

在波形斜坡上的自由粘性流动的算法¹⁾

江 涛 陈耀松

(北京大学力学系, 北京 100871)

摘要 利用非定常变换将流体流动的复杂区域变到一个固定的矩形计算区域, 然后用高效的数值方法对此强非线性问题进行积分. 由于变换本身是随自由面变化而变化, 刻画这一变换的参数将作为未知量与其它待求流动参数在积分过程中同时求得. 本方法对流动问题不作任何限制, 可以计算非常复杂的自由粘性流动问题.

关键词 粘性流动, NS 方程, 保角变换

引 言

在流体力学中有自由面或流体交界面的问题是一类非常困难却又非常重要的问题, 例如液泡或液滴的变形等. 更复杂的情形, 如还有固壁, 弹性壁或粘弹性壁的存在, 同时这些流动有时还伴随着相变、化学反应或热传导等现象, 如化学工艺中的薄膜镀层 (如电化学镀膜等), 结晶生长等. 这里我们考虑刚性波形斜坡上的自由粘性流动. 这一问题的复杂性除了 NS 方程本身的非线性外, 还在于膜层表面 (自由面) 的位置是未知的. 若考虑表面张力, 以及多层流体 (多相流) 的话, 问题就更为复杂. 文献 [1] 研究了单层流体在周期性波纹壁上的定常流动问题, 但仅限于蠕变流 (Stokes 流), 它因忽略对流项而使 NS 方程线性化. 文献 [1] 采用的是 Green 函数法, 使方程的积分转化为沿流体边界的积分, 使计算空间降了一维. 对于位置未知的自由面, 文献 [1] 成功地设计了一个逐步逼近的方法. 最后, 文献 [1] 详细分析了自由层流量、表面张力以及因固壁波纹外形对流动图案、自由面曲线以及应力分布等的影响, 是一个十分有价值的研究工作. 本文考虑同样的问题, 但直接采用 NS 方程, 并且方法是按非定常流动设计的, 因此它可适用于相当广泛的实际问题. 计算结果表明, 我们的方法是可行和有效的. 文献 [1] 中所有算例中, 自由面曲线相对于波纹壁的位相移动全是负的, 而我们由于保留了对流项, 发现这个位相移动可以是正的.

本文地算法概括地说分四步: 1) 用一保角变换将波纹固壁变成平底, 这时自由面变成另一形状的自由面. 注意到这个保角变换将是固定的, 即不随时间变化. 2) 再作一次保角变换将上边界为自由面, 下边界为平底的区域变成规则的不随时间变化的矩形区域. 显然这个变换将随时间变化而变化, 它将由自由面上的运动学条件确定^[2,3]. 3) 由于我们求解的是速度场, 如何正确处理自由面上含有压力项的法应力边条件, 也是解决此问题的关键之一. 具体求解不可压缩流体流动时, 我们采用流函数, 于是要求将含法应力等的边条件全由流函数及其导数表示出来. 4) 在经过两次保角变换后的矩形区域内选择适当的数值方法进行计算. 注意到此问题的特点, 在一个方向上具有周期性, 对于沿这个方向上的

¹⁾ 上海交通大学国家海洋工程重点实验室和 LNM 开放实验室资助项目.

1994-12-09 收到第一稿, 1995-10-16 收到修改稿.

导数, 可采用 FFT 求出; 对于另一方向上的导数, 我们在谱空间将其离散, 最后得到三对角方程组, 可以用追赶法求解, 详细细节参阅文献 [2].

1 数学提法和计算公式

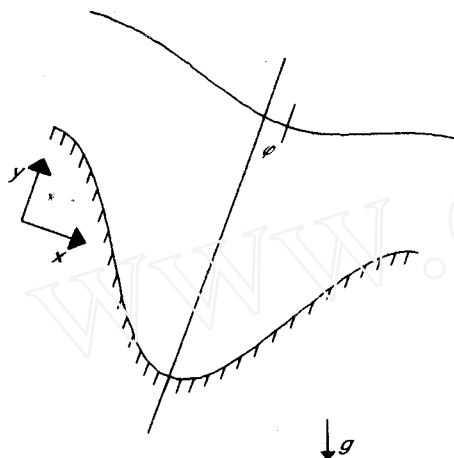


图 1 z 平面
Fig.1 z -plane

我们所研究的问题是倾斜波纹壁上的周期性定常自由粘性流动. 空间周期为 $L = 2\pi$, 倾斜角为 θ , 液体平均深度为 d , 流量为 Q , 波纹壁曲线为余弦曲线, 振幅为 A (图 1). φ 为自由面曲线相对于底部的位相差, 图 1 所示的情形 φ 为正. 对于此定常问题, 若不考虑水跃, 并且已知重力加速度 g , 粘性系数 ν 和倾角 θ , 一旦流量 Q 给定, 若不考虑分叉, 液体的平均深度 d 也就确定了, 反过来也成立. 它们之间存在如下关系式

