非完整非保守系统的积分因子和守恒律

俞慧丹　张解放　　俞继雄
(浙江师范大学物理系，金华 321004)　(浙江粮食学校，金华 321000)

摘要　通过寻找积分因子来建立非完整非保守系统的守恒律，讨论了存在守恒定律的必要条件，并举例说明其应用.

关键词　非完整非保守系统，积分因子，守恒定律

引　言

非完整系统的运动方程的积分方法是分析力学的重要而困难的问题. 传统的 Hamilton-Jacobi 积分方法在推广应用于非保守或非完整系统时遇到了严重困难并具有极其严格的限制 [1,2]. 南斯拉夫学者 Vujanovi 给出的场方法 [3] 和梯度法 [4] 以及 Djukic 和 Sutela 给出的积分因子法 [5]，对积分完整非保守系统的运动方程提供了一个重要的工具. 近年来，梅凤翔已分别将场方法和梯度法推广到非完整系统 [6,7]. 本文将积分因子法推广应用于非完整非保守系统，详细讨论系统存在守恒律的必要条件.

1　非完整系统的积分因子理论

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 确定，在系统的运动上施加 g 个理想 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n) \tag{1}$$

则该系统的运动方程可表示为 Routh 形式 [8]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{2}$$

式中，$L=T-V$ 为非完整系统保守部分的 Lagrange 函数，假定 L 是非奇异的，Q_s 为非保守部分的广义力，λ_β 为不定乘子.

文献 [9] 证明，方程 (2) 可作为一个有条件的完整系统力学问题来研究，其中非完整约束 (1) 是方程 (2) 的特殊第一积分.

由 (1) 和 (2)，按文献 [8] 给出的方法，可在运动微分方程积分之前，求出 λ_β 作为 q_s, $\dot{q}_s$, t 的函数. 引入广义动量和 Hamilton 函数

$$P_s=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}, \qquad H=\sum_{s=1}^{n}P_s\dot{q}_s-L \quad (s=1,\cdots,n) \tag{3}$$

1993-04-19 收到第一稿， 1994-09-07 收到修改稿.

则方程 (2) 可写成正则形式

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial P_s}, \qquad \dot{P}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + \tilde{\Lambda}_s \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{4}$$

式中

$$\tilde{\Lambda}_s(q, P, t) = Q_s(q, \dot{q}(q, P, t), t) + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta(q, \dot{q}(q, P, t), t)\left(\frac{\partial \tilde{f}_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right) \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{5}$$

记号 $\sim$ 表示其中的 $\dot{q}$ 用 q, P, t 表出. 方程 (4) 可称为非完整系统一般形式的正则方程，它的解联同非完整约束 (1) 对初始条件的限制，便给出非完整系统的运动.

定义 1　假设存在函数集 $G^s = G^s(q_s, P_s, t)$，并满足

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\dot{P}_s + \frac{\partial H}{\partial q_s} - \tilde{\Lambda}_s\right)G^s \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n} P_s G^s - HR - \Omega\right) + \sum_{s=1}^{n}\mu^s\left(\dot{P}_s + \frac{\partial H}{\partial q_s} - \tilde{\Lambda}_s\right) \tag{6}$$

式中，R, Ω 和 μ^s 为任意函数，依赖于 q_s, P_s 和 t，则称函数 G^s 为运动方程 (4) 的积分因子.

由 (4) 和 (6) 式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n} P_s G^s - HR - \Omega\right) = -\sum_{s=1}^{n}\mu^s\left(\dot{P}_s + \frac{\partial H}{\partial q_s} - \tilde{\Lambda}_s\right) \tag{7}$$

于是我们可建立如下定理：

定理 1　如果函数 $G^s(s = 1, \cdots, n)$ 是方程 (4) 的积分因子，则

$$D = \sum_{s=1}^{n} P_s G^s - HR - \Omega \tag{8}$$

为系统的一个守恒量 (第一积分)，其沿真实运动轨道的运动方程满足 (3) 和 (4).

对一给定系统，如果 G^s 是方程 (4) 的积分因子，则必要条件 (7) 对任一函数集 G^s, R, Ω 和 μ^s 均成立.

利用 $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial P_s}\dot{P}_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_