第 28 卷 第 3 期　　力　学　学　报　　Vol 28, No. 3
1996 年 5 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　May, 1996

用 RNG K-ϵ 模式数值模拟 180° 弯道内的湍流分离流动

王少平　曾扬兵　沈孟育
(清华大学工程力学系, 北京 100084)
中　峰　徐　忠
(西安交通大学动力系, 西安 710049)

摘要　将 Yakhot 与 Orszag 新近提出的 RNG K-ϵ 湍流模式推广应用于 180 强曲率弯道内的湍流分离流动的数值模拟, 计算在任意曲线坐标下进行, 并采用速度协变分量作为求解变量以保证计算的高度稳定性, 控制方程的求解采用通常的控制容积法, 文中给出了详细的数值计算结果, 并与实验结果进行了比较, 结果表明, RNG K-ϵ 湍流模式能有效地模拟有强曲率影响的湍流分离流动, 展示了这一模式在工程湍流计算中的前景

关键词　RNG K-ϵ 湍流模式, 湍流分离流动, 强曲率道, 任意曲线坐标系, 协变分量

引　言

近二十年来, 标准 K-ϵ 两方程湍流模式[1]及其各种修正形式的湍流模式[2~6], 在工程湍流计算中发挥了重要作用

最近, Yokhot 与 Orszag[7]应用重整化群的方法导出了一个新型的 K-ϵ 模式, 简称为 RNG K-ϵ 模式 对于高 Re 数的湍流, RNG K-ϵ 模式具有与标准 K-ϵ 模式相同的形式, 只不过在方程中出现了一个附加生成项, 当流动快速畸变时, 这一项显著增大 RNG K-ϵ 模式与标准 K-ϵ 模式的一个显著不同点在于, 前者适用于低 Re 数区域, 可直接积分至壁面 另外, 它们的模式系数也不同, RNG K-ϵ 模式的系数均由理论计算得出且显式出现于方程中, 计算起来非常方便

自 RNG K-ϵ 模式提出以来, Speziale 与 Thangam[8], Yakhot 等[9]及本文作者[7]应用该模式分别求解了绕后台阶湍流流动, 获得了满意结果, 但迄今少见应用该模式求解其它复杂湍流流动的研究工作的报道

本文将 RNG K-ϵ 模式推广应用于 180 强曲率弯道内湍流分离流动的数值模拟, 并将数值结果与有关实验结果进行比较, 以考察 RNG K-ϵ 模式对有强曲率影响的湍流分离流动的实际预测能力

1　物理问题的数学描述

1.1 控制方程与 RNG K-ϵ 模式

考虑如图1所示180°强曲率弯道内的不可压缩湍流流动, 该问题可由如下雷诺时均

1995—05—26 收到

图 1 180 强曲率弯道网格分布示意图

Fig. 1 Grid system for 180 degree turn-around duct

Navier-Stokes 方程和连续方程来描述

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu+\nu_T)\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\right] \tag{1}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}=0 \tag{2}$$

其中 $\bar{u}_i$ 为平均流速, $\bar{p}$ 是平均压力, ν 与 ν_T 分别为分子粘性系数和涡粘性系数。对高 Re 数湍流, 涡粘性系数可取如下表达式

$$\nu_T=C_\mu\frac{K^2}{\epsilon} \tag{3}$$

式中

$$K=\frac{1}{2}\overline{u_iu_i},\qquad \epsilon=\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \tag{4}$$

分别为湍动能和耗散率, C_μ 为一无因次常数。其值应用 RNG 理论计算为 0.085。湍动能和耗散率一般由各自模化后的输动方程得到, 对高 R_e 数问题, 有如下 K 方程和 ε 方程

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial K}{\partial x_j}=P_K-\epsilon+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_K}\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right] \tag{5}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}=C_{\epsilon1}\frac{\epsilon}{K}P_K-C_{\epsilon2}\frac{\epsilon^2}{K}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon}\right)\frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}\right] \tag{6}$$

