时滞系统的实用稳定性和 Liapunov 稳定性[1)]

楚天广 王照林
(北京大学力学系，北京 100871) (清华大学工程力学系，北京 100084)

摘要 本文主要研究非线性时滞系统在两种度量下的实用稳定性问题．首先引入一类 Razumikhin 型微分比较原理和单调性准则．在此基础上提出一种 Liapunov-Razumikhin 型直接方法，建立一般形式的实用稳定性直接判据．这些判据将问题约化为一组有限维的微分或积分不等式，可以直接根据系统方程进行检验，便于实际应用．然后利用这些结果研究时滞系统的 Liapunov 稳定性．最后示例说明本文主要结果．

关键词 非线性时滞系统，实用稳定性，Liapunov 稳定性，Razumikhin 条件，Liapunov-Razumikhin 直接方法

引 言

时滞系统的实用稳定性问题具有明确的工程背景．在许多实际问题中存在着时间滞后现象，其运动规律不仅依赖于系统当前的运动状态，同时还与过去的运动状态有关 [1~3]，在数学上描述这类运动要用时滞泛函微分方程 (简称时滞系统)[4]．由于它本质上是无限维的，因而给系统动力学性质的研究带来许多困难，对于时滞系统的系统性态的了解至今仍然非常有限．同时工程技术中除考虑系统在初始小扰动下的 Liapunov 稳定性外，还需要考虑系统在不同方式的有限扰动下的运动状态，如各种技术稳定性和有限时间稳定性等．这些统称为实用稳定性问题 [5~7]．

目前，时滞系统的 Liapunov 稳定性主要有 Krasovskii 的 V 泛函方法和 Razumikhin 的 V 函数方法 [2,4]．前者是 Liapunov 直接方法的自然的推广，但 V 泛函的构造及性质都较为复杂，V 函数方法则相对简便．时滞系统的实用稳定性研究成果不多．文献 [6] 尝试使用 V 泛函进行研究，所得条件形式复杂不易检验．文献 [7,8] 中则将 Razumikhin 方法推广用于实用稳定性研究，把问题转化为常微分比较系统的实用稳定性．但这样得到的稳定性条件中都引入了有关比较系统解的性质的假设条件，因此未能给出时滞系统实用稳定性的直接判据，不便于具体应用．最近文献 [9] 对线性时滞系统给出了一类显式直接判据．至于一般形式的实用稳定性直接判据仍然值得研究．

本文对非线性时滞系统在两种度量下的实用稳定性提出一种 Liapunov-Razumikhin 型直接方法．其基本思想是结合 Razumikhin 条件与微分不等式理论引入一类 Razumikhin 型微分比较原理和单调性准则，利用 V 函数把时滞系统的实用稳定性条件约化为一组常微

1) 国家自然科学基金 (重点项目) 与高等学校博士学科点专项科研基金资助项目．
1994-09-26 收到第一稿， 1995-09-26 收到修改稿．

分或积分不等式．从而避免引入任何形式的“比较系统”及相关条件，可直接根据系统方程检验．文中还阐明了实用稳定性与 Liapunov 稳定性在概念和方法上的联系．

1 问题表述

文中规定 $R_+=\{t\in R\,|\,t\geq 0\}$, $C(r)=C([-r,0],R^n)$, $r>0$ 为时滞常数． $\forall\psi\in C(r)$, 取范数 $\|\psi\|_r=\max_{-r\leq\theta\leq 0}\|\psi(\theta)\|$, $\|\cdot\|$ 是 R^n 中任意范数．对连续的 $x(t)$ 记 $x_t(\theta)=x(t+\theta)\,(\theta\in[-r,0])$, 则 $x_t\in C(r)$. 对常数 $H>0$, $C_H=\{\psi\in C(r)\,|\,\|\psi\|_r<H\}$.

