# 用概率型模型测量格子气的粘性系数[1)]

刘 志 胡守信
(吉林大学数学系力学教研室，长春 130023)

**摘要** 在 Boltzmann 假设下，提出一种概率型格子气模型，并通过对平面 Poseuille 流的模拟，用数值方式“测量”了格子气体的粘性系数. 数值结果同理论上得到的解析粘性系数进行了定量比较，得到了非常符合的结果.

**关键词** 概率型格子气模型， Boltzmann 假设，粘性系数

## 引 言

FHP 框架下的格子气模型 [1-3]，是利用一些布置在六角型格子格线上运动的粒子构成的微观动力学模型，进而得到宏观动力学方程，来逼近流体运动所服从的 Navier-Stokes 方程. 但是由于此类格子气模型自身所固有的噪声大的缺点，很大程度上限制了它的应用.

本文拟改进 FHP 布尔型格子气模型，给出一种低噪声的概率型模型，并用此模型模拟计算了平面 Poiseuille 流，测量了几种不同的碰撞规则下的格子气体的粘性系数. 并讨论了由于规则变化，对格子气体雷诺数的影响，及 $g(\rho)$ 因子对雷诺数的影响.

## 1 概率型格子气模型的基本原理

我们考虑 FHP 的 7-bit 布尔型格子气模型 [1,2](如图 1 所示). 用 $n_i(\boldsymbol{r},t)$ 表示 $t$ 时刻， $\boldsymbol{r}$ 处的 $i$ 方向上的粒子数 (0 或 1), 则整个布尔场的演化由下面微观动力学方程控制

$$n_i(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{C}_i,\ t+1)=n_i(\boldsymbol{r},\ t)+\Delta_i(n) \quad (1.1)$$

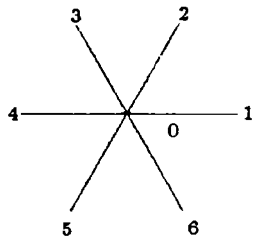


图 1 六角形格子
Fig.1 Hexagonal lattice

对 $n_i(\boldsymbol{r},t)$ 取系综平均，得到 $t$ 时刻， $\boldsymbol{r}$ 处， $i$ 方向的出现粒子的概率

$$f_i(\boldsymbol{r},t)=\langle n_i(\boldsymbol{r},t)\rangle \tag{1.2}$$

由 (1.1) 式可以得到粒子分布函数 $f_i$ 满足的离散形式的 Boltzmann 方程

$$f_i(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{C}_i,t+1)=f_i(\boldsymbol{r},t)+\Delta_i\Omega \qquad \Delta_i\Omega=\langle\Delta_i(n)\rangle \tag{1.3}$$

1) 国家自然科学基金资助项目.
1993-04-26 收到第一稿， 1994-09-02 收到修改稿.

定义宏观密度 $\rho$ 和动量流 $\rho\boldsymbol{u}$ 为

$$\rho = \sum_{i=0}^{6} f_i, \qquad \rho\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{6} \boldsymbol{C}_i f_i \tag{1.4}$$

在适当条件下，(1.3) 式对应的流体宏观方程为

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}) = 0 \\ &\partial_t(\rho u_\alpha) + \partial_\beta(g(\rho)\rho u_\alpha u_\beta) = \partial_\alpha P(\rho, u^2) + \partial_\beta(\nu\partial_\beta(\rho u_\alpha)) \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

其中， $g(\rho)$ 是平均格线密度 $d$ 的函数， $\nu(=-1/4\lambda-1/8)$ 是粘性系数， $\lambda$ 是线化碰撞矩阵的特征值 (详见文献 [2]). 在 Boltzmann 假设下，即不同方向的粒子的出现是相互独立的事件，可以得到

$$\Delta_i \Omega = \Delta_i^B \Omega \tag{1.6}$$

上式中， $\Delta_i^B \Omega$ 是 Boltzmann 假设下得到的碰撞函数

$$\Delta_i^B = \sum_{s,s'} (s_i - s_i') A(S \to S') \prod_j f_j^{S_j} (1-f_j)^{(1-S_j)} \tag{1.7}$$