其中 P_K 为湍动能生成项, 由下式表达

$$P_K=2\nu_T\overline{S_{ij}S_{ij}} \tag{7}$$

$$\bar{S}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{8}$$

$\bar{S}_{ij}$ 为平均应变率量张量。在模式方程 (5)～(6) 中包含四个系数 $C_{\epsilon1}$, $C_{\epsilon2}$, σ_K 和 σ_ϵ。这些系数可给出如下:

标准 K-ϵ 模式[2]

$$C_\mu=0.09,\quad C_{\epsilon1}=1.44,\quad C_{\epsilon2}=1.42,\quad \sigma_K=1.0,\quad \sigma_\epsilon=1.3 \tag{9}$$

RNG K-ϵ 模式[7,9,10]

$$C_\mu=0.085,\quad C_{\epsilon1}=1.42-\frac{\eta(1-\eta/\eta_0)}{1+\beta\eta^3},\quad C_{\epsilon2}=1.68,\quad \sigma_K=0.7179,\quad \sigma_\epsilon=0.7179 \tag{10}$$

其中

$$\eta=SK/\epsilon,\quad S=(2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2},\quad \beta=0.015,\quad \eta_0=4.38$$

1.2 任意曲线坐标系下的控制方程

为了适应复杂曲域内的流动并降低对网格生成的要求, 本文将直角坐标系的方程变换到任意曲线坐标系下(见图 2)

设

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

那么可得 ξ-η 坐标系下的通用微分方程为

$$\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho \overline{U}\Phi) + \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}(\rho \overline{V}\Phi) = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\Gamma_\Phi}{J}(\alpha \Phi_\xi - \beta \Phi_\eta)\right] + \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\Gamma_\Phi}{J}(\gamma \Phi_\eta - \beta \Phi_\xi)\right] + S_\Phi \tag{12}$$

其中

$$\overline{U} = u y_\eta - v x_\eta, \qquad \overline{V} = v x_\xi - u y_\xi$$

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2, \qquad \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$$

$$\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2, \qquad J = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta$$

Φ 为原直角坐标系下的任一输运量, S_Φ 为输运量在 ξ-η 系下的源项, 其具体形式参见文献[11].

图 2 任意曲线坐标系

Fig. 2 Generalized coordinate system

图 3 交错网格示意图

Fig. 3 Staggered grid

在物理平面的计算域内使用交错网格(见图 3), 将方程(12)在围绕 P 点的控制体界面的值和其一阶导数规定取值方式后, 最后可得如下形式的离散方程

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_S \Phi_S + a_N \Phi_N + b \tag{13}$$

a_E, a_W, a_N, a_S 表达式参见文献[11].

1.3　采用速度协变分量作为求解变量后的离散方程

关于速度与压力的耦合问题, 在控制容积法中采用压力修正与交错网格技术以后压力场的波动问题得到了解决. 但是, 当将交错网格技术直接应用到任意曲线坐标系时, 由于笛卡尔速度分量不再与网格线的方向一致, 单独采用交错网格技术已不能有效地消除压力场的波动. 解决这个问题的方法之一就是利用逆变分量或者协变分量与网格线之间的关系, 在动量方程中, 将它们作为因变量求解. 但这种方法并没有被广泛采用, 原因之一就是导出的守恒方程很

复杂, 且包含 Christoffel 符号和度量张量的曲率或非正交项的源项, 相当繁杂和冗长 Karki 和 Patankar[12] 利用代数处理技巧推出了采用协变物理分量作为因变量的离散方程组, 使整个推导过程简单明了.

本文采用上述方法, 最后可导得以速度协变分量为求解变量的离散化方程

$$\left.\begin{aligned} a_e \cdot u_{\xi,e} &= \sum a_{nb} \cdot u_{\xi,nb} + A_\xi (P_P - P_E) + b_{u,\xi} \\ a_n \cdot v_{\eta,n} &= \sum a_{nb} \cdot v_{\eta,nb} + A_\eta (P_P - P_N) + b_{v,\eta} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

其中

$$A_\xi = (J \cdot \triangle\eta)_e, \qquad A_\eta = (J \cdot \triangle\xi)_n$$

$$b_{n,\xi} = b'_{u,\xi} + b_{\mathrm{curv},\xi}, \qquad b_{v,\eta} = b'_{v,\eta} + b_{\mathrm{curv},\eta}$$

