第 28 卷 第 1 期　　力　学　学　报　　Vol. 28, No.1
1996 年 1 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Jan., 1996

约束位置的修改对振动模态的影响[1)]

胡海昌　刘中生　王大钧
(北京大学力学系，北京 100871)

摘要　结构的约束位置对其固有振动特性有重要的影响，因此计算固有振动特性对约束位置的敏度是结构优化以及模型校正等的重要基础性工作. 本文从广义变分原理出发，建立了约束位置的小修改导致的固有值和振动模态增量的方程，针对模态增量方程的求解，提出了一种处理原本征函数空间不完备的方法，从而可以在扩展的原本征函数空间内对振型增量进行展开. 针对模态截断问题，本文又提出了一种 "模态展开 + 幂级数展开" 的混合展开法，这种展开法的收敛性好，收敛程度易于估计，实用方便.

关键词　约束位置修改，模态敏度，模态截尾，边界值问题

前　言

结构的约束位置的修改必然引起它的振动固有值 (固有频率的平方) 和振动模态的相应变化，定性和定量地分析这种因果关系都有实际意义，它不仅提供了优化设计所需的梯度信息，对于模型校正和模型误差的预估都有实际意义.

关于结构固有振动特性的敏度分析问题已有很多的研究报告[1~4]. 但是，关于约束位置的修改对固有振动特性的影响问题. 研究得还很不充分，文献 [5] 讨论了这个问题，但仅仅得到了固有值的敏度公式. 实际上，文献 [5] 的方法难以直接推广到振型增量问题，困难在于约束的修改导致了振型增量不再属于原本征函数的空间. 本文则从广义变分原理出发，比较容易地得到了固有值增量和振型增量的方程. 针对振型增量方程的求解，本文解决了如下两个关键问题：给出了扩展原本征函数空间的方法，使得振型增量可以在扩展的原本征函数空间内进行展开；针对模态截断问题，给出了被截断模态对振型增量的贡献的方程以及求解方法，即 "模态展开 + 幂级数展开" 的混合展开法.

需要说明的是，对于本文所用的具体对象 (梁), 本来不需要采用如此迂回曲折的办法，本文只是以此作为一个例子，建立一套方法，以便用于其它求不到精确解，也难于求得足够多的初始本征对的复杂结构.

1　问题的描述

考虑图 1 所示的均匀梁，它左端 ($x=0$) 固支，右端 ($x=l$) 自由，在 $x=b$ 处有约束，即 $y(b)=0$, EJ 代表弯曲刚度，m 代表单位长度的质量. 如果将约束从 $x=b$ 处移

1) 国家自然科学基金和国家教委博士点专项基金资助项目.
1994-04-16 收到.

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

至 $x=b+\delta b$ 时，它的振动频率及其模态都将发生变化. 本文的问题就是：假设已求得了相应于约束在 $x=b$ 时的振动模态 $y_{0i}(x)$ 及其固有频率 $\omega_{0i}(\lambda_{0i}\equiv\omega_{0i}^2)$, $i=1,2,\cdots$, 问当 b 有了变分 δb 时， λ_{0i} 和 $y_{0i}(x)$ 的一阶变分是多少？

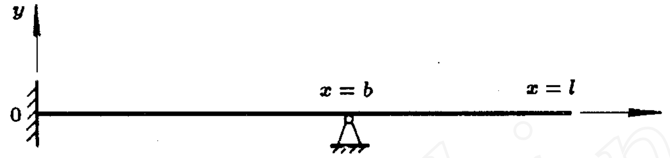

图 1 固支－简支－自由梁
Fig.1 Fixed-simply supported-free beam

2 基本方程

在处理几何约束时，使用广义变分原理来建立方程往往更方便. 图 1 梁的广义 Rayleigh 商可以写为

$$\pi=\left(V-2\int_0^l F\delta(x-b)y(x)\mathrm{d}x\right)\Big/T \tag{1}$$

其中

$$V=\int_0^l EJ(y'')^2\mathrm{d}x \tag{2a}$$

$$T=\int_0^l my^2\mathrm{d}x \tag{2b}$$

在 (1) 式的右端， $y(x)$ 是泛函 π 的自变函数， F 是 π 的自变量，习惯上称 F 为拉氏乘子，它的力学意义是约束处集中反作用力的大小. (1) 式的驻值问题可以写为

$$\lambda=\underset{\substack{y(x)\in D\\ F\in R}}{\mathrm{s.t.}}\left(V-2\int_0^l F\delta(x-b)y(x)\mathrm{d}x\right)\Big/T \tag{3}$$

其中 R 代表实数域， D 是 $y(x)$ 的选择域

$$D=\{y(x)|y(0)=y'(0)=0,\ y(x)\in C'(0,l)\} \tag{4}$$

需指出的是，在 π 中已借助拉氏乘子 F 将 $y(b)=0$ 这一约束解除，所以 $y(b)=0$ 不再对 D 起作用.