此处 $A(S \to S')$ 表示由 $S$ 状态到 $S'$ 状态的转移概率，状态量 $S$ 定义为

$$S = \{s_i = 0 \text{ 或 } 1, \quad i = 0, 1, \cdots, 6\} \tag{1.8}$$

利用上述形式的 Boltzmann 方程，我们可以构造一种概率型格子气模型，与布尔型格子气模型不同的是，该模型从 Boltzmann 方程出发，直接计算粒子密度分布函数. 从物理概念上讲， Boltzmann 假设是同低密度条件相关的，因此该方法更适合于模拟低密度气体.

整个概率场的演化可以简单地描述如下：

1) 给定一个满足初始物理流场条件的概率场 $\{f_i(\boldsymbol{r}, t)\}$;

2) 在 $t$ 时刻，粒子在结点处按碰撞规则碰撞，碰撞后的 $f_i'$ 由 (1.3) 式求出；

3) 碰撞后，粒子沿格线运动到其最邻近的结点.

本模型的平衡解 $f_i^{eq}$ 仍为 Femi-Dirac 分布即

$$f_i^{eq} = \left[1 + \exp(h(\rho, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{q}(\rho, \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{C}\right]^{-1}$$

因此，对应的宏观方程与 FHP 框架上格子气模型是一致的.

## 2 边界条件处理

概率型格子气模型处理边界条件的能力优于布尔型模型.

### 2.1 固边界条件

概率型模型处理无滑移边界条件的方法与布尔型模型一样，即采用所谓的全反射处理方法，入射粒子的概率与原路全反射概率相等.

2.2 移动边壁条件

原来的布尔型模型实际上无法精确地使边壁维持一个给定的速度，它模拟给定速度边壁的方法是使入射边壁的粒子按某一概率反射，余下的折射出去.

概率型格子气模型处理给定边壁速度的问题方法相当简单，直接调整与壁面碰撞粒子的反射与折射概率，使边界粘附的流体维持和边壁相同的速度.

## 3 粘性系数测量

### 3.1 典型数值实验 —— 平面 Poiseuille 流

我们知道，平面 Poiseuille 流的层流稳态解在任一横截面内流动情况都一样，并且压力差沿截面均匀分布，这启发我们用一列格点来计算 Poiseuille 流流过一个横截面的流动情况. 办法是每时间步内，计算出截面边壁的粘性力所引起的动量损失，由于稳态时，边壁粘性力正好和截面上的压力差平衡，在保持总质量不变条件下，把动量损失反向均匀地加到截面各格点的流动方向上，就可保持整个截面的动量守恒. 所加的动量实际相当于加上压力差. 这种方法可称之为压力修正法，适用于简单的稳态问题.

### 3.2 数值结果

计算中我们采用 $1 \times 32 = 32$ 格点，平均速度 $u = 0.1$，平均格点密度 $d = 0.1$，初始速度均取成均匀速度值，计算结果表明，经过大约 400 步后，速度剖面便与抛物线非常接近 (见图 2). 这与用布尔模型的作全场计算的百万步计算与统计 [4] 相比，显然效率大大提高.

与真正做实验一样，利用管流中的速度分布值，就可以计算沿 $x$ 方向的流量，于是粘性系数可以简单地由公式 $\gamma = K/Q$ 求出. 式中 $Q$ 是流量， $K$ 是常数，与压