而

$$\begin{aligned} b_{\mathrm{curv},\xi} = {} & a_E (u'_{\xi E} - u_{\xi E}) + a_W (u'_{\xi W} - u_{\xi W}) + \\ & a_N (u'_{\xi N} - u_{\xi N}) + a_S (u'_{\xi S} - u_{\xi S}) \\ b_{\mathrm{curv},\eta} = {} & a_E (v'_{\eta E} - v_{\eta E}) + a_W (v'_{\eta W} - v_{\eta W}) + \\ & a_N (v'_{\eta N} - v_{\eta N}) + a_S (v'_{\eta S} - v_{\eta S}) \end{aligned}$$

式中 $b'_{u,\xi}$, $b'_{v,\eta}$ 不含压力梯度 从方程(14)中可以明显看出, 位于控制体界面上的速度直接感受到相邻节点上的压力, 和交叉方向的压力梯度无关, 从而使速度场和压力场的关联得到了圆满解决, 这在一定程度上使计算具有良好的稳定性和收敛性

1.4 压力修正方程

为了导出压力修正方程, 设(上标" * "表示迭代上一次值, 上标" ′ "表示修正量)

$$u_\xi = u^*_\xi + u'_\xi, \quad v_\eta = v^*_\eta + v'_\eta, \quad P = P^* + P', \quad \rho = \rho^* + \rho'$$

采用与 SIMPLE 方法类似的做法, 最后可导得压力修正方程如下

$$A_P P'_P = A_E P'_E + A_W P'_W + A_N P'_N + A_S P'_S + b_0 + b_1 \tag{15}$$

其中

$$b_0 + b_1 = (\rho^* \overline{U}^* \triangle\eta)_w - (\rho^* \overline{U}^* \triangle\eta)_e + (\rho^* \overline{V}^* \triangle\xi)_s - (\rho^* \overline{V}^* \triangle\xi)_n$$

具体推导过程见文献[11].

K 和 ε 的离散化方程仍取(13)的形式

1.5 数值解法与定解条件

方程(14)～(15)加上 K 和 ε 的离散化方程构成了最后的离散化方程组, 采用线松驰加块修正的方法进行求解

计算参照文献[13]的实验条件进行. 以通道高度和进口平均流速为特征量和来流 R_e 数为 300 000, 拐弯上游处为充分发展湍流, 出口为均匀流 网格分布图如图 1 所示, 网格数取为 142 ×82 进口条件由计算一足够长通道内湍流发展流动充分发展后的流动参数来确定, 通道出口提出流条件

2　计算结果与讨论

为便于说明问题, 本文还采用标准 K-ϵ 模式并结合两层壁面率求解了弯道内的流动, 网格取 142×42 的非均匀网格

图 4 给出了标准 K-ϵ 模式和 RNG K-ϵ 模式得到的不同截面平均流速分布与实验值的比较 由图可见, 在弯道拐弯后尤其是进入分离区内, 标准 K-ϵ 模式与实验值相比误差较大, 而 RNG K-ϵ 模式的结果与实验值符合较好.

图 4　不同截面平均流速分布
FIg. 4 Mean velocity profiles in 180 degree turn- round duct

图 5 给出了标准 K-ϵ 模式和 RNG K-ϵ 模式求得的壁面压力系数分布图 由图可知, 两者差别甚微, 与实验值符合较好. 只是在凸壁边 RNG K-ϵ 模式的值与实验值和符合程度稍差一些

图 5　壁面压力系数分布图
Fig. 5 Pressure coefficient distribution for 180 degree turn- around duct

图 6 给出了标准 K-ϵ 模式和 RNG K-ϵ 模式得到的不同截面湍流脉动平均速度分布及其与实验值的比较 显然, 标准 K-ϵ 模式的结果误差较大, 但 RNG K-ϵ 模式的结果与实验值符合较好, 只不过在分离区内有一定误差

图 6　不同截面湍流脉动速度分布
Fig. 6 Tubulent velocity profiles in 180 degree turn- round duct

图 7 平均流速流线分布图

Fig. 7 Contours of mean stream lines in 180 degree turn- around duct

图 7 为两种模式获得了平均流速流线分布图. 由图可见, 标准 K-ϵ 模式的结果显示无分离存在, 而 RNG K-ϵ 模式的结果表明, 在弯道附近存在一明显的分离区, 这与实验[13]观测到的结果是一致的.