考虑如下含有有限时滞的非线性系统 (1) 及其摄动系统 (2)

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{1}$$

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t)+p(t,x_t) \tag{2}$$

其中 $x(t)\in R^n$, $t\in R_+$, $f,p\in C(R_+\times C_H,R^n)$, $p(t,x_t)$ 是作用在系统 (1) 上的持续摄动．

设 $t_0\in R_+$ 为初始时刻．给定初始函数 $\varphi\in C(r)$, $x_t(t_0,\varphi)$ 为相应 Cauchy 问题的解．系统的状态空间是 $C(r)$, 即 $x_t(t_0,\varphi)\in C(r)\,(t\geq t_0)$, $x_t(t_0,\varphi)(\theta)\in R^n\,(\theta\in[-r,0])$. 本文假定系统 (1)(2) 满足 Cauchy 问题解的存在唯一性条件 [4].

在实际问题中，需要了解时滞系统的状态在各个时刻的值的变化情况．为此可对初始状态和运动状态分别选取两种不同的度量 ρ_1 和 ρ_2

$$\rho_1(\psi)=\|\psi\|_r,\quad \rho_2(\psi)=\|\psi(0)\|,\quad \forall\psi\in C(r)$$

其中 ρ_1 给出了初始状态在 $C(r)$ 中的最大模范数， ρ_2 则给出相应解在 t 时刻的值在 R^n 中的范数．显然 ρ_2 关于 ρ_1 连续．

对于给定常数 $\alpha>0$ 和 $\beta,\eta\in C(R_+,R_+)$ 有界并且 $0<\beta(t)<H$, $\alpha<\beta(t)\,(t\in R_+)$, 利用上述度量规定系统的初始状态集合，容许状态集合以及容许摄动集合分别为

$$S_\alpha=\{\psi\in C(r)\,|\,\rho_1(\psi)<\alpha\},\qquad S_\beta(t)=\{\psi\in C(r)\,|\,\rho_2(\psi)<\beta(t)\}$$
$$P(t)=\{p\in C(R_+\times C(r),R^n)\mid \|p(t,\psi)\|\leq\eta(t),\,(t,\psi)\in T\times S_\beta(t)\}$$

系统的时间区间为 $T=[t_0,t_0+\tau)$, $t_0\in R_+$, τ 为有限数或为 $+\infty$.

定义 1 如果当 $\varphi\in S_\alpha$ 时，有 $x_t(t_0,\varphi)\in S_\beta(t)\,(t\in T)$, 则系统 (1) 关于 $\{S_\alpha,S_\beta(t),T,t_0\}$ 实用稳定；如果对于 $\forall t_0\in R_+$ 均如此，则系统 (1) 关于 $\{S_\alpha,S_\beta(t),T\}$ 拟实用一致稳定；此时如果还有 $\beta(t)\equiv\beta$ 为常向量，则系统 (1) 关于 $\{S_\alpha,S_\beta,T\}$ 实用一致稳定．

定义 2 如果当 $\varphi\in S_\alpha$ 和 $p\in P(t)$ 时，有 $x_t(t_0,\varphi)\in S_\beta(t)\,(t\in T)$, 则系统 (2) 关于 $\{S_\alpha,S_\beta(t),P(t),T,t_0\}$ 实用稳定；拟实用一致稳定性和实用一致稳定性可类似定义．

设标量辅助函数 $V\in C(R\times B(H),R)$ 并且 $V(t,x)$ 满足关于 x 的局部 Lipschitz 条件，记为 $V\in C(R\times B(H),R)\cap\mathrm{Lip}(x)$. 下列极限存在 [2]

$$\mathrm{D}^-_{(1)}V(t,\psi(0))=\lim_{t\to 0-}\sup\{h^{-1}[V(t+h,\psi(0)+hf(t,\psi))-V(t,\psi(0))\}$$

$$\mathrm{D}^+_{(1)}V(t,\psi(0))=\lim_{t\to 0+}\sup\{h^{-1}[V(t+h,\psi(0)+hf(t,\psi))-V(t,\psi(0))\}$$