与 (3) 式对应的微分方程及边界条件是

$$EJy^{(4)}-\lambda my-F\delta(x-b)=0 \tag{5a}$$

$$y(b)=0 \tag{5b}$$

$$y(0)=y'(0)=0 \tag{6a}$$

$$EJy''(l)=EJy^{(3)}(l)=0 \tag{6b}$$

从方程 (5a) 可以得到

$$F=EJy^{(3)}(b+0)-EJy^{(3)}(b-0) \tag{7}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

方程 (5) 和 (6) 还不足以唯一确定 y 和 F，需补充归一化条件

$$\int_0^l m y_i^2(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{8}$$

3 扰动方程

令 λ_{0i}, y_{0i} 和 F_{0i} 分别代表相应于约束位置为 $x = b_0$ 时梁的第 i 阶固有值、振动模态和支座反力；令 λ_i, y_i 和 F_i 分别代表相应于约束位置 $x = b_0 + \delta b$ 时梁的第 i 阶固有值、振动模态和支座反力. 这里假设 λ_{0i} 是孤立本征值，并且与邻近本征值有较大间隔.

在只考虑一阶变分时，取 $b = b_0 + \delta b$，我们可以得到

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \delta\lambda_i \tag{9a}$$

$$y_i = y_{0i} + \delta y_i \tag{9b}$$

$$F_i = F_{0i} + \delta F_i \tag{9c}$$

将 (9) 式代入 (5)~(8) 式，并注意 (5) 和 (7) 式中的 b 应换为 $b_0 + \delta b$，可以得

$$EJ(y_{0i} + \delta y_i)^{(4)} - (\lambda_{0i} + \delta\lambda_i)m(y_{0i} + \delta y_i) - (F_{0i} + \delta F_i)\delta(x - b_0 - \delta b) = 0 \tag{10a}$$

$$y_{0i}(b_0 + \delta b) + \delta y_i(b_0 + \delta b) = 0 \tag{10b}$$

$$\begin{aligned} F_{0i} + \delta F_i = {} & EJy_{0i}^{(3)}(b_0 + \delta b + 0) - EJy_{0i}^{(3)}(b_0 + \delta b - 0) + \\ & EJ\delta y_i^{(3)}(b_0 + \delta b + 0) - EJ\delta y_i^{(3)}(b_0 + \delta b - 0) \end{aligned} \tag{10c}$$

$$\int_0^l m(y_{0i} + \delta y_i)^2 \mathrm{d}x = 1 \tag{10d}$$

对 (10) 式按照变分的阶次进行分组，可得如下两组方程

$$EJy_{0i}^{(4)} - \lambda_{0i} m y_{0i} - F_{0i}\delta(x - b_0) = 0 \tag{11a}$$

$$y_{0i}(b_0) = 0 \tag{11b}$$

$$EJ(\delta y_i)^{(4)} - \lambda_{0i} m \delta y_i - \delta F_i \delta(x - b_0) = \delta\lambda_i m y_{0i} + F_{0i}\delta b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x - b_0) \tag{12a}$$

$$y_{0i}'(b_0) \cdot \delta b + \delta y_i(b_0) = 0 \tag{12b}$$

$$F_{0i} = EJy_{0i}^{(3)}(b_0 + 0) - EJy_{0i}^{(3)}(b_0 - 0) \tag{13a}$$

$$\delta F_i = EJ\delta y_i^{(3)}(b + 0) - EJ\delta y_i^{(3)}(b_0 - 0) \tag{13b}$$

$$\int_0^l m y_{0i}^2 \mathrm{d}x = 1 \tag{14a}$$

$$\int m y_{0i}\delta y_i \mathrm{d}x = 0 \tag{14b}$$

从方程 (11)~(14) 可知：方程 (11)，(13a) 和 (14a) 恰好是相应于 $x = b$ 时的方程，因此其中的 y_{0i}, λ_{0i} 和 F_{0i} 就是变分之前梁的第 i 阶模态、固有值及其支座反

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

力. 其中 y_{0i} 满足边界条件 (6), 即

$$y_{0i}(0) = y'_{0i}(0) = 0 \tag{15a}$$

$$EJy''_{0i}(l) = EJy^{(3)}(l) = 0 \tag{15b}$$

从方程 (12) 还不能直接确定 δy_i, 还需补充边界条件和归一条件. 边界条件为

$$(\delta y_i(0))' = \delta y_i(0) = 0 \tag{16a}$$

$$EJ\delta y_i^{(3)}(l)' = EJ\delta y_i''(l) = 0 \tag{16b}$$

归一条件为式 (14d).

