高维含参系统的非线性振动[1)]

王洪礼　吴志强
(天津大学力学系，天津 300072)

摘要　提出了一种适于高维一般含参系统的改进平均法，分别给出了该系统在自治及非自治情况下的非线性振动近似解的计算公式，并用该法研究了 PD 控制器及 PID 控制器作用下的磁力轴承转子系统的非线性振动问题.

关键词　高维系统，平均法，磁力轴承

引　言

对非线性振动的研究，无论从理论上还是从应用上来说，近年来都取得了很大的进展，但一般的研究仅限于较低维数的系统，或者其线性化矩阵在临界参数下全部具有零实部，或者它是自治系统等等. 对于实际中广泛存在的更一般的系统，即其线性化矩阵的特征根在临界参数情况下有的具有零实部，有的具有非零实部，如磁力轴承转子系统 [1-5] 等的研究，还未见有关的研究报道. 其原因不仅是这类系统较复杂、难度大，更主要的是现有的非线性动力系统的分析方法难以直接处理这类系统，特别是非自治情形. 若对系统简单地进行简化，将使结果的可靠性得不到保证. 为此本文提出了适用于一般高维含参系统的改进平均法，分别讨论了自治及非自治的共振和非共振情况，并给出了一般的求解公式. 并用此方法首次解决了 PD 控制器和 PID 控制器作用下磁力轴承转子系统的非线性振动问题，这是规范型理论不能直接解决的.

1　一般系统的改进平均法

1.1 系统定义

今研究如下的系统

$$\dot{x} = F(x,u,t) \qquad x \in R^n,\ F: R^n \times R \times R \to R^n \tag{1}$$

其中 u 为分叉参数， F 为 t 的周期函数.

不失一般性，设分叉点为 $(0,u_0)$ ，即 $F(0,u_0,t)=0$ ， u_0 为分叉参数临界值. 设方程 (1) 在分叉点处的 Jacobi 阵为

$$A_0 = A(0,u_0,0) = \frac{\partial F(0,u_0,0)}{\partial x}$$

有 q 对纯虚根和 $(n-2q)$ 个具有严格负实部的特征值 (其中有 p 对复根)，且所有特

1) 国家自然科学基金资助课题.
1994-08-02 收到第一稿， 1995-06-03 收到修改稿.

征值都对应简单的初等因子，而摄动 Jacobi 矩阵

$$A(u)=A(0,u,0)=\frac{\partial F(0,u_0+\mu,0)}{\partial x} \tag{2}$$

的特征值为 $\lambda_{2j-1}=\alpha_j(\mu)+\mathrm{i}\beta_j(\mu)$, $\lambda_{2j}=\bar{\lambda}_{2j-1}$, $\dfrac{\mathrm{d}\alpha_j(\mu)}{\mathrm{d}\mu}\neq 0(j=1,2,\cdots,q)$ 其余的特征根全部具有负实部. 现将 $A(\mu)$ 在 $\mu=0$ 处展开 (仅取线性项) 有

$$A(u)=A_0+D_uA(u_0)\mu=A_0+A_1\mu$$

系统方程 (1) 既可以是自治的，又可以是非自治非共振及非自治共振的. 下面对这三种情况分别讨论：

a) 自治情形

$$\dot{x}=A_0x+\varepsilon F_a(x,\varepsilon) \tag{3a}$$

b) 非自治非共振

$$\dot{x}=A_0x+f(vt)+\varepsilon F_b(x,vt,\varepsilon) \tag{3b}$$

c) 非自治共振

$$\dot{x}=A_0x+\varepsilon F_c(x,vt,\varepsilon) \tag{3c}$$

其中 ε 为小参数，且 $\mu=\varepsilon\eta$, $F_a(x,\varepsilon)$, $F_b(x,vt,\varepsilon)$, $F_c(x,vt,\varepsilon)$ 关于 ε 解析，且是 x 的多项式向量函数. 共振条件为

$$\omega_k=\omega+\varepsilon\sigma \qquad (\sigma=O(1))$$

其中

$$\omega=\Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{q}n_j\omega_j+m\gamma\Big)\Big/(1-n_k)$$