$$Q = \frac{g \sin \theta}{3\nu} d^3 \quad (1)$$

所以计算时可给定 Q 或 d 中任一个. 定义 Reynold 数

$$Re = \frac{Ud}{\nu} \quad (2)$$

其中 U 为平均流速

$$U = \frac{Q}{d} = \frac{g \sin \theta}{3\nu} d^2 \quad (3)$$

所以

$$Re = \frac{g \sin \theta d^3}{3\nu^2} \quad (4)$$

我们将用时间相关法求解此问题, 主控方程采用非定常的不可压 NS 方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{g} = g \sin \theta \mathbf{i} - g \cos \theta \mathbf{j}$.

边条件为:

$x = 0$ 和 $x = 2\pi$ 处为周期性边条件; 底部 $y = A \cos x$ 上, $\mathbf{v} = 0$; 自由面 $y = y_f(x, t)$ 上, 运动学条件

$$\frac{\partial y_f}{\partial t} + v_x \frac{\partial y_f}{\partial x} - v_y = 0 \quad (6)$$

动力学条件, 切应力

$$\sigma_{sn} = 0 \quad (7)$$

法应力

$$\sigma_{nn} = -p_0 + T\kappa \quad (8)$$

其中, n 为自由面外法向, s 为自由面切方向, T 为表面张力, κ 为曲率.

从图 1 可以看出, 计算区域是相当复杂的, 它将随计算的推进而变化. 为使计算简单, 我们将用两个保角变换将其变到一固定的矩形区域.

保角变换 1

$$z = w + i \sum_{n=1} A_n e^{inw} + iA_0 \quad (9)$$

这里 $z = x + iy, w = r + is, A_n$ 为复常数. 为计算简单起见, 我们暂限那些可以实数 A_n 表示的坡底曲线, 即限定 A_n 为实数. 其分量形式为

$$\left. \begin{aligned} x &= r - \sum_{n=1} A_n e^{-ns} \sin nr \\ y &= s + A_0 + \sum_{n=1} A_n e^{-ns} \cos nr \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

此变换的作用是将波纹底变成平底, 由于底部曲线是固定的, 所以变换 (9) 不随时间变化, 即 A_n 为定常数. 因此, (9), (10) 两式中的系数 $A_n, n = 0, 1, \dots, N$, 可用配置法或优化法事先求出.

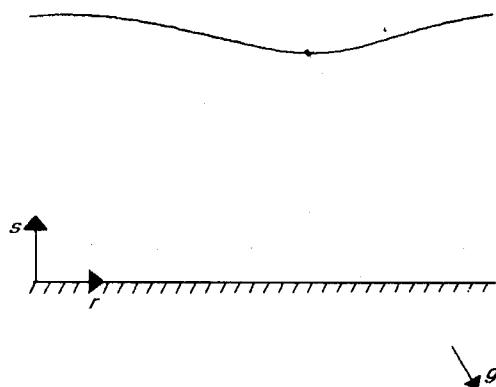


图 2 w 平面
Fig.2 w -plane

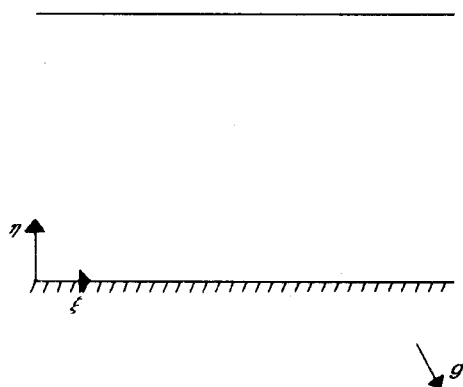


图 3 ζ 平面
Fig.3 ζ -plane

保角变换 2

$$w = \zeta + \sum_{n=1} [\alpha_n(t) \cos n\zeta + \beta_n(t) \sin n\zeta] \quad (11)$$