4 原模态空间的扩充

方程 (11) 汇同边界条件 (15) 和归一条件 (14a), 构成了当约束位于 $x = b_0$ 时的梁的振动本征值问题，用 $(\lambda_{0i}, y_{0i}(x))(i = 1, 2, \cdots)$ 代表第 i 个本征值和对应的振动模态 (本征函数), 用 D_0 代表这些本征函数所张的空间 (λ_{0i} 按升序排列)

$$D_0: \ y_{01}(x), \ y_{02}(x), \ y_{03}(x), \cdots$$

方程 (12) 汇同边界条件 (16) 和归一条件 (14b) 构成了当约束位于 $x = b_0 + \delta b$ 时的梁的振动本征值增量和振动模态增量的方程.

需要强调的是，由于 $\delta y_i(b_0) \neq 0$(见方程 (12b))，所以 $\delta y_i \notin D_0$，也就是说 δy_i 不能表达为 $y_{0i}(i = 1, 2, \cdots)$ 的线性组合. 从变分式 (3) 可知， $y_i \in D$，$y_{0i} \in D$，所以 $\delta y_i \in D$，即 δy_i 可表示为 D 的基的线性组合. 因为 D 包含 D_0，所以必须在 y_{0i} 之外补充适当的函数，才能构成 D 的基. 补充基的办法很多，这里构造一个力学含义明确、数学也较简单的函数 $w(x)$，它由下列方程的唯一解所确定

$$\left.\begin{aligned} &EJw^{(4)}(x) = p\delta(x - b_0) \\ &w(0) = w'(0) = 0 \\ &EJw''(l) = EJw^{(3)}(l) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

其中 p 是作用在 $x = b_0$ 处的集中力，为计算方便起见，按下式来选定 p

$$w(b_0) = 1 \tag{18}$$

下面证明函数族

$$w(x), \qquad y_{01}(x), \qquad y_{02}(x), \qquad \cdots$$

构成 D 的一个完备基. 证明分两方面，首先易知这个函数族的任一线性组合属于 D. 其次，任一属于 D 的函数 $\phi(x)$ 都可以表示成这个函数族的线性组合. 为此考察函数

$$\psi(x) = \phi(x) - \phi(b_0)w(x)$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

根据 $w(x)$ 的定义，有

$$\psi(b_0)=\phi(b_0)-\phi(b_0)\cdot 1=0$$

可见 $\psi(x)\in D_0$，可展开为

$$\psi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i y_{0i}(x)$$

于是得到

$$\phi(x)=\phi(b_0)w(x)+\sum_{i=1}^{\infty}a_i y_{0i}(x)$$

证毕.

5 $\delta\lambda_i$ 的表达式

既然 $\delta y_i\in D$，那么可得

$$\delta y_i=w(x)q_0+\sum_{j=1}^{\infty}y_{0j}(x)\cdot q_j \tag{19}$$

将 (19) 式代入 (12a) 中，并在两侧同乘 y_{0i}，然后在 $(0,l)$ 上积分得

$$\begin{aligned}\text{左边}=\ & q_0\int_0^l EJw^{(4)}y_{0i}\mathrm{d}x-\lambda_{0i}q_0\int_0^l my_{0i}w\mathrm{d}x=\\ & -\lambda_{0i}q_0\int_0^l my_{0i}w\mathrm{d}x=\\ & -q_0\int_0^l\left[EJy_{0i}^{(4)}-F_{0i}\delta(x-b_0)\right]w\mathrm{d}x=\\ & q_0\cdot F_{0i}\cdot w(b_0)\end{aligned} \tag{20}$$

$$\text{右边}=\delta\lambda_i+F_{0i}y_{0i}'(b_0)\cdot\delta b \tag{21}$$

将 (19) 式代入 (12b) 中，得

$$q_0\cdot w(b_0)=-y_{0i}'(b_0)\cdot\delta b \tag{23}$$

由 (20), (21) 和 (23) 式，可得

$$\delta\lambda_i=-2y_{0i}'(b_0)\cdot\delta b\cdot F_{0i} \tag{24}$$

6 δy_i 的扩展模态展开法

我们称 (19) 式为 δy_i 的扩展模态展开法，展开式中的系数 q_j 可以从方程 (11), (16) 中得到确定.