类似还有 $\mathrm{D}^-_{(2)}V(t,\psi(0))$ 和 $\mathrm{D}^+_{(2)}V(t,\psi(0))$ 等．易知下列性质成立

p_1) 设 $l(t)$ 为 $V(t,x)$ 关于 x 的 Lipschitz 系数，则

$$D^-_{(2)}V(t,\psi(0)) \le D^-_{(1)}V(t,\psi(0)) + l(t)\|p(t,\psi)\|$$

p_2) 设 $x_t(t_0,\psi)$ 是系统 (1) 的解，则 $D^-_{(1)}V(t,x_t(t_0,\varphi)(0)) = D^-V(t,x_t(t_0,\varphi)(0))$. 对于系统 (2) 有类似性质. 对于右上导数 D^+, 相应的性质同样成立.

最后引入以下符号

$$V_M^{S_\alpha} = \sup\{V(t+\theta,\psi(\theta))\,|\,\theta\in[-r,0],\ \psi\in S_\alpha\}$$
$$V_m^{\partial S_\beta}(t) = \inf\{V(t,\psi(0))\,|\,\rho_2(\psi)=\beta(t),\ \psi\in C(r)\}$$
$$\Omega = \{\psi\in C_H\,|\,V(t+\theta,\psi(\theta))\le V(t,\psi(0)),\ \theta\in[-r,0]\}$$

其中 Ω 与下面将要用到的 Razumikhin 条件有关 (参见注 1).

2 Razumikhin 型比较原理和单调性准则

本节引入一类 Razumikhin 型微分比较原理和单调性准则，从而利用常微分不等式的解刻划时滞系统的性态. 这些内容是本文工作的基础. 首先给出如下 Razumikhin 型微分比较原理.

引理 1 设 $w\in C(R_+\times R,\,R_+)$, $p,q\in C([a-r,b],R)$, $0\le a<b$, 满足条件：

1) $\forall t\in(a,b]$, $p(t+\theta)\le p(t)\,(\theta\in[-r,0])$ 时, $D^-p(t)\le w(t,p(t))$

2) $D^-q(t)>w(t,q(t))$, $t\in(a,b]$

3) $p(a+\theta)<q(a)$, $\theta\in[-r,0]$

则 $p(t)<q(t)$, $t\in[a,b]$.

证明 根据连续性，由条件 3) 知 $\exists\delta>0$ 使 $p(t)<q(t)$ 在 $[a,a+\delta]$ 上成立. 如果 $a+\delta<b$, 则 $\exists c\in(a,b)$ 使得在 $[a,c)$ 上 $p(t)<q(t)$ 并且 $p(c)=q(c)$. 故对于充分小的 $h>0$ 有 $p(c)-p(c-h)>q(c)-q(c-h)$, 得 $D^-p(c)\ge D^-q(c)$.

同时，由 $w\ge0$ 和条件 2) 知 $q(t)$ 单调不减. 于是

i) 当 $a<c\le a+r$ 时，由条件 3) 得 $p(c+\theta)<q(a)\le q(c)=p(c)$, $\forall\theta\in[-r,0]$;

ii) 当 $a+r<c<b$ 时，由上可知 $p(c+\theta)\le q(c+\theta)\le q(c)=p(c)$, $\forall\theta\in[-r,0]$.

因此由条件 1) 和 2) 得 $D^-p(c)\le w(c,p(c))=w(c,q(c))<D^-q(c)$, 矛盾. 引理 1 得证.

下面建立一类与 Razumikhin 条件有关的单调性准则.

引理 2 设 $p\in C([a-r,b],R)$, $0\le a<b$. 如果 $\forall t\in(a,b]$, 当 $p(t+\theta)\le p(t)\,(\theta\in[-r,0])$ 时 $D^+p(t)\le0$. 则 $D^+[\max_{-r\le\theta\le0}p(t+\theta)]\le0\,(t\in[a,b))$, 即 $\max_{-r\le\theta\le0}p(t+\theta)$ 在 $[a,b]$ 上单调不增.

