

滚盘实际运动的动力学研究¹⁾

俞 慧 丹

(浙江师范大学物理系, 金华 321004)

陈 滨

(北京大学力学系, 北京 100871)

摘要 以滚盘实际运动为基础, 按照产生约束的力学条件, 建立符合实际的动力学模型; 利用数值模拟检验理论结果, 并解决了滚盘倒地过程中所出现的奇异问题, 得到与实际非常接近的解.

关键词 滚盘, 纯滚, 摩擦力, 数值模拟

引 言

作为经典非完整动力学三个典型例子之一, 滚盘问题由于其直观、易于实现以及工程中的广泛实用性, 为众多的力学工作者所研究^[1~5]. 但是, 现有对滚盘动力学的研究仅考虑纯滚情形. 而实际当中, 情况要复杂得多, 这表现在: (1) 运动是分段的. 通常初始条件不满足纯滚要求, 滚盘倒地时纯滚条件会破坏, 因此滚盘实际运动会经历由连滚带滑到纯滚到连滚带滑直至倒地的过程. (2) 从约束条件看, 有着完整约束与非完整约束随力学条件不同而产生转换. (3) 滚盘原地自旋明显的衰减和滚动半径的收缩表明在实际中必须考虑阻尼因素.

本文研究的目标是以滚盘的实际运动为基础, 以相互作用的力学分析为根据, 建立符合实际运动规律的动力学模型及其转换条件; 利用数值模拟检验其正确性, 并着重解决大范围角运动引起在计算上的奇异性问题.

1 滚盘实际运动的动力学模型

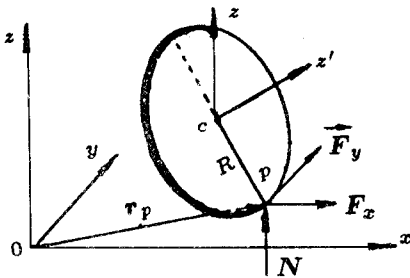
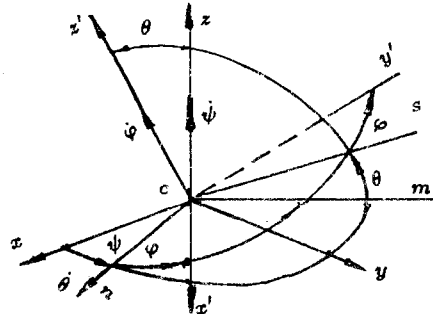
考虑一均质薄边圆盘在水平面上滚动. 圆盘质量 m , 半径 R . 取 $Oxyz$ 为固定参考系, 其中 Oxy 为水平地面. 描述圆盘运动的参数为: 质心在 $Oxyz$ 中的坐标 x_c, y_c, z_c , 圆盘绕质心的转角 ψ, θ, φ . 其中 ψ, θ, φ 是由平动系 $cxyz$ 到圆盘固连系 $cx'y'z'$ (cz' 垂直于盘面) 按图 2 转动而成.

根据运动学关系, 可以得到瞬时角速度

$$\omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T = [\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi, \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}]^T \quad (1.1)$$

1) 国家自然科学基金和高校博士点基金资助项目.

1994-09-21 收到第一稿, 1995-02-22 收到修改稿.

图 1
Fig.1图 2
Fig.2

触地点位矢

$$\mathbf{r}_P = [x_c + R \cos \theta \sin \psi, y_c - R \cos \theta \cos \psi, z_c - R \sin \theta]^T \quad (1.2)$$

盘上 P 点速度

$$\mathbf{v}_P = [v_{Px}, v_{Py}, 0]^T \quad (1.3)$$

式中

$$v_{Px} = \dot{x}_c + R \cos \psi (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) - R \dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \quad (1.4)$$

$$v_{Py} = \dot{y}_c + R \sin \psi (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) + R \dot{\theta} \sin \theta \cos \psi \quad (1.5)$$

完整约束

$$z_c - R \sin \theta = 0 \quad (1.6)$$

地面给滚盘的作用力有摩擦力 $F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}$ 与正反力 $N \mathbf{k}$, 在 z 方向考虑有阻尼力矩 $-mR^2 \zeta \omega_z \mathbf{k}$, 其中 ζ 为阻尼系数. 根据质心运动定理和动量矩定理, 在莱沙尔坐标架 $cnsz'$ 上可得到如下方程