式 (23) 中已给出了 q_0 的结果 (注意到 $w(b)=1$)

$$q_0=-y_{0i}'(b_0)\cdot\delta b \tag{25}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

将 (19) 式代入 (11a) 中，并在两侧乘以 $y_{0j}(j\neq i,\ j\neq 0)$，并在 $(0,l)$ 上积分得

$$q_j=\frac{1}{\lambda_{0j}-\lambda_{0i}}\left[F_{0i}\delta b y'_{0j}(b_0)+q_0\int_0^l \lambda_{0i}mwy_{0j}\mathrm{d}x\right]\qquad (j\neq i) \tag{26}$$

将 (19) 式代入 (16b) 中，得

$$q_i=-q_0\int_0^l my_{0i}w\mathrm{d}x \tag{27}$$

利用上面的公式 (19), (25), (26) 和 (27) 便可确定 δy_i，还可用 (12b) 式求得 δF_i.

7 关于余项的微分方程

在实用上还必须考虑模态截断问题，即难于求得足够多的初始本征对问题. 设仅仅求得了前 $L(L>i)$ 阶初始本征对，即 $(\lambda_{0j},y_{0j})(j=1,2,\cdots,L)$ 已经知道，而其余的本征对 $(j\geq L+1)$ 均未知，设未知的全部振型 $y_{0j}(j\geq L+1)$ 对 δy_i 的贡献为 $R(x)$，那么可将 δy_i 表达为

$$\delta y_i=w(x)q_0+\sum_{j=1}^{L}y_{0j}q_j+R(x) \tag{28}$$

其中 $R(x)$ 定义为

$$R(x)=\sum_{j=L+1}^{\infty}y_{0j}(x)q_j \tag{29}$$

为了便于寻找 $R(x)$ 的近似解法，先求出 $R(x)$ 满足的微分方程和定解所需的各种条件. 将 (28) 式代入 (11a) 中，得

$$EJR^{(4)}(x)-\lambda_{0i}mR(x)=F(x) \tag{30a}$$

其中

$$\begin{aligned}F(x)=&-EJw^{(4)}(x)\cdot q_0-\sum_{j=1}^{L}EJy_{0j}^{(4)}q_j-\lambda_{0i}m\Big(w(x)q_0+\sum_{j=1}^{L}y_{0j}q_j\Big)+\\&\delta\lambda_i my_{0i}+F_{0i}\delta b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x-b)\end{aligned} \tag{30b}$$

将 (28) 式代入 (11b) 中，得

$$R(b)=0 \tag{31}$$

将 (28) 式代入 (14) 式中，得

$$R'(0)=R(0)=0 \tag{32a}$$

$$EJR^{(2)}(L)=EJR^{(3)}(L)=0 \tag{32b}$$

将 (28) 式代入 (16b) 中，得

$$\int_0^l my_{0i}R(x)\mathrm{d}x=-\int_0^l my_{0i}\cdot w\mathrm{d}x \tag{33}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

不难看出，$R(x)$ 满足正交关系

$$\int_0^l my_{0j}R(x)\mathrm{d}x=0 \qquad (1\le j\le L) \tag{34}$$

可以证明，$R(x)$ 是方程 (30)，(31)，(32)，(33) 和 (34) 的唯一解．所以，求 $R(x)$ 的近似解也就是求上述方程组的近似解．除了可应用各种通用的近似解法如能量法和加权残差法等等方法以外，本文提出一种新的迭代解法，它同时又是一种幂级数解法．