上式中, $\zeta = \xi + i\eta, \alpha_n(t), \beta_n(t)$ 为与时间有关的实系数, 自由面随时间变化, 将通过它们来体现. 这个变换将计算区域变成规则的矩形区域 (图 3). 变换分量形式为

$$\left. \begin{aligned} r &= \xi + \sum_{n=1} \cosh n\eta [\alpha_n(t) \cos n\xi + \beta_n(t) \sin n\xi] \\ s &= \eta - \sum_{n=1} \sinh n\eta [\alpha_n(t) \sin n\xi - \beta_n(t) \cos n\xi] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

此变换的作用是将变化的自由面 (经过变换后的自由面) 变成直线, 同时要求将平底仍然变成平底. 显然 (11), (12) 两式中的实系数 $\alpha_n(t), \beta_n(t)$ 应为时间的函数, 它们将由运

动学条件在每一时间步求出. 实际上我们可以将两个保角变换看成一个复合保角变换, 其 Jacobi 系数为

$$H = \left| \frac{dz}{dw} \right| \left| \frac{dw}{d\zeta} \right| \quad (13)$$

最后的数值积分将在 ζ 平面内进行, 下面将推导 ζ 平面内 NS 方程的形式. 显然可以把 (ξ, η) 看成是与时间有关的曲线坐标, 若令 $\partial/\partial\tau$ 为 ζ 平面里对时间的就地导数, $\partial/\partial t$ 为 z 平面里对时间的就地导数, 则成立下面关系式

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_r \cdot \nabla \quad (14)$$

其中 $\mathbf{v}_r$ 为曲线坐标的运动速度, 它在 z 平面里的分量为

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{dx}{dt} = \sum_n \cosh n\eta [\dot{\alpha}_n(t) \cos n\xi + \dot{\beta}_n(t) \sin n\xi] \\ v_r &= \frac{dy}{dt} = \sum_n \sinh n\eta [-\dot{\alpha}_n(t) \sin n\xi + \dot{\beta}_n(t) \cos n\xi] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

利用 (5) 和 (13) 式, 可以写出 ζ 平面内 NS 方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_r) \cdot \nabla] \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

这里, 重力 g 被吸收在 P 中

$$P = p + \rho g y \cos \theta - \rho g x \sin \theta \quad (17)$$

将 (16) 写成流函数和涡量的形式为

$$\left. \begin{aligned} v_\xi &= \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \\ v_\eta &= -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega &= -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) \\ \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{1}{H^2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} - H v_{r\eta} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - H v_{r\xi} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right] &= \frac{\nu}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

上式中, $v_{r\xi}$ 和 $v_{r\eta}$ 为曲线坐标的运动速度在 ξ, η 方向上的分量

$$\left. \begin{aligned} v_{r\xi} &= \mathbf{v}_r \cdot \boldsymbol{\xi}^0 = \frac{1}{H} (u_r x_\xi + v_r y_\xi) \\ v_{r\eta} &= \mathbf{v}_r \cdot \boldsymbol{\eta}^0 = \frac{1}{H} (-u_r y_\xi + v_r x_\xi) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

实际计算时我们把流函数当做待求变量, (19) 式中的涡量 ω 可看成中间变量.

下面再来考察在 ζ 平面内的边条件.

$\xi = 0$ 和 $\xi = 2\pi$ 处为周期性边条件; 在底部, 即 $\eta = 0$ 处

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \quad (21)$$

在自由面上, 即 $\eta = 1$:

(1) 切应力条件

$$\left(H \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right) - 2 \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (22)$$

(2) 法应力条件

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} = -p_0 + T\kappa = \\ -P + \rho g y + 2\mu \left[-\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{H^3} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial H}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

这里

$$\kappa = \frac{y_{\xi\xi} x_{\xi} - y_{\xi} x_{\xi\xi}}{H^3} \quad (24)$$

我们可以利用 (23) 式和 NS 方程 (16) 在 ξ 方向上的分量消去压力 P

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = & -\frac{1}{H} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - v_{r\xi} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{H} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + v_{r\eta} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \\ & \frac{1}{H^3} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - v_{r\xi} \right) \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{1}{H^3} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + v_{r\eta} \right) \frac{\partial H}{\partial \xi} + \\ & \frac{T}{\rho H} \frac{d\kappa}{d\xi} - \frac{gy_{\xi}}{H} - \frac{\nu}{H} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{H^3} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial H}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

(22) 式和 (25) 式就是我们计算时所用的自由面条件.

