力学研究的一项重要课题, 引起了许多科技工作者的注意. 分叉问题有许多种类. 对于弱非线性问题, 人们研究得比较多. 陈予恕和Langford 用L-S 方法研究了非线性Mathieu 方程在1/2亚谐共振时的分叉问题[1]. 张伟和霍拳忠[2]用多尺度法研究了参数激励与强迫激励联合作用下非线性振动系统在1/2亚谐共振—— 主参数共振时的分叉问题. 还有许多研究成果在文献[3]进行了综述. 对于强非线性系统, Holmes 和Rand 研究了Van der Pol-Duffing 型强非线性振子的局部分叉和全局分叉特性[4]. Greenspan 和Holmes[5]利用Melnikov 方法研究了具有强迫激励时Van der Pol-Duffing 型强非线性振子的同宿分叉特性.

本文研究在参数激励和强迫激励共同作用下的强非线性振动的分叉问题. 考虑由下面的微分方程控制的系统

$$\ddot{x} + 2\epsilon\eta\dot{x} + (\omega_0^2 + 2\epsilon\cos 2t)\left(x + \frac{\epsilon}{\lambda}x^3\right) = 2\epsilon P\cos\Omega t \tag{1}$$

其中 ϵ 可以是较大的数. $\dfrac{1}{\lambda}$ 为非线性项系数, 为便于后面的讨论, 写成分数形式. 首先, 用改进的L-P 方法进行参数变换, 使变换后的方程的解可以展成一个小参数的幂级数. 然后利用多尺度法求出该系统的分叉响应方程. 分叉研究主要分析定常解的稳定性, 讨论分叉方程的开折和分叉曲线的拓扑结构.

1 用改进的L-P 方法定变换参数

由于方程(1)中的参数 ϵ 可以是较大的数, 因此它是一个强非线性振动方程. 解强非线性振动问题有一些方法. Y. K. Cheung, S. H. Chen 和S. L. Lau[6]采用变换

$$\alpha = \frac{\epsilon\omega_1}{\omega_0^2 + \epsilon\omega_1} \tag{2}$$

1994-09-02收到第一稿, 1994-12-27收到修改稿.

提出了一种改进的L-P 方法, 解决了一类强非线性振动方程的近似求解问题 分析方程(1)控制的强非线性系统, 我们设

$$\alpha = \frac{\epsilon\omega_1}{4\omega_0 + \epsilon\omega_1} \tag{3}$$

其中 ω_0为方程(1)对应的线性系统的固有频率, 参数 ω_1可用L-P 方法来确定

考虑1/2亚谐共振情况 设 $\Omega = 2$, 并令 $\tau = \Omega t$, 则(1)式变为

$$\Omega^2\ddot{x} + 2\epsilon\eta\Omega\dot{x} + (\omega_0^2 + 2\epsilon\cos\tau)\left(x + \frac{\epsilon}{\lambda}x^3\right) = 2\epsilon p\cos\tau \tag{4}$$

由(3)式知

$$\epsilon = \frac{4\omega_0^2\alpha}{\omega_1(1 - \alpha)} \tag{5}$$

将 Ω^2写成

$$\Omega^2 = 4\omega_0^2 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \cdots$$

则

$$\begin{aligned}\Omega^2 &= \frac{4\omega_0^2}{1 - \alpha}\left[1 + \frac{1 - \alpha}{4\omega_0^2}\left(\epsilon^2\omega_2 + \epsilon^3\omega_3 + \cdots\right)\right] \\ &= \frac{4\omega_0^2}{1 - \alpha}(1 + \delta_2\alpha^2 + \delta_3\alpha^3 + \cdots)\end{aligned} \tag{6}$$

或

$$\Omega = 2\omega_0\left[1 + \frac{1}{2}\alpha + \left(\frac{3}{8} + \frac{\delta_2}{2}\right)\alpha^2 + \cdots\right] \tag{7}$$