8 $R(x)$ 的幂级数展开求解

将 (26) 式代入 (29) 式中，并写成矩阵形式，得

$$R(x)=Y_H^{\mathrm{T}}(x)(\Lambda_H-\lambda_{0i}I)^{-1}\bar{Y}(x) \tag{35a}$$

其中

$$Y_H^{\mathrm{T}}(x)=\{y_{0\ L+1}(x),\ y_{0\ L+2}(x),\ y_{0\ L+3}(x),\ \cdots\} \tag{35b}$$

$$\Lambda_H=\mathrm{diag}(\lambda_{0\ L+1},\ \lambda_{0\ L+2},\ \lambda_{0\ L+3},\ \cdots) \tag{35c}$$

$$I=\mathrm{diag}(1,\ 1,\ 1,\ \cdots) \tag{35d}$$

$$\bar{Y}_H(x)=\{\bar{y}_{L+1}(x),\ \bar{y}_{L+2}(x),\ \bar{y}_{L+3}(x),\ \cdots\}^{\mathrm{T}} \tag{35e}$$

$$\bar{y}_j(x)=F_{0i}\delta b\cdot y'_{0j}(b)+\lambda_{0i}q_0\cdot\int_0^l mw(x)y_{0j}(x)\mathrm{d}x \tag{35f}$$

考虑下面的幂级数展开

$$(\lambda_{0j}-\lambda_{0i})^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_{0i}/\lambda_{0j})^k\cdot\lambda_{0j}^{-1} \tag{36}$$

当 $\lambda_{0i}/\lambda_{0j}<1$ 时，(36) 式是收敛的．这样，可将 (35a) 进一步写为

$$R(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{0i}^kY_H^{\mathrm{T}}(x)\Lambda_H^{-k-1}\bar{Y}_H(x) \tag{37}$$

按照 (35) 式的类似代号，定义

$$Y^{\mathrm{T}}(x)=\{y_{01}(x),\ y_{02}(x),\ y_{03}(x),\ \cdots\} \tag{38a}$$

$$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_{01},\ \lambda_{02},\ \lambda_{03},\ \cdots) \tag{38b}$$

$$\bar{Y}(x)=\{\bar{y}_1(x),\ \bar{y}_2(x),\ \bar{y}_3(x),\ \cdots\}^{\mathrm{T}} \tag{38c}$$

$$Y_L^{\mathrm{T}}(x)=\{y_{01}(x),\ y_{02}(x),\ \cdots,\ y_{0L}(x)\} \tag{38d}$$

$$\Lambda_L=\mathrm{diag}(\lambda_{01},\ \lambda_{02},\ \lambda_{03},\ \cdots,\ \lambda_{0L}) \tag{38e}$$

$$\bar{Y}_L(x)=\{\bar{y}_1(x),\ \bar{y}_2(x),\ \bar{y}_3(x),\ \cdots,\ \bar{y}_L(x)\}^{\mathrm{T}} \tag{38f}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

利用这些代号，可以将 (38) 式写为

$$R(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{0i}^{k}\cdot\left[Y^{\mathrm{T}}(x)\Lambda^{-k-1}\bar{Y}(x)-Y_L^{\mathrm{T}}(x)\Lambda_L^{-k-1}\bar{Y}(x)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}(z_k(x)-h_k(x)) \tag{39}$$

其中

$$z_k(x)=\lambda_{0i}^{k}Y^{\mathrm{T}}(x)\Lambda^{-k-1}\bar{Y}(x) \tag{40a}$$

$$h_k(x)=\lambda_{0i}^{k}Y_L^{\mathrm{T}}(x)\Lambda_L^{-k-1}\bar{Y}_L(x) \tag{40b}$$

如果把 (40b) 式写成求和形式，可以看出它是可以直接计算的

$$h_k(x)=\sum_{j=1}^{L}\left(\frac{\lambda_{0i}}{\lambda_{0j}}\right)^{k}\frac{1}{\lambda_{0j}}y_{0j}(x)\cdot\bar{y}_j(x) \tag{41}$$

虽然难于直接从 (40a) 中求得 $z_k(x)$, 但不难证明， $z_k(x)$ 可以从下面的递推算法中求得

$$\left.\begin{aligned}&EJz_0^{(4)}(x)=F_{0i}\cdot\delta b\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x-b)+q_0\lambda_{0i}mw(x)\\&z_0(0)=z_0'(0)=0\ ,\qquad EJz_0^{(2)}(l)=EJz_0^{(3)}(l)=0\\&z_0(b)=0\end{aligned}\right\} \tag{42a}$$

$$\left.\begin{aligned}&EJz_k^{(4)}(x)=\lambda_{0i}mz_{k-1}(x)\\&z_k(0)=z_k'(0)=0\ ,\qquad EJz_k^{(2)}(l)=EJz_k^{(3)}(l)=0\\&z_k(b)=0\end{aligned}\right\}\quad(k\geq 1) \tag{42b}$$

实际上，只要将 (40a) 式代入到 (42) 式中，便可证明递推格式 (42) 式是成立的.