证明 令 $v(t)=\max_{-r\le\theta\le0}p(t+\theta)\,(t\in[a,b])$. 只需证明对于 $\forall t\in[a,b)$ 和充分小的 $h>0$, $v(t+h)\le v(t)$.

由于 p 连续，故 $\exists\theta_1\in[-r,0]$ 使 $v(t)=p(t+\theta_1)$. 同时还可选取 θ_1 使得对于 $s\in(t+\theta_1,t)$ 有 $p(s)<p(t+\theta_1)$. 于是对充分小的 $h>0$, 当

i) $-r\le\theta_1<0$ 时， $p(t+h+\theta)\le p(t+\theta_1)\,(\theta\in[-r,0])$. 故 $v(t+h)\le p(t+\theta_1)=v(t)$;

ii) $\theta_1=0$ 时，即 $p(t+\theta)\le p(t)\,(\theta\in[-r,0])$. 由假设条件得 $D^+p(t)\le0$, 从而 $p(t+h)\le p(t)$. 故 $v(t+h)=p(t)=v(t)$. 引理 2 得证.

注 1　上述引理 1 中条件 1) 关于时滞的处理方式，最初由 Razumikhin 在利用 V 函数研究时滞系统的 Liapunov 稳定性时提出 [2,4]，通常称之为 " Razumikhin 条件". 本文则将其基本思想用于建立常微分形式的比较原理和单调性准则.

3　实用稳定性直接判据

首先根据引理 1 建立微分形式的实用稳定性直接判据.

定理 1　设有 $V\in C(R\times B(H),R)\cap \mathrm{Lip}(x)$, $w\in C(R_+\times R,R_+)$, 满足条件：

1) $\mathrm{D}^-_{(1)}V(t,\psi(0))\le w(t,V(t,\psi(0)))$, $(t,\psi)\in T\times[S_\beta(t)\cap\Omega]$
2) $w(t,V_m^{\partial S_\beta}(t))<\mathrm{D}^-V_m^{\partial S_\beta}(t)$, $t\in T$
3) $V_M^{S_\alpha}(t_0)<V_m^{\partial S_\beta}(t_0)$

则系统 (1) 关于 $\{S_\alpha,S_\beta(t),T,t_0\}$ 实用稳定. 如果 $\forall t_0\in R_+$ 均有上述条件成立，则系统 (1) 关于 $\{S_\alpha,S_\beta(t),T\}$ 拟实用一致稳定.

证明　首先证明实用稳定性. 反证之，如果不然则根据 $\alpha<\beta(t_0)$ 和 $\beta(t)$ 的连续性必有 $\varphi\in S_\alpha$ 和 $t_1\in T$, 使 $x_t(t_0,\varphi)\in S_\beta(t)\,(t\in[t_0,t_1))$ 且 $\rho_2(x_{t_1}(t_0,\varphi))=\beta(t_1)$.

然而，取 $V(t)=V(t,x_t(t_0,\varphi)(0))\,(t\in(t_0,t_1])$ 且 $V(t_0+\theta)=V(t_0+\theta,\varphi(\theta))$. 显然 $V(t_0+\theta)\le V_M^{S_\alpha}(t_0)\,(\theta\in[-r,0])$. 由条件 1)~3) 根据引理 1 和性质 p$_2$) 得 $V(t)<V_m^{\partial S_\beta}(t)\,(t\in[t_0,t_1])$. 于是 $V(t_1)<V_m^{\partial S_\beta}(t_1)$. 这与上述 $\rho_2(x_{t_1}(t_0,\varphi))=\beta(t_1)$ 矛盾. 故结论成立.

拟实用一致稳定性的结论显然成立. 定理 1 得证.