设方程(4)的解为

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots \tag{8}$$

将(6)～(8)式代入(4)式得

$$\begin{aligned}&\frac{4\omega_0^2}{1 - \alpha}(1 - \delta_2\alpha^2 + \delta_3\alpha^3 + \cdots)(\ddot{x}_0 + \alpha\ddot{x}_1 + \alpha^2\ddot{x}_2 + \cdots) + \\ &\quad 2\cdot\frac{4\omega_0^2\alpha}{\omega_1(1 - \alpha)}\eta\cdot 2\omega_0\left[1 + \frac{1}{2}\alpha + \left(\frac{3}{8} + \frac{\delta_2}{2}\right)\alpha^2 + \cdots\right]\cdot \\ &\quad (\dot{x}_0 + \alpha\dot{x}_1 + \alpha^2\dot{x}_2 + \cdots) + \left[\omega_0^2 + 2\cdot\frac{4\omega_0^2\alpha}{\omega_1(1 - \alpha)}\cos\tau\right]\cdot \\ &\quad \left[x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots + \frac{4\omega_0^2\alpha}{\lambda\omega_1(1 - \alpha)}\left(x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots\right)^3\right] = \\ &\quad 2\frac{4\omega_0^2\alpha}{\omega_1(1 - \alpha)}P\cos\tau\end{aligned} \tag{9}$$

将(9)式展开, 令 α同次幂系数相等, 得

$$\ddot{x}_0 + \frac{1}{4}x_0 = 0 \tag{10}$$

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{4}x_1 = \frac{1}{2}x_0 - \frac{2}{\omega_1}x_0\cos\tau - \frac{\omega_0^2}{\omega_1}\frac{1}{\lambda}x_0^3 - \frac{4\omega_0}{\omega_1}\eta\dot{x}_0 + \frac{2P}{\omega_1}\cos\tau + \ddot{x}_0 \tag{11}$$

方程(10)的解为

$$x_0 = a_0\cos\frac{\tau}{2} + b_0\sin\frac{\tau}{2} \tag{12}$$

将(12)式代入(11)式得

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{4}x_1 = \frac{1}{2}a_0\cos\frac{\tau}{2} + \frac{1}{4}b_0\sin\frac{\tau}{2} - \frac{2}{\omega_1}\left(a_0\cos\frac{\tau}{2} + b_0\sin\frac{\tau}{2}\right)\cos\tau - \frac{\omega_0^2}{\omega_1}\frac{1}{\lambda}\left(a_0\cos\frac{\tau}{2} + b_0\sin\frac{\tau}{2}\right)^3 - \frac{4\omega_0}{\omega_1}\eta\left(-\frac{a_0}{2}\sin\frac{\tau}{2} + \frac{b_0}{2}\cos\frac{\tau}{2}\right) + \frac{2p}{\omega_1}\cos\tau - \frac{1}{4}\left(a_0\cos\frac{\tau}{2} + b_0\sin\frac{\tau}{2}\right) \tag{13}$$

要消去(13)式解中的永年项, 须令

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2\omega_0\eta a_0}{\omega_1} + \frac{b_0}{4} - \frac{3\omega_0^2 b_0^3}{4\omega_1\lambda} - \frac{3\omega_0^2 a_0^2 b_0}{\omega_1\lambda}\ \frac{b_0}{\omega_1} = 0 \\ &-\frac{2\omega_0\eta b_0}{\omega_1} + \frac{a_0}{4} - \frac{3\omega_0^2 a_0^3}{4\omega_1\lambda} - \frac{3\omega_0^2 a_0 b_0^2}{4\omega_1\lambda} - \frac{a_0}{\omega_1} = 0 \end{aligned}\right\}$$

解上方程得

$$\omega_1 = \frac{3\omega_0^2}{\lambda}(a_0^2 + b_0^2) - 4 - 8\omega_0\eta\frac{a_0}{b_0} \tag{14}$$

$$b_0 = \frac{a_0}{2\omega_0\eta}\left(-1 + \sqrt{1 - 4\omega_0^2\eta^2}\right) \tag{15}$$