1.2 系统降维的标准方程组

取变换

a) 自治情形

$$x=T(t)b \tag{4a}$$

b) 非自治非共振

$$x=T(t)b+x^* \tag{4b}$$

c) 非自治共振

$$x=T_gb \tag{4c}$$

其中 $b=b(t)$, $T(t)=\hat{T}E(t)$ 是由 A 的纯虚特征根对应的派生系统基解和非零实部的特征根对应的特征向量组成的列阵. x^* 是系统 (3b) 的派生系统的一个特解, T_g 则用 ω 替换 $T(t)$ 中 ω_k 而得.

将变换 (4) 代入 (3) 中可得

$$\left.\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\dot{b}_{2j-1}\\ \dot{b}_{2j}\end{bmatrix}=\varepsilon\begin{bmatrix}\cos\omega_j t & -\sin\omega_j t\\ \sin\omega_j t & \cos\omega_j t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_j^{*\mathrm{T}}\\ Q_j^{*\mathrm{T}}\end{bmatrix}f(x,vt,\varepsilon)|_{(4)}\qquad(j=1,2,\cdots,q)\\ &\begin{bmatrix}\dot{b}_{2l-1}\\ \dot{b}_{2l}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_l & \beta_l\\ -\beta_{lj} & \alpha_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{2l-1}\\ b_{2l}\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}P_l^{*\mathrm{T}}\\ Q_l^{*\mathrm{T}}\end{bmatrix}f(x,vt,\varepsilon)|_{(4)}\quad(l=q+1,\cdots,p)\\ &\dot{b}_r=\lambda_r b_r+\varepsilon R_r^{*\mathrm{T}}f(x,vt,\varepsilon)|_{(4)}\qquad(r=2p+1,\cdots,n)\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

其中 P^*, Q^*, R^* 为派生系统的共轭方程组的特征向量，且满足正规化条件. 自治情况下变换 (4) 代表 (4a) 且 $f(x,vt,\varepsilon)=F_a(x,\varepsilon)$，其余情况类推. 由式 (5) 中第 $2q+1$ 式到第 n 式，及前 $2q$ 式，得形式解

$$b_m=\varepsilon\cdots+\varepsilon^2\cdots\qquad(m=2q+1,\cdots,n)\tag{6}$$

(a) 自治情形：$b_m=b_m^a$ 为 b_{2j-1}，$b_{2j}(j=1,2,\cdots,q)$ 的非线性函数.

(b) 非自治非共振：$b_m=b_m^b$ 为 b_{2j-1}, $b_{2j}(j=1,2,\cdots,q)$ 的非线性函数，且是时间 t 的三角函数，组合谐波中含有外激励成分.

(c) 非自治共振：$b_m=b_m^c$ 为 b_{2j-1}, $b_{2j}(j=1,2,\cdots,q)$ 的非线性函数，各谐波项中不含有 ω_k 成份，而代之以 ω.

令

$$\left.\begin{aligned}b_{2j-1}&=r_j\cos\theta_j\\ b_{2j}&=r_j\sin\theta_j\end{aligned}\right\}\quad j=1,2,\cdots,q\tag{7}$$

将 (6) 和 (7) 代入 (5) 前 $2q$ 个表达式，得原系统降维标准方程组

$$\begin{bmatrix}\dot{r}_j\\ r_j\dot{\theta}\end{bmatrix}=\varepsilon\begin{bmatrix}\cos(\omega_j t-\theta_j) & -\sin(\omega_j t-\theta_j)\\ \sin(\omega_j t-\theta_j) & \cos(\omega_j t-\theta_j)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_j^{*\mathrm{T}}\\ Q_j^{*\mathrm{T}}\end{bmatrix}f(x,vt,\varepsilon)|_{(4)}\quad(j=1,2,\cdots,q)\tag{8}$$

2 标准方程组的求解

降维后的标准方程组 (8)，已完全可由标准的平均法[6]求得其近似解，然后只需将此代回所作的变换即可得原系统的近似解.