(42a) 式的力学含义是明了的，它代表图 2 梁的静力位移问题.

(42b) 式的力学含义也是明了的，它代表了梁在分布载荷作用下的位移问题，如图 3 所示.

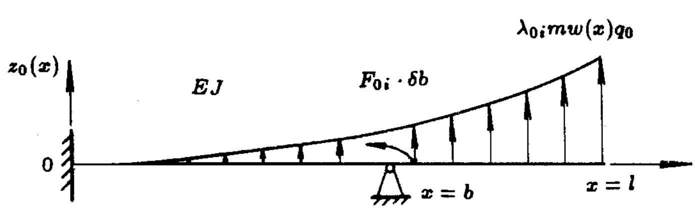

图 2 梁在分布力 $\lambda_{0i}mw(x)q_0$ 和力矩 $F_{0i}\cdot\delta b$ 作用下的变形问题

Fig.2 Displacement of the beam subjected to force and moment

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

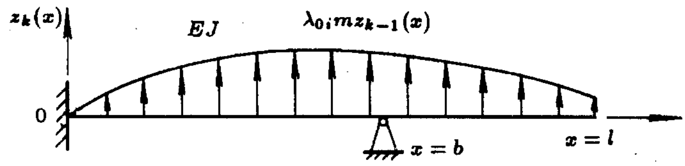

图 3 梁在分布力 $\lambda_{0i}mz_{k-1}(x)$ 作用下的变形问题
Fig.3 Displacement of the beam subjected to force

为了区别 (39) 式和 (29) 式这两个级数，用 $\bar{R}(x)$ 代表 (39) 式的级数，即

$$\bar{R}(x)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k(x) \tag{43a}$$

其中

$$r_k(x)=z_k(x)-h_k(x) \tag{43b}$$

由上可知级数 $\bar{R}(x)$ 的每一项 $T_k(x)$ 并不难算，它只需求解同一个梁在多工况下的变形.

$\bar{R}(x)$ 的收敛速度大致相当于 (36) 式右侧的幂级数，它的收敛性不难估计；而 $R(x)$((29) 式) 的收敛速度大致相当于级数 $\displaystyle\sum_{j=L+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{0j}-\lambda_{0i}}$ 的收敛速度，它的收敛速度难于估计，尤其在密集本征值情况下， $R(x)$ 的收敛性往往很不好.

9 结束语

本文研究了约束位置的改变对振动模态和频率的影响，不仅给出了本征值和振动模态的增量方程，还讨论了模态增量方程的求解问题，提出了在扩充后的原本征函数空间内进行模态展开的方法，并就模态截断问题，提出一种迭代算法，也是幂级数解法，是幂级数各项的递推算法. 幂级数的优点是便于估计收敛速度. 本文称这种解法为“模态展开 + 幂级数展开”的混合展开法. 文中虽然以一个简单的梁模型为例子，但所提出的方法并非局限于梁，它可以应用于许多问题. 从数学角度看，本文的问题是：微分方程边界位置的改变对本征值及其本征函数的影响问题，无疑，这类问题的实际背景是广泛的.

参 考 文 献

1 胡海昌. 多自由度结构固有振动理论. 科学出版社， 1987: 13~18

2 陈塑寰. 结构振动分析的矩阵摄动理论. 重庆出版社， 1991

3 刘中生. 结构修改的若干问题. 吉林工业大学博士学位论文， 1992 年， 3 月

4 Liu Zhong-sheng et al. Computing eigenvector derivatives in structural dynamics. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1993, 6(3): 291~300

5 Wang BP. Eigenvalue sensitivity with respect to location of internal stiffness and mass attachments. *AIAA Journal*, 1993, 31(4): 791~794

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

INFLUENCE OF SMALL CHANGES OF SUPPORT LOCATION ON VIBRATION MODE SHAPES

Hu Haichang Liu Zhongsheng Wang Dajun

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract It is of importance to study the influence of small changes of support location on vibration mode shapes because of its necessary role in structural optimization and model correction using the generalized variational principle, the first-order purturbation equations of vibration eigenproblem are derived. In order to solve these equations two difficulties are dealt with, one is associated with the incompleteness of the unperturbed eigenfunctions, the other the truncation of the higher modes. A hybrid expansion method, "modal expansion + power series", is presented to solve the perturbed equations, with the advantage of fast convergence and being easy to estimate its convergence.

Key words change of support location, modal sensitivity, modal truncation, boundary value problem

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net