最后来看看如何确定保角变换 2, 即 (11) 式中的组合系数 $\alpha_n(t)$ 和 $\beta_n(t)$. 在自由面上, 曲线坐标总是跟随着自由面变化, 所以自由面上流体质点沿法向的速度分量应等于曲线坐标沿法向的分量

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n} \quad (26)$$

即

$$\begin{aligned} \sum_n \{ [-y_{\xi} \cosh n\eta \cos n\xi - x_{\xi} \sinh n\eta \sin n\xi] \dot{\alpha}_n(t) + \\ [x_{\xi} \sinh n\eta \cos n\xi - y_{\xi} \cosh n\eta \sin n\xi] \dot{\beta}_n(t) \} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (27)$$

(27) 是一线性方程组, 从中可解出 $\dot{\alpha}_n(t)$ 和 $\dot{\beta}_n(t)$, 从而积分得 $\alpha_n(t)$ 和 $\beta_n(t)$.

2 计算结果和讨论

为了和文献 [1] 进行比较, 我们首先计算了 Stokes 流的情形, 然后计算了 NS 方程的情形. 计算参数取为: $Re = 16.0, T = 4.9, d = 2.52, A = 1.26, \theta = 30^\circ$, 网格取为 128×24 .

对于 Stokes 流的情形, 最后流线图见图 4, 由于忽略了惯性项, 粘性力占主导地位, 从图 4 可以看出, 流区中没有孤立旋涡; 而且自由面形状近似为余弦曲线, 它相对于波纹底部的位相差 φ 是负的, 这些都和 [1] 的结果一致。

对于 NS 方程的情形, 最后结果见图 5. 这时由于惯性项的存在, 在底部下凹处产生了旋涡, 而且自由面相对于底部曲线的位相差 φ 是正的, 这是由沿斜坡向下的惯性力造成的。

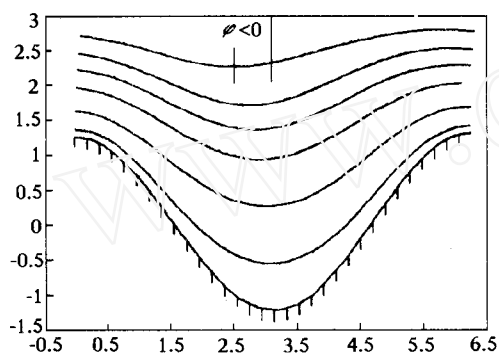


图 4 Stokes 流的流线图 $\psi = 0.1, 1.0, 3.0, 5.0, 7.0$
Fig.4 Stream line for Stokes flow

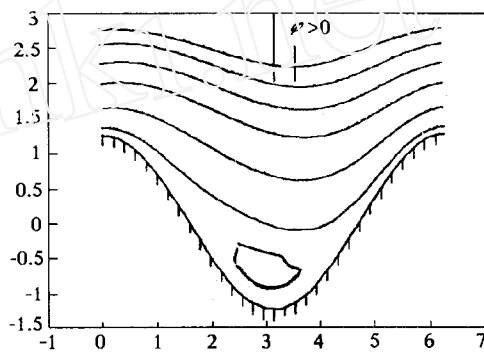


图 5 NS 方程的流线图 $\psi = -0.015, 0.1, 1.0, 3.0, 5.0, 7.0$
Fig.5 Stream line for NS flow

从上面看出, 采用 Stokes 假设和采用 NS 方程进行计算, 差别还是比较大的, 主要有两点: (1) 对 Stokes 流, 流动很难有涡旋产生; (2) 自由面曲线相对于底部曲线的位相差 φ 不一样。当然 NS 方程应该更接近实际情况。

综上所述, 我们为此问题设计的计算方法是成功的, 而且它可以比较容易推广到其它的有自由面的 NS 方程的计算中去。

参 考 文 献

- 1 Pozrikidis C. The flow of a liquid film along a periodic wall. *JFM*, 1991, 188: 275~300
- 2 江涛. 带自由面的不可压 NS 方程的数值方法. 博士论文. 北京: 北京大学力学系, 1995
- 3 Chen Yaosong, Lu Chuanjing. A fast algorithm for full non-linear transient waves. *Acta Mechanica Sinica*, 1992, 8(1): 24~28

THE COMPUTATION OF THE FREE VISCOUS FLOW ON THE WAVY SLOPE

Jiang Tao Chen Yaosong

(Dept. of Mech., Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract In this paper a time-dependent transformation which maps the moving flow region into a fixed rectangular is offered, by which the effective computational methods may be used to compute very complex free viscous flow. From the results of the example the important difference were discovered in comparing with the results computed by [1] with simplified equations.

Key words viscous flow, NS equations, conform mapping