定理 2　设有 $V\in C(R\times B(H),R)\cap\mathrm{Lip}(x)$ 并且有 Lipschitz 系数 $l\in C(R,R_+)$, $w\in C(R_+\times R,R_+)$, 满足条件：

1) $\mathrm{D}^-_{(1)}V(t,\psi(0))\le w(t,V(t,\psi(0)))$, $(t,\psi)\in T\times[S_\beta(t)\cap\Omega]$
2) $w(t,V_m^{\partial S_\beta}(t))+l(t)\eta(t)<\mathrm{D}^-V_m^{\partial S_\beta}(t)$, $t\in T$
3) $V_M^{S_\alpha}(t_0)<V_m^{\partial S_\beta}(t_0)$

则摄动系统 (2) 关于 $\{S_\alpha,S_\beta(t),P(t),T,t_0\}$ 实用稳定. 如果 $\forall t_0\in R_+$ 均有上述条件成立，则摄动系统 (2) 关于 $\{S_\alpha,S_\beta(t),P(t),T\}$ 拟实用一致稳定.

证明　只需证明实用稳定性. 反证之，如果不然则必有 $\varphi\in S_\alpha, p\in P(t)$ 和 $t_1\in T$ 使 $x_t(t_0,\varphi)\in S_\beta(t)\,(t\in[t_0,t_1))$ 且 $\rho_2(x_{t_1}(t_0,\varphi))=\beta(t_1)$.

然而由条件 1) 和性质 p$_1$) 得知，　$\forall(t,\psi)\in(t_0,t_1]\times[S_\beta(t)\cap\Omega]$,

$$\mathrm{D}^-_{(2)}V(t,\psi(0))\le \mathrm{D}^-_{(1)}V(t,\psi(0))+l(t)\|p(t,\psi)\|\le w(t,V(t,\psi(0)))+l(t)\eta(t)$$

再由条件 2) 和 3) 以及引理 1, 重复定理 1 的证明过程即可. 定理 2 得证.

根据引理 2 的单调性准则，还可以建立如下积分形式的实用稳定性直接判据.

定理 3　设有 $V\in C(R\times B(H),R)\cap\mathrm{Lip}(x)$, $w\in C(R_+\times R,R_+)$ 且 $w(t,u)$ 关于 u 单调不减，满足条件

1) $\mathrm{D}^+_{(1)}V(t,\psi(0))\le w(t,V(t,\psi(0)))$, $(t,\psi)\in T\times[S_\beta(t)\cap\Omega]$
2) $\int_{t_0}^{t}w(\sigma,V_m^{\partial S_\beta}(\sigma))d\sigma<(V_m^{\partial S_\beta}(t)-V_M^{S_\alpha}(t_0))$, $t\in T$

则系统 (1) 关于 $\{S_\alpha,S_\beta(t),T,t_0\}$ 实用稳定. 如果 $\forall t_0\in R_+$ 均有上述条件成立，则系统 (1) 关于 $\{S_\alpha,S_\beta(t),T\}$ 拟实用一致稳定.

证明 只证实用稳定性. 如果结论不成立, 则必有 $\varphi \in S_\alpha$ 和 $t_1 \in T$ 使 $x_t(t_0,\varphi) \in S_\beta(t)\,(t \in [t_0,t_1))$ 且 $\rho_2(x_{t_1}(t_0,\varphi)) = \beta(t_1)$.

令 $V(t) = V(t, x_t(t_0,\varphi)(0))$, 可以证明 $V(t) < V_m^{\partial S_\beta}(t)\,(t \in [t_0,t_1])$.

事实上, 由条件 2) 知 $V(t_0) \le V_M^{S_\alpha}(t_0) < V_m^{\partial S_\beta}(t_0)$. 根据连续性 $\exists\delta > 0$ 使 $V(t) < V_m^{\partial S_\beta}(t)\,(t \in [t_0, t_0+\delta])$. 如果 $t_0 + \delta < t_1$, 则 $\exists t_2 \in (t_0,t_1)$ 使 $V(t) < V_m^{\partial S_\beta}(t)\,(t \in [t_0,t_2))$ 且 $V(t_2) = V_m^{\partial S_\beta}(t_2)$.