总的来看, 对 180 强曲率弯道内湍流分离流动的预测, RNG K-ϵ 模式得到的结果是令人满意的, 值得进一步推广. 当然, 与实验值相比, 压力、湍流脉动速度的预测还存在一些误差. 究其原因, 可能有两点, 一是 ϵ 的边界条件处理可能有误差, 在壁面处近似为零不准确, 二是 RNG K-ϵ 模式不一定能完全准确地反映有强曲率带分离的流动. 文献[9]也指出, 发展考虑曲率与旋转影响的 RNG 模式理论的下一个发展方向.

参 考 文 献

1 Launder BE, Spalding DB. The numerical calculation of turbulent flows. Comput, Mech. Apl Mech. Engng, 1974, 3: 269~ 289

2 Leschziner MA, Rodi W. Calculation of annular and twin paralle jets using various discretization schems and turbulent model variations. *Journal of Fluids Engineering*, 1981, 103(3) 352~ 360

3 Hanjalic K, Launder BE. Preferential spectral transport by irrotational staining. In: Weber ed. Turbulent Boundary Layers, Forced, Incompressible, Non-React. New York: ASME, 1979. 101~ 109

4 Chung MK, Prak SW, Kim KC. Curvate effect on third-ordered velocity correlation and its model representation. *Physics of Fluids*, 1987, 30(March): 627~ 628

5 Cheng GC, Farokhi S. On turbulent flows dominated by curvate effects. *Journal of Fluids Engineering*, 1992, 114(1): 52~ 57

6 王少平, 曾扬兵, 沈孟育等. 一个新的考虑流线曲率修正的两方程湍流模式. 科学通报, 1995, 40(7): 594~ 596

7 Yakhot V, Orszag SA. Renormalization group analysis of turbulence. I Basic theory. *Journal of Scientific Computing*, 1986, 1(1): 39~ 51

8 Special CG, Thangam S. Analysis of an RNG based turbulence model for speperated flows. *International Journal Engineering Science*, 1992, 30(10): 1379~ 1388

9 Yakhot V, Orszag SA. Thangam S, Gatski TB, Speziale CG. Development of turbulence model for shear flows by a double expansion technique. *Physics of Fluids A*, 1992, 4(7): 1510~ 1520

10 Smith LM, Reynolds WC. On the Yakhot-Orszag renormalization group method for deriving turbulence statics and models. *Physics of Fluids A*, 1992, 4(4): 364~ 390

11 史 峰 气-固两相湍流模型的研究及叶栅内颗粒运动的高速摄影与数值模拟 西安交通大学博士论文, 1991

12 Karki KC, Patankar SV. Calculation procedure for viscous incompressible flows in complex geometries *Numerical Heat Transfer*, 1988, 14(3): 295～307

13 Sandtorn VA, Shin JC. Water flow measurements in a 180 deg degree turn-around duct Report Prepared Under Contract No. NAS8-36354, 1989, June

NUMERICAL CALCULATION OF TUBULENT SEPARATED FLOWS IN 180 DEG DUCT WITH RNG K-ϵ TUBULENCE MODEL

Wang Shaoping Zeng Yangbing Shen Mengyu

(*Department of Engineering Mechanics Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*)

Shi Feng, Xu Zhong

(*Department of Power Mechanical Engineering Xian Jiaotong University, Xian* 710049, *China*)

Abstract A two-equation turbulence mode of K-ϵ type was recently derived by Yakhot and Orszag on Renormalization Group (RNG) methods It was applied to solve the turbulent separated flows in a 180 deg duct The scheme has been developed for a generalized coordinate system and in based on a control-volume approach with a staggered grid arragement The physical covariant velicity components are selected as the dependent variable in the momentum equations The detail numerical results were given and compared with the experimental results It in shown that RNG K-ϵ can predict the turbulent separated flows dominated by curvate effects

Key words RNG K-ϵ model, turbulent separated flows, 180 deg degree duct, generalized coordinate, covariant velocity