这样就确定了(3)式中的 ω_1, 它与系统的参数 ω_0, η, λ 和振幅 a_0 有关

2　分叉响应方程

由于 α 是一个小参数, 所以用变换(3)式可以将强非线性系统(1)变成为一个弱非线性系统 将(3), (6)和(7)式代入(1)式得

$$\frac{4\omega_0^2}{1-\alpha}(1 + \delta_2\alpha^2 + \delta_3\alpha^3 + \cdots)\ddot{x} + 2\cdot\frac{4\omega_0^2\alpha}{\omega_1(1-\alpha)}\eta\cdot 2\omega_0\left[1 + \frac{1}{2}\alpha + \left(\frac{3}{8} + \frac{\delta_2}{2}\right)\alpha^2 + \cdots\right]\dot{x} + \left(\omega_0^2 + 2\cdot\frac{4\omega_0^2\alpha}{\omega_1(1-\alpha)}\cos\tau\right)\cdot\left(x + \frac{4\omega_0^2\alpha}{\lambda\omega_1(1-\alpha)}x^3\right) = 2\frac{4\omega_0^2\alpha}{\omega_1(1-\alpha)}p\cos\tau \tag{16}$$

将方程(16)的解展成小参数 α 的幂级数, 用多尺度法来求它的分叉响应方程, 设

$$x = x_0(T_0, T_1) + \alpha x_1(T_0, T_1) + \cdots \tag{17}$$

其中 $T_0 = \tau$, $T_1 = \alpha\tau$

考虑1/2亚谐——主共振情况, 设 $\omega_0 \approx 1$. 若原方程不进行调谐, 将(17)式代入(16)式, 令 α 的同次幂的系数相等, 得

$$\begin{aligned} &D_0^2 x_0 + \frac{1}{4}x_0 = 0 \\ &D_0^2 x_1 + \frac{1}{4}x_1 = -2D_0D_1x_0 - \frac{4\eta}{\omega_1}D_0x_0 + \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{\lambda\omega_1}x_0^3 + \frac{2p}{\omega_1}\cos T_0 - \frac{2}{\omega_1}x_0\cos T_0 + D_0^2x_0 \end{aligned} \tag{19}$$

设方程(18)式的复数形式的解为

$$x_0=A\left(\frac{T_0}{2}\right)e^{iT_0/2}+\overline{A}\left(\frac{T_0}{2}\right)e^{-iT_0/2} \tag{20}$$

这里$\overline{A}$ 为A 的共轭复数, 将(20)式代入(19)式, 并利用关系式$\cos T_0=(e^{iT_0}+e^{-iT_0})/2$, 整理得

$$\begin{aligned}D_0^2x_1+\frac{1}{4}x_1=&\left(-iD_1A-i\frac{2\eta}{\omega}A+\frac{1}{2}A-\frac{3}{\lambda\omega}A^2\overline{A}-\frac{2\overline{A}}{\omega}\right)e^{iT_0/2}-\\&\left(\frac{A^3}{\lambda\omega}+\frac{2A}{\omega}\right)e^{i(3T_0/2)}+\frac{2p}{\omega}\cos T_0+cc\end{aligned} \tag{21}$$

cc 表示前面项的共轭项. 要使解中不出现长期项, 须有

$$D_1A=-\frac{2\eta}{\omega}A+\frac{3i}{\lambda\omega}A^2\overline{A}+i\frac{2\overline{A}}{\omega}-\frac{1}{4}iA \tag{22}$$

再设$A=u+iv$, 这里u 和v 是T_1的实函数. 将A 代入(22)式, 分离实部和虚部, 便得平均方程为

$$\left.\begin{aligned}u'&=-\frac{2\eta}{\omega}u-\frac{3}{\lambda\omega}(u^2+v^2)v+\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{4}\right)v\\v'&=\frac{2\eta}{\omega}v+\frac{3}{\lambda\omega}(u^2+v^2)u+\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{4}\right)u\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

方程(23)也可称为余维1规范形(Normal form), 因而系统可产生余维1分叉. 方程(23)式的Jacobi矩阵为

$$D_wf=\begin{bmatrix}-\frac{2\eta}{\omega}-\frac{3}{\lambda\omega}uv & \frac{1}{\omega}+\frac{1}{4}-\frac{6}{\lambda\omega}(u^2+3v^2)\\\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{4}\right)+\frac{6}{\lambda\omega}(v^2+3u^2) & -\frac{2\eta}{\omega}+\frac{3}{\lambda\omega}uv\end{bmatrix} \tag{24}$$