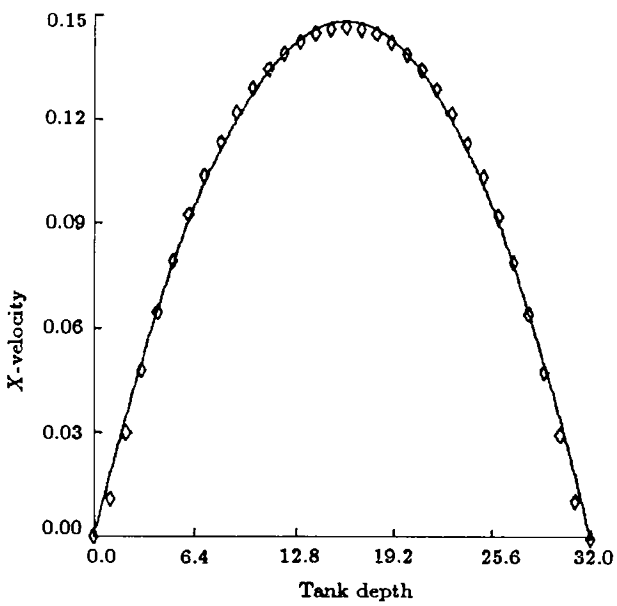


图 2 Poiseuille 流层流解
Fig.2 Poiseuille flow velocity profile

力梯度成正比.

我们就多个碰撞规则，用数值方法和理论分析方法测量和分析了粘性系数随平均格线密度的变化情形，在图 3 中进行了比较. 碰撞规则之一是 FHP-II 模型，考虑静止粒子后演变而来的在 128 种可能的碰撞情形当中，只有其中 22 种实际发生有效碰撞. 解析粘性公式为

$$\nu = \frac{1}{28d(1-d)^3\left(1-\frac{4d}{7}\right)} - \frac{1}{8} \tag{3.1}$$

碰撞规则之二包括了全部可能的 76 种有效碰撞，粘性系数公式由下式给出

$$\nu = \frac{1}{28d(1-d)\left(1-\frac{8d(1-d)}{7}\right)} - \frac{1}{8} \tag{3.2}$$

碰撞规则三是使规则一加上对偶不变性 (粒子 - 空洞交换不变性) 构造而来的，共有 40 种有效碰撞. 规则四从另一方面改进规则一，增加带有在碰撞过程中保持不变的 “观众” 的对头碰情形，共有 34 种有效碰撞 (由于篇幅所限，不再写出其粘性系数公