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_c \cos \psi + \ddot{y}_c \sin \psi &= (F_y \sin \psi + F_x \cos \psi)/m \\ -\ddot{x}_c \sin \psi + \ddot{y}_c \cos \psi &= (F_y \cos \psi - F_x \sin \psi)/m \\ \ddot{z}_c &= N/m - g \\ J_1 \ddot{\theta} - J_1 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + J_3 \dot{\psi} \sin \theta (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) &= \\ &\quad -RN \cos \theta + R \sin \theta (F_y \cos \psi - F_x \sin \psi) \\ J_1 \ddot{\psi} \sin \theta + 2J_1 \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta - J_3 \dot{\theta} (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) &= -mR^2 \zeta \omega_z \sin \theta \\ J_3 (\ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\varphi}) &= R(F_y \sin \psi + F_x \cos \psi) - mR^2 \zeta \omega_z \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

式中, $J_1 = (1/4)mR^2$, $J_3 = (1/2)mR^2$ 为圆盘绕惯性主轴的转动惯量. 根据滚盘运动不同的条件, 力学模型又分为以下两种不同的阶段:

1) 连滚带滑阶段 当滚盘触地点有滑动时, 这就是连滚带滑阶段. 此时地面给的摩擦力为滑动摩擦力. 记滑动摩擦系数为 μ , 则

$$F_x = -\mu N v_{px}/v_p, \quad F_y = -\mu N v_{py}/v_p \quad (1.8)$$

滚盘此时仅受一完整约束 (1.6). 利用它消去 z_c , 可得到连滚带滑阶段的动力学方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_c &= -\mu R v_{px} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta + g/R)/v_p \\ \ddot{y}_c &= -\mu R v_{py} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta + g/R)/v_p \\ \ddot{\theta} &= \{4[\cos \theta - \mu \sin \theta (v_{px} \sin \psi - v_{py} \cos \psi)/v_p](\dot{\theta}^2 \sin \theta - g/R) - \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - \\ &\quad 2\dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta\} / [1 + 4 \cos^2 \theta - 4\mu \sin \theta \cos \theta (v_{px} \sin \psi - v_{py} \cos \psi)/v_p] \\ \ddot{\psi} &= 2\dot{\theta} \dot{\varphi} / \sin \theta - 4\zeta(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \\ \ddot{\varphi} &= -2\dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta / \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta - 2\mu(v_{px} \cos \psi + v_{py} \sin \psi) \cdot \\ &\quad (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta + g/R)/v_p + 2\zeta \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

滚盘实际运动中, 通常在初始和在倒地之前都属于这种阶段.

2) 纯滚阶段 当滚盘触地点速度为零时, 滚盘由连滚带滑变为纯滚. 由 (1.4), (1.5) 得到此阶段满足的约束方程

$$f_1 = \dot{x}_c \cos \psi + \dot{y}_c \sin \psi + R(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) = 0 \quad (1.10)$$

$$f_2 = \dot{x}_c \sin \psi - \dot{y}_c \cos \psi - R\dot{\theta} \sin \theta = 0 \quad (1.11)$$

滚盘此时成为非完整系统. 在此阶段中, 滚盘与地面间的摩擦力为静摩擦力, 式 (1.8) 不再成立. 利用约束方程, 可以消去未知力 F_x , F_y , N 和质心坐标, 得到纯滚阶段的角运动动力学方程

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\frac{6}{5} \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta - \dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta - \frac{4g}{5R} \cos \theta \\ \ddot{\psi} &= 2\dot{\theta} \dot{\varphi} / \sin \theta - 4\zeta(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \\ \ddot{\varphi} &= -2\dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta / \sin \theta + \frac{5}{3} \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta + \frac{10}{3} \zeta(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

寻求质心和触地点位置的方程不难由约束方程得到.