其中

$$\omega=(u,v)^{\mathrm{T}},f=\begin{bmatrix}-\frac{2\eta}{\omega}u-\frac{3}{\lambda\omega}(u^2+v^2)v+\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{4}\right)v\\-\frac{2\eta}{\omega}v+\frac{3}{\lambda\omega}(u^2+v^2)u+\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{4}\right)u\end{bmatrix} \tag{25}$$

在零解$(u,v)=(0,0)$处的Jacobi矩阵为

$$D_mf\Big|_{(0,0)}=\begin{bmatrix}-\frac{2\eta}{\omega} & \frac{1}{\omega}+\frac{1}{4}\\\frac{1}{\omega}-\frac{1}{4} & -\frac{2\eta}{\omega}\end{bmatrix} \tag{26}$$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix}r+\frac{2\eta}{\omega} & \frac{1}{\omega}+\frac{1}{4}\\\frac{1}{\omega}-\frac{1}{4} & r+\frac{2\eta}{\omega}\end{vmatrix}=0$$

即

$$r^2+\frac{4\eta}{\omega}r+\frac{4\eta^2}{\omega^2}-\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{16}=0 \tag{27}$$

解方程(27)得特征根

$$r_1 = -\frac{2\eta}{\omega_1} + \sqrt{\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{16}},\quad r_2 = -\frac{2\eta}{\omega_1} - \sqrt{\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{16}} \tag{28}$$

同时, 把(23)式化为极坐标形式下的平均方程, 即令 $u = a\cos\phi/2, v = a\sin\phi/2$, 其中 a 为振幅, 可以得到分叉响应方程为

$$\left(\frac{2\eta a}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a - \frac{3a^2}{4\lambda\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{a}{\omega_1}\right)^2 \tag{29}$$

3　定常解的稳定性

我们根据定常解的特征根来判别定常解的稳定性. (27)式与标准方程比较有

$$p = \frac{4\eta}{\omega_1},\quad q = \frac{4\eta^2}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{16},\quad \Delta = p^2 - 4q = 4\left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{16}\right)$$

考虑 $\Delta > 0$ 的情况, 零解的两特征根都为实数.

1. 若 $\frac{4\eta}{\omega_1} > 0$, 且 $\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{16} < \left(\frac{2\eta}{\omega_1}\right)^2$ 时, r_1 和 r_2 为不等于零的同号两相异实根. 它对应于 $\Delta > 0, q > 0, p > 0$. 点(0, 0)是唯一奇点, 且为不稳定结点.
2. 若 $\frac{4\eta}{\omega_1} > 0$, 且 $\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{16} > \left(\frac{2\eta}{\omega_1}\right)^2$ 时, 奇点为鞍点, 定常解不稳定.
3. 若 $\frac{4\eta}{\omega_1} < 0$, 且 $\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{16} < \left(\frac{2\eta}{\omega_1}\right)^2$ 时, 奇点为稳定结点.
4. 若 $\frac{4\eta}{\omega_1} < 0$, 且 $\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{16} > \left(\frac{2\eta}{\omega_1}\right)^2$ 时, 奇点为不稳定鞍点.

4　分叉曲线的拓扑结构

对于分叉方程(29)式, 如果我们取 $\omega_0 = 1, a_0 = 1$, 则

$$\omega_1 = \frac{3}{\lambda}(1 + b_0^2) - 4\sqrt{1 - 4\eta^2},\quad b_0 = \frac{1}{2\eta}\left(-1 + \sqrt{1 + 4\eta^2}\right)$$

将(29)式变形为

$$(3a^2 - \lambda\omega_1)^2 + 16\lambda^2(4\eta^2 - 1) = 0 \tag{30}$$

或

$$a = 0$$

将(30)式展开, 得

$$a^4 + \beta\lambda a^2 + 2ra^2 + \beta r\lambda + r^2 = 0 \tag{31}$$

其中

$$\beta = \frac{8}{3}\sqrt{1 - 4\eta^2},\quad r = -(1 + b_0^2) < 0$$

在考虑扰动的情况下, 由奇异性理论[7]可知, (31)式的一个普适开折为

$$G(a, \lambda, \alpha) = a^4 + \beta\lambda a^2 + 2ra^2 + \beta r\lambda + r^2 + \alpha_1 + \alpha_2 a = 0 \tag{32}$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T \in \mathbf{R}^2$.