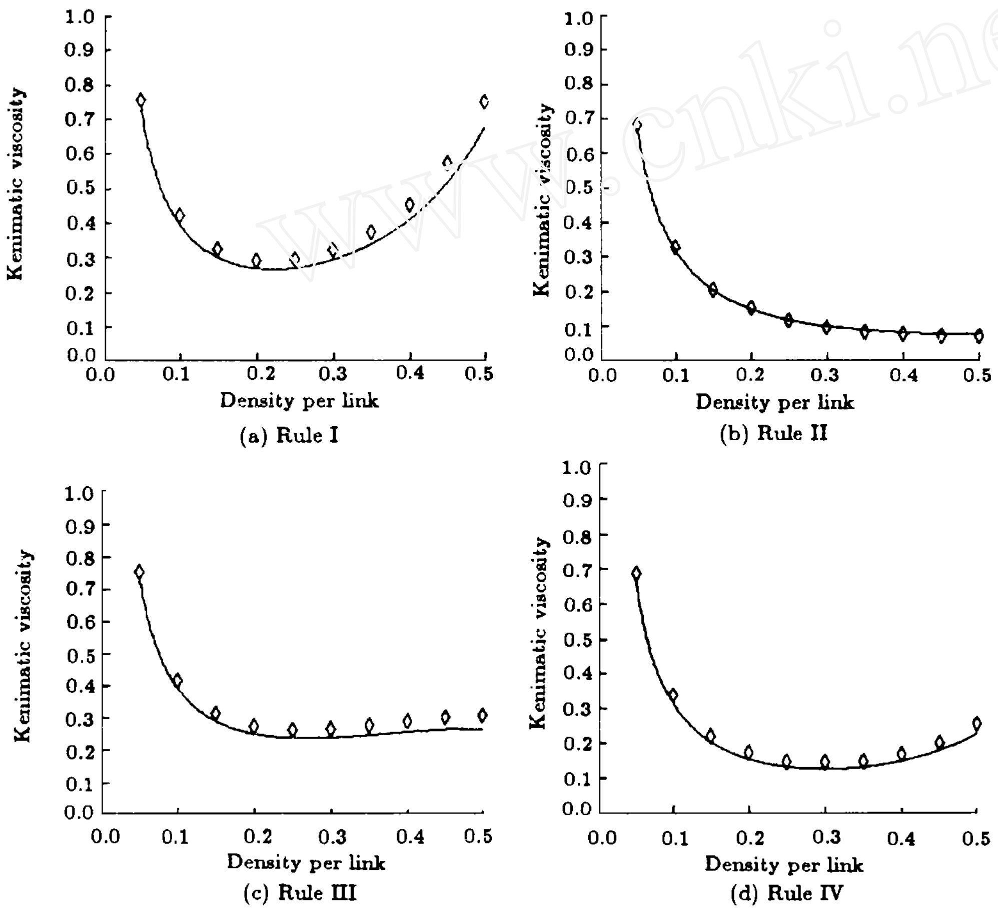


图 3 运动粘性系数与平均格线密度
Fig.3 Kenimatic viscosity versus density per link

式). 所有四个规则对应的理论解析解与数值解的比较见图 3(a)—(d).

本模型对流项前仍存在因子 $g(\rho)$，在不可压条件下，类似于文 [1]，可以用重新无量纲化手段使之与 N-S 方程统一起来，代价是对应方程雷诺数 $Re$ 将变成为格子气体的雷诺数 $Re^* = Reg(\rho)$. 由于 $g(\rho) < 1$，因此 $Re^* < Re$. 通常 N-S 方程中，粘性系数 $\nu$ 越小，对应的雷诺数越大. 而格子气流体中，由于因子 $g(\rho)$ 影响，$Re^*$ 还与平均格线密度 $d$ 的变化有关.

## 4 结论及分析

本文中使用的格子场是相当小的，实际计算只采用了 1×32 个格点，但所模拟的平面 Poiseuille 流与理论上的抛物线解符合得很好. 图 2 中几乎看不出噪声的影响.

图 3 中，测得的粘性系数与理论分析值相当一致. 说明了概率型格子气模型的有效性，同时表明了本方法可作为测试粘性的典型数值方法.

概率型格子气方法是一种初始的 Lattice Boltzmann 法 (LBM). 但本文中的算法对一般的 LBM 是同样适用的.

## 参 考 文 献


1 Frisch U, Humieres DD, Hasslacher Brosl, et al. Lattice gas hydrodynamic in two and three dimensions. *Complex System*, 1987, 1: 649–707

2 Humieres DD, Lallemand Pierre. Numerical dimulations of hydrodynamics with lattice gas automata in two dimensions. *Complex System*, 1987, 1: 599–632

3 胡守信. 直管道中绕平板平面流动的格子气仿真. 计算物理， 1989, 6(4): 457–464

4 Kadanoff Leo P, McNamara Guy R, Zanetti Gianlaigi. A poiseuille viscometer for lattice gas automata. In: Dolen GD ed. Lattice Gas Methods for Practial Differential Equations. New York: Addison-wesley Publishing Company, 1989, 383–397


# MEASUREMENTS OF VISCOSITY OF A LATTICE GAS USING A PROBABILITY MODEL


Liu Zhi Hu Shouxin

(*Department of Mathematics, Jilin University, Changchun* 130023, *China* )



**Abstract** A probability type lattice gas model is proposed, using Boltzmann approximation. Kinamatic shear viscosity of the lattice gas is mesured by numerical simulation of Poiseuille flow. Quantitative comparison of the numerical results with theoritical ones are shown, they are in good agreement.



**Key words** probability type lattice gas model, Boltzmann approximation, viscosity