3) 转换条件 滚盘连滚带滑的条件是 $v_p \neq 0$. 一旦 $v_p = 0$, 则滚盘脱出连滚带滑阶段, 进入纯滚阶段. 在纯滚阶段中必须保持触地点速度为零. 从相互作用力条件来看, 必须保证维持约束成立的相互水平作用力小于最大静摩擦力. 否则, 纯滚条件破坏, 非完整约束解除, 滚盘变为连滚带滑. 转换的条件可以通过计算静摩擦

力在 n, m 方向的投影而得到

$$F_n = mR \left[\frac{1}{3} \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \frac{2}{3} \zeta \cos \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \right] \quad (1.13)$$

$$F_m = mR \left[-\dot{\psi}^2 \cos^3 \theta - \dot{\psi} \dot{\varphi} \left(1 - \frac{6}{5} \sin^2 \theta \right) + \frac{4g}{5R} \cos \theta \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta \right] \quad (1.14)$$

$$N = mR \left[-\frac{6}{5} \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta - \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta \sin \theta - \frac{4g}{5R} \cos^2 \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{g}{R} \right] \quad (1.15)$$

滚盘由纯滚转变为连滚带滑的判别条件为

$$F = \sqrt{F_n^2 + F_m^2} \geq \mu_{\max} |N| \quad (1.16)$$

式中, $\mu_{\max}$ 为静摩擦系数.

2 第二套坐标下的动力学模型

在本文的动力学研究中, 由于要模拟滚盘从开始到倒地的整个过程, 角度的计算范围是很大的. 当 θ 在 $\pi/2$ 邻近时, 描述的是接近正常滚动的情况, 此时上节给出的动力学模型非常适用. 但当 θ 变化接近 0 或 π 时, 上节的动力学模型接近描述坐标的奇点, 数值计算成为不可能. 这是刚体动力学大范围计算经常碰到的情况. 针对本课题的特点, 我们采取用两套描述坐标的办法来克服此种困难.

当 θ 接近 0 或者 π 时, 我们选用另一组欧拉角来描述滚盘的角运动. 此时 $Oxyz$, $x_c, y_c, z_c, cxyz, cx'y'z'$ 的含义均不变, 但欧拉角 α, β, γ 选用如图 3 所示的 $cx'y'z'$ 和 $cxyz$ 的转动关系, 很明显, 对于滚盘近于倒地的情形, $\beta \approx \frac{\pi}{2}$, 因而避开了奇点.

根据几何关系, 可以计算得到

$$\mathbf{r}_p = [x_c + Ra, y_c + Rb, z_c + Rc]^T \quad (2.1)$$

式中

$$a = -\sin \beta \cos \beta \cos \alpha / \sqrt{A} \quad (2.2)$$

$$b = -\sin^2 \beta \sin \alpha \cos \alpha / \sqrt{A} \quad (2.3)$$

$$c = -\sqrt{A} \quad (2.4)$$

$$A = \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \sin^2 \alpha \quad (2.5)$$

滚盘瞬时角速度

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\omega} = [\dot{\alpha} + \dot{\gamma} \cos \beta, \dot{\beta} \cos \alpha + \dot{\gamma} \sin \beta \sin \alpha, \dot{\beta} \sin \alpha - \dot{\gamma} \sin \beta \cos \alpha]^T \quad (2.7)$$

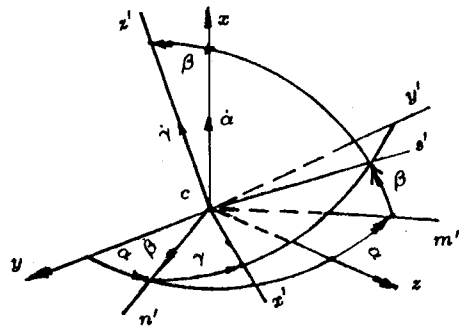


图 3
Fig.3

滚盘触地点速度

$$\mathbf{v}_p = [v_{px}, v_{py}, 0]^T \quad (2.8)$$

$$\mathbf{v}_p = [\dot{x}_c + R(\omega_y c - \omega_z b), \dot{y}_c + R(\omega_z a - \omega_x c), 0]^T \quad (2.9)$$

地面对滚盘的作用力仍记为 $F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + N \mathbf{k}$, 旋转阻尼力矩为 $-mR^2 \zeta \omega_z \mathbf{k}$, 根据和第一节一致的方法, 可以建立第二套坐标下滚盘连滚带滑的动力学方程