当系统维数很高时，其 Jacobi 阵的对角化可能有困难，但只要其纯虚特征根的个数不是太多，就仍可用前面的方法有效地进行求解 (参见例 1).

3 磁力轴承转子系统的非线性振动

下面分别讨论不计转子的不平衡质量及磁极间相互耦合和漏磁的情况下，在 PD 控制器和 PID 控制器两种情况下的磁力轴承转子系统的非线性振动.

例　PD 控制器作用下磁力轴承转子系统

系统的动态方程为

$$\dot{y}=A_0y+\varepsilon[\eta A_1y+f_2(y)+f_3(y)]+f(\Omega\tau)\tag{9}$$

其中 $y=(y_1,y_2,y_3)$， y_1，y_2，y_3 分别表示无量纲位移、速度及控制电流， A_0 的特征值为 $\pm i\sqrt{-(c_{10}+a_3c_{01})}$ 及 a_4.

取变换

$$y=T_0E(t)b+\frac{\Lambda}{\omega^2-\Omega^2}(\sin\Omega\tau,\Omega\cos\Omega\tau,a_3\sin\Omega\tau)^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

代入 (9) 可得

$$\dot{b}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&a_4\end{bmatrix}b+\varepsilon E^{\mathrm{T}}(t)T_0^{-1}[f_2(y)+f_3(y)]|_{(4b)} \tag{11}$$

显见 b_3 是一次以上的小量，故求一次近似时，可取 $b_3=0$，从而

$$\begin{bmatrix}\dot{r}\\r\dot{\theta}\end{bmatrix}=\varepsilon\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\\sin\varphi&\cos\varphi&0\end{bmatrix}T_0^{-1}[f_2(y)+f_3(y)]|_{y=y_0} \tag{12}$$

由 (12) 解得 r， θ 的一次近似解代入 (10) 即得原系统 (9) 的一次近似解 (为节省篇幅此处略). 由此可知，在求解过程中可以避免对原系统的 Jacobi 阵对角化，因此该法可用于求解高维问题.

PID 控制器作用下的磁力轴承转子系统的非线性振动亦可用此方法计算.

4 小 结

对于一般的高维含参非线性系统，本文提出的改进的平均法是一种有效的系统降维方法，实际上只要能求得系统 Jacobi 矩阵在临界参数下实部为零的那一部分复特征根及特征向量，就可以对该系统进行求解. 因此只要系统纯虚特征根的个数不是很大，则即使是对于维数很高的系统，本方法也都是有效的.

参 考 文 献

1 Gerhard Schweitzer, Magnetic Bearing-Applications, Concepts and Theory, JSME, *Int 5* Series Ⅲ, 1990, 33(1)

2 通口俊郎，水野毅. 五自由度制御形磁气轴受制御的研究. 见：计测自动制御学会论文集，昭和 57 年 5 月

3 王洪礼，吴志强. 磁力轴承的磁力分析及刚度研究. 天津大学学报， 1994(4)

4 王洪礼等. 磁力轴承的控制和动态过程研究. 机械工程学报， 1994(6)

5 王洪礼，吴志强. 磁力轴承参数对转子运动稳定性的影响. 应用数学和力学， 1994, 15(4)

6 陈予恕. 非线性振动. 天津：天津科学技术出版社， 1983

NONLINEAR VIBRATION OF THE HIGH DIMENSIONAL SYSTEMS WITH PARAMETERS

Wang Hongli Wu Zhiqiang
(*Dept. of Mechanics, Tianjin University, Tianjin* 300072, *China*)

Abstract This paper proproses an improved averaging method suitable for the general parameterized high dimensional systems and gives approximate formula of the nonlinear vibration in the systems under the autonomous, nonautonomous conditions respectively. By the method it investigates the nonlinear vibration in the active megnetic bearing(AMB)-rotor systems acted on by the PD controller, and by the PID controller.

Key words high dimensional systems, averaging method, AMB