为求得系统的拓扑结构, 需要利用转迁集 $\sum = B \cup H \cup D$. 设 $G: R \times R \times R^k \to R$.

1. 分叉集 $B = \{\alpha \in R^k: \exists (a, \lambda) \in R \times R$, 使得 $G = G_a = G_\lambda = 0$ 在 (a, λ, α) 点成立$\}$.

2. 滞后集 $H = \{\alpha \in R^k: \exists (a, \lambda) \in R \times R$, 使得 $G = G_a = G_{aa} = 0$ 在 (a, λ, α) 点成立$\}$.

3. 双极限点集 $D = \{\alpha \in R^k: \exists (a_1, a_2, \lambda) \in R \times R \times R, a_1 \neq a_2$, 使得 $G = G_a = 0$ 在 (a_i, λ, α) 点成立, $i = 1, 2\}$.

通过计算, 可求得转迁集为

$$B_1 = \left\{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{-r} = 0\right\}$$

$$B_2 = \left\{\alpha_1 - \alpha_2\sqrt{-r} = 0\right\}$$

$$H = \left\{\alpha_1 = -\frac{3}{16}\alpha_2^{4/3} + \frac{3}{2}\alpha_2^{2/3} + r^2\right\}$$

$$D = \phi$$

图1 转迁集

Fig. Transition set

故 $\sum = B_1 \cup B_2 \cup H$. 画出转迁集如图1所示, 分叉图如图2所示

图2 分叉图

Fig. 2 Bifurcation curves

5 结 论

本文提出了一种分析强非线性系统分叉问题的有效方法, 即先用改进的 L-P 方法求变换参数, 然后用多尺度法求变换后系统的分叉响应方程 从而可分析强非线性系统的余维1分叉

等静态分叉

通过求分叉方程的转迁集, 得到了不同区域里的拓扑结构, 每九个区域中的任一个区域里分叉响应曲线图拓扑等价. 但对于退化奇点的余维2分叉, 需要利用中心流形理论和普适开折理论来进行分析, 我们以后将继续讨论

用改进的L-P 方法进行参数变换是一个很有趣的问题, 并且有着非常丰富的模式, 可以深入研究, 这是解决强非线性振动问题的一个有效方法

参 考 文 献

1 陈予恕, W F 郎福德 非线性马休方程的亚谐分叉解及欧拉动弯曲问题 力学学报, 1988, 20(6): 522～531

2 张 伟, 霍拳忠 参数激励与强迫激励联合作用下非线性振动系统的分叉 力学学报, 1991, 23(4): 464～474

3 陈予恕 非线性振动、分叉和混沌理论及其应用 振动工程学报, 1992, 5(3): 235～256

4 Holmes PJ, Rand DA. Phase portraits and bifurcation of the nonlinear oscillator $\ddot{x} + (\alpha + rx^2)\dot{x} + \beta x + \delta x^2 = 0$. *Int J Nonlinear Mech*, 1980, 15(5): 449～458

5 Greenspan BD, Holmes PJ. Repeated resonance and homoclinic bifurcation in a periodically forced family of oscillators *SIAM J Math Anal*, 1984, 15(1): 69～87

6 Cheung YK, Chen SH, Lau SL. A Modified, Lindstedt-Poincaré method for certain strongly non-linear oscillators *Int J Non-linear Mech*, 1991, 26(3, 4): 367～378

7 陆启韶 常微分方程的定性方法和分叉 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989

BIFURCATIONS OF A CLASS OF STRONGLY NONLINEAR OSCILLATION SYSTEMS

Tang Jiashi　Yin Xiaobo

(*Hunan University*, *Changsha* 410082, *China*)

Abstract A new method is presented for studying problems of bifurcation of a class of strongly nonlinear systems under combined parametric and forcing excitation. A large parameter is transformed into a small parameter by using the modified L-P method so that the solution is expanded in powers of α The bifurcation response equation is obtained by using the method of multiple scales We discuss the degenerate bifurcation of codimension 1 and obtain the various bifurcation diagrams

Key words strongly nonlinear system, bifurcation, subharmonic resonance