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha} &= (c_{12}c_3 + c_{34}c_1)/(c_2c_3 + c_4c_1) \\ \ddot{\beta} &= (c_{12}c_4 - c_{34}c_2)/(c_2c_3 + c_4c_1) \\ \ddot{\gamma} &= 2 \cdot MZ \cdot N_0 + 2\zeta\omega_z \cos \alpha \sin \beta + \dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta - (\cos \beta + 2 \cdot MZ \cdot \\ &\quad \sin^2 \beta \sin \alpha \cos \alpha / \sqrt{A})\ddot{\alpha} + 2 \cdot MZ \cdot \cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \cdot \ddot{\beta} / \sqrt{A} \\ \ddot{x}_c &= R\mu v_{px}(\sin^2 \beta \sin \alpha \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha} - \cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \cdot \ddot{\beta} - N_0 \sqrt{A}) / (v_p \cdot \sqrt{A}) \\ \ddot{y}_c &= R\mu v_{py}(\sin^2 \beta \sin \alpha \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha} - \cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \cdot \ddot{\beta} - N_0 \sqrt{A}) / (v_p \cdot \sqrt{A}) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

式中

$$c_1 = 1 - 4 \cdot MN \cdot \cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta / \sqrt{A} \quad (2.11)$$

$$c_2 = 4 \cdot MN \cdot \sin^2 \beta \sin \alpha \cos \alpha / \sqrt{A} \quad (2.12)$$

$$c_{12} = 4 \cdot MN \cdot N_0 - 4\zeta\omega_z \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma} \sin \beta \quad (2.13)$$

$$c_3 = 4 \cdot MS \cdot \cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \quad (2.14)$$

$$c_4 = \sin \beta + 4 \cdot MS \cdot \sin^2 \beta \sin \alpha \cos \alpha / \sqrt{A} \quad (2.15)$$

$$c_{34} = 2\dot{\beta}\dot{\gamma} + 4 \cdot MS \cdot N_0 - 4\zeta\omega_z \cos \alpha \cos \beta \quad (2.16)$$

$$MN = -(\mu cv_{px}/v_p + a) \cos \alpha + \mu \sin \alpha (-av_{py} + bv_{px})/v_p \quad (2.17)$$

$$MS = (b + \mu cv_{py}/v_p) \sin \beta + (\mu cv_{px}/v_p + a) \sin \alpha \cos \beta + \mu (-av_{py} + bv_{px}) \cos \alpha \cos \beta / v_p \quad (2.18)$$

$$MZ = (b + \mu cv_{py}/v_p) \cos \beta - (\mu cv_{px}/v_p + a) \sin \alpha \sin \beta - \mu (-av_{py} + bv_{px}) \cos \alpha \sin \beta / v_p \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} N_0 &= (\dot{\alpha} \sin^2 \beta \cos \alpha \sin \alpha - \dot{\beta} \cos^2 \alpha \cos \beta \sin \beta) / A \sqrt{A} - (4\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta \sin \alpha \cos \beta + \\ &\quad \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \dot{\beta}^2 \cos^2 \alpha (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)) / \sqrt{A} + g/R \end{aligned} \quad (2.20)$$

第二套坐标下滚盘纯滚动的动力学模型也可以同样建立, 此处略去.

两套坐标需要在计算中进行转换. 它们之间的关系可以利用 xyz 标架和 $cx'y'z'$ 标架之间方向余弦矩阵的两种表达式直接得到. 以下用 ψ, θ, φ 来表达 α, β, γ

$$\cos \beta = \sin \theta \sin \psi \quad (2.21)$$

由于 β 满足 $0 \leq \beta \leq \pi$, 所以

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta}, \text{ 取正值} \quad (2.22)$$

$$\sin \alpha = -\sin \theta \cos \psi / \sin \beta \tag{2.23}$$

$$\cos \alpha = -\cos \theta / \sin \beta \tag{2.24}$$

$$\sin \gamma = (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi) / \sin \beta \tag{2.25}$$

$$\cos \gamma = (-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi) / \sin \beta \tag{2.26}$$

α, β, γ 和 $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ 之间的关系式，可以利用以上公式求导而得。上述公式对于两套坐标转换的计算而言，是有冗余的。在实用中，要注意公式的选用，以期减少计算误差。

3 数值模拟结果

对于已建立的力学模型，需要用数值模拟来检验其正确性。采用常规的四阶龙格-库塔法，使用 FORTRAN 语言编程，我们在计算机上实现了本文所建立的描述滚盘实际运动的动力学模型。利用此动力学模型，我们对滚盘运动的不同情况作了数值模拟。