然而, 若取 $W(t) = V(t) - \int_{t_0}^{t} w^*(\sigma, V(\sigma))\mathrm{d}\sigma,\ t \in [t_0 - r, t_2]$, 其中

$$w^*(t,V(t)) = \begin{cases} w(t,V(t)), & t \in [t_0,t_2] \\ 0, & t \in [t_0 - r, t_0] \end{cases}$$

对于 $t \in [t_0,t_2]$, 当 $W(t+\theta) \le W(t)\,(\theta \in [-r,0])$ 时

$$V(t+\theta) \le V(t) - \int_{t+\theta}^{t} w^*(\sigma,V(\sigma))d\sigma \le V(t)$$

因此由条件 1) 和性质 p_2) 得

$$\mathrm{D}^+W(t) = \mathrm{D}^+[V(t) - \int_{t_0}^{t} w^*(\sigma,V(\sigma))\mathrm{d}\sigma] \le 0,\ t \in [t_0,t_2]$$

根据引理 2

$$\max_{-r\le\theta\le 0} W(t+\theta) \le \max_{-r\le\theta\le 0} W(t_0+\theta),\ t \in [t_0,t_2]$$

由 $W(t)$ 的选取以及 w 的单调性和条件 2) 可知

$$V(t_2) \le \max_{-r\le\theta\le 0} V(t_0+\theta) + \int_{t_0}^{t_2} w(\sigma,V(\sigma))\mathrm{d}\sigma \le V_M^{S_\alpha}(t_0) + \int_{t_0}^{t_2} w(\sigma, V_m^{\partial S_\beta}(\sigma))\mathrm{d}\sigma < V_m^{\partial S_\beta}(t_2)$$

矛盾. 故 $V(t) < V_m^{\partial S_\beta}(t)\,(t \in [t_0,t_1])$. 因此 $V(t_1, x_{t_1}(t_0,\varphi)(0)) < V_m^{\partial S_\beta}(t_1)$. 这与上述 $\rho_2(x_{t_1}(t_0,\varphi)) = \beta(t_1)$ 矛盾. 定理 3 得证.

注 2 类似地, 对于摄动系统 (2) 将定理 3 的条件 2) 改为

2) $\int_{t_0}^{t}[w(\sigma, V_m^{\partial S_\beta}(\sigma)) + l(\sigma)\eta(\sigma)]d\sigma < (V_m^{\partial S_\beta}(t) - V_M^{S_\alpha}(t_0)),\ t \in T$,

则有关结论成立. 其中 $l \in C(R, R_+)$ 是 V 的 Lipschitz 系数.

注 3 为方便计, 本文对不同情况分别采用了左上导数 D^- 和右上导数 D^+ 两种形式. 若将 D^- 均代以 D^+, 有关结论仍然成立. 对于引理 2 使用右上导数 D^+ 是合理的.

4 Liapunov 稳定性

实用稳定性与 Liapunov 稳定性是两个相互独立的概念, 文献 [6,7] 中有详细例子说明两者的不同. 本文则指出这两种稳定性在概念和方法上的联系, 即 Liapunov 稳定性等价于"一族"实用稳定性, 并进而说明如何将本文关于实用稳定性的直接方法用于研究时滞系统的 Liapunov 稳定性.

在此假设系统 (1) 满足条件 $f(t,0)\equiv 0,\ t\in R_+,\ T=J=[t_0,+\infty),\ 0<\epsilon<H$. 对于正的常向量 α 和 β, 分别用 $S_{\alpha,1}$ 和 $S_{\beta,2}$ 明确区分前面由度量 ρ_1 和 ρ_2 所规定的估计区域，有关符号作相应的改变. 下面先定义时滞系统 (1) 零解的 Liapunov 稳定性 [2~4].

定义 3 如果 $\forall\epsilon>0, \forall t_0\in R_+, \exists\delta=\delta(\epsilon,t_0)>0$ 当 $\varphi\in S_{\delta,1}$ 时 $x_t(t_0,\varphi)\in S_{\epsilon,2}\,(t\geq t_0)$, 则系统 (1) 的零解 Liapunov 稳定；如果还有 $\delta=\delta(\epsilon)>0$ 与 t_0 无关，则系统 (1) 的零解 Liapunov 一致稳定.

关于实用稳定性与 Liapunov 稳定性的关系，容易证明如下结论.

命题 1 系统 (1) 的零解 Liapunov 稳定，当且仅当 $\forall\epsilon>0, \forall t_0\in R_+, \exists\delta=\delta(\epsilon,t_0)\in(0,\epsilon)$ 使系统 (1) 关于 $\{S_{\delta,1},S_{\epsilon,2},J,t_0\}$ 实用稳定.

因此可以将时滞系统的 Liapunov 稳定性问题转化为研究相应的实用稳定性问题. 下面利用前节中的方法证明一个关于 Liapunov 稳定性的 Razumikhin 型定理.

定理 4 设有 $V\in C(R\times B(H),R_+)\cap \mathrm{Lip}(x),\ a\in K$ (K 类函数 [5]), 满足条件

1) $a(\|x\|)\leq V(t,x),\ (t,x)\in R\times B(H)$ 且 $V(t,0)\equiv 0,\ t\in R$

2) $\mathrm{D}^+_{(1)}V(t,\psi(0))\leq 0,\ (t,\psi)\in R_+\times\Omega$

则系统 (1) 的零解 Liapunov 稳定.

证明 根据命题 1 和定理 3 只需证明：$\forall\epsilon>0, \forall t_0\in R_+, \exists\delta=\delta(\epsilon,t_0)\in(0,\epsilon)$ 使 $V_M^{S_{\delta,1}}(t_0)<V_m^{\partial S_{\epsilon,2}}(t)\,(t\in J)$. 事实上，由条件 1)

$$V_m^{\partial S_{\epsilon,2}}(t)=\inf\{V(t,\psi(0))\,|\,\rho_2(\psi)=\epsilon\}\geq a(\epsilon)>0,\ t\in J$$

对于 $a(\epsilon)>0,\ t_0\in R_+$, 由条件 1) 和连续性，在闭区间 $[t_0-\gamma,0]$ 上根据有限覆盖定理 [10] 可以找到 $\delta'=\delta'(\epsilon,t_0)>0$ 使得当 $\psi\in S_{\delta',1}$ 时

$$0\leq V(t_0+\theta,\psi(\theta))<a(\epsilon)/2,\ \theta\in[-r,0]$$

取 $\delta=\delta(\epsilon,t_0)=\min\{\epsilon/2,\delta'\}$, 则 $\delta\in(0,\epsilon)$ 并且 $S_{\delta,1}\subset S_{\delta',1}$. 于是对 $t\in J$

$$V_M^{S_{\delta,1}}(t_0)=\sup\{V(t_0+\theta,\psi(\theta))\,|\,\theta\in[-r,0],\ \psi\in S_{\delta,1}\}\leq a(\epsilon)/2<a(\epsilon)\leq V_m^{\partial S_{\epsilon,2}}(t)$$

定理 4 得证.

注 4 同文献 [4] 中有关结论相比，定理 5 不要求 V 具有无限小上界，因此一般不能保证零解 Liapunov 一致稳定. 如果 V 同时具有无限小上界，类似可由命题 1 和定理 3 证明 Liapunov 一致稳定性.

5 示　例

为了说明本文主要结果，现考虑如下非线性时滞系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=0.5[1+|x_1(t-r)|\cos t+3|x_2(t-r)|\sin t]x_1(t)/(t+t^2)\\ \dot{x}_2(t)&=1.5[1+|x_1(t-r)|\sin t+3|x_2(t-r)|\cos t]x_2(t)/(t+t^2)\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

其中 $t\in R_+$ 为常数. 给定集合 $T=[1,\infty)$, 以及

$$S_\alpha(t)=\{x\in R^2\,|\,|x_1|+3|x_2|<0.5t(1+t)^{-1}\}$$
$$S_\beta(t)=\{x\in R^2\,|\,|x_1|+3|x_2|<t(1+t)^{-1}\}$$

则系统 (3) 关于 $\{S_\alpha(1),S_\beta(t),T,1\}$ 实用稳定.

事实上根据定理 1, 取 $V(t,x)=|x_1|+3|x_2|$, $x=(x_1,x_2)^T$. 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^-_{(3)}V(t,x(t)) = \dot{x}_1(t)\,\mathrm{sgn}\,x_1(t-0)+3\dot{x}_2\,\mathrm{sgn}\,x_2(t-0) \le \\ 0.5[1+V(t-r,x(t-r))]V(t,x(t))/(t+t^2) \le \\ 0.5[1+V(t,x(t))]V(t,x(t))/(t+t^2), \quad (t,x_t)\in R_+\times\Omega\end{aligned}$$

于是可取 $w(t,u)=0.5(1+u)u/(t+t^2)$, $u\in R_+$. 计算得知

$$V_M^{S_\alpha}=0.5t(1+t)^{-1},\quad V_m^{S_\beta}(t)=t(1+t)^{-1},\quad \mathrm{D}^-V_m^{\partial S_\beta}(t)=(1+t)^{-2}$$

容易验证

$$w(t,V_m^{\partial S_\beta}(t))<\mathrm{D}^-V_m^{\partial S_\beta}(t)\,(t\in T),\quad V_M^{S_\alpha}(1)<V_m^{S_\beta}(1)$$

定理 1 条件全部满足. 故上述结论成立.

参 考 文 献

1 Minorsky N. Nonlinear Oscillations, Van Nostrand. Princeton, 1962

2 Krasovskii NN. Stability of Motion. Stanford University Press, 1963

3 Halanay A. *Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags*. New York: Acad. Press, 1966

4 Hale JK. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, 1977

5 王照林. 运动稳定性及其应用. 北京: 高等教育出版社, 1992

6 Martynyuk AA. *Practical Stability of motion*, Kiev, Naukova Numka, 1983(in Russian)

7 Lakshmikantham V, Leela S, Martynyuk AA. *Practical Stability of Nonlinear Systems*, World Scientific, Singapore, 1990

8 王照林, 楚天广. 非线性力学中的比较原理与应用. 中国科学 (A 辑), 1993, 23(10): 1070~1078

9 楚天广, 张宗达等. 线性时滞系统和时滞大系统的实用稳定性. 科学通报, 1991, 36(8): 568~571

10 Dieudonne J. *Foundations of Mordern Analysis*. New York: Academic Press, 1960

PRACTICAL STABILITY AND LIAPUNOV STABILITY OF DELAY SYSTEMS

Chu Tianguang

(*Department of Mechanics, Peking University, Beijing* 100871, *China*)

Wang Zhaolin

(*Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*)

Abstract This paper deals mainly with practical stability in terms of two measures for nonlinear systems with finite time delay. First, a kind of Ruzumikhin type differential comparison principle and monotone criterion are introduced. Then, based on them a Liapunov-Razumikhin direct method is presented, which results in general direct criteria of pactical stabilty. These criteria reduce the problem to a set of finite dimensional differential or integral inequlities and can be verified directly according to equations of the concerned system, and therefore are convenient for practical use. Also, the Liapunov stability of delay systems is considered by the proposed method. Finally, an illustrative example is woked out.

Key words nonlinear delay system, practical stability, Liapunov stability, Razumikhin condition, Liapunov-Razumikhin direct method.