图 4~ 图 6 是在不同阻尼下，滚盘作纯滚时触地点运动的轨迹。初始条件为 $\theta = 60^\circ, \psi = 0, \varphi = 0, \dot{\theta} = 0, \dot{\psi} = 0.5, \dot{\varphi} = -15.3, x_c = 0, y_c = -15.05$ 。系数参数 $R = 0.5$ 。其中图 4 是力学著作中经常讨论的定常圆周滚动轨迹。图 5, 图 6 是实地观察中常见的结果。阻尼越大，半径收缩得越快。图 7 是根据计算机模拟计算得到的一个从连滚带滑到纯滚到连滚带滑直到倒地完整过程的解所作的示意图。初始条件为 $\theta = 80^\circ, \psi = 90^\circ, \varphi = 0, \dot{\theta} = 0, \dot{\psi} = -0.1, \dot{\varphi} = 0.2, x_c = 0, y_c = 0, \dot{x}_c = 0.1, \dot{y}_c = 0.2$ ，系统参数 $\mu = 0.2, R = 0.33, \mu_{\max} = 0.45, \zeta = 0.5$ 。整个过程的运动时间为 0.64 秒。如选择不同的初始条件和系统参数，利用本文建立的力学模型，可以得到更一般更复杂符合实际的解。

圆盘的原地自转和直滚两种情况很容易通过本文的模型算出，得到与实际相符的解。

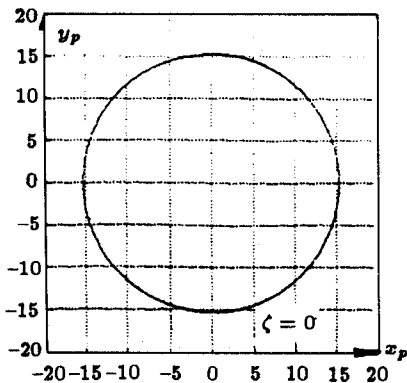


图 4
Fig.4

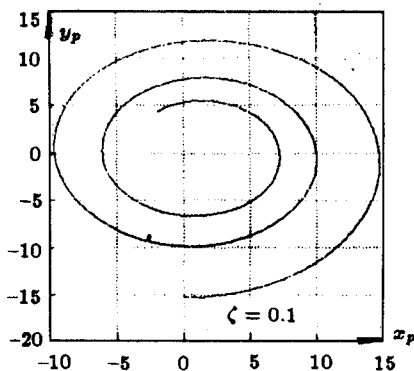


图 5
Fig.5

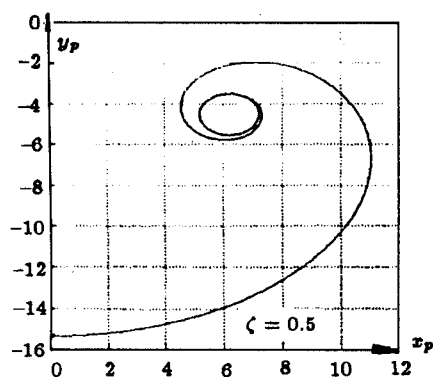


图 6
Fig.6

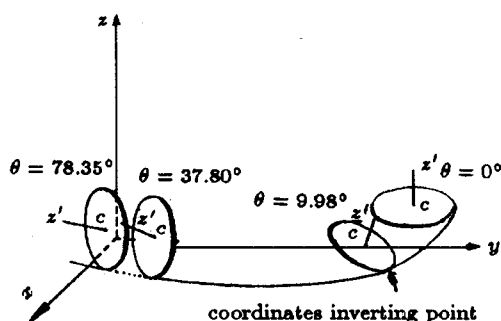


图 7
Fig.7

致谢 俞慧丹感谢许克峰博士的帮助.

参 考 文 献

- 1 陈滨. 分析动力学. 北京: 北京大学出版社, 1987
- 2 梅凤翔. 非完整力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985
- 3 贾书惠. 刚体动力学. 北京: 高等教育出版社, 1987
- 4 汪家诩. 分析动力学. 北京: 高等教育出版社, 1983
- 5 朱照宣等. 理论力学 (上下册). 北京: 北京大学出版社, 1982

DYNAMIC STUDY OF A VIRTUALLY ROLLING DISC

Yu Huidan

(Dept. of Phys., Zhejiang Normal Univ., Jinhua 321004, China)

Chen Bin

(Dept. of Mach., Peking Univ., Beijing 100871, China)

Abstract On the basis of the virtual motion of a rolling disc, we present a virtual dynamical model according to the mechanical conditions of some constraints, and test the theoretical solutions by means of numerical simulation. Meanwhile we have also solved the "singular" problem when the disc falls down to the ground.

Key words rolling disc, rolling only, friction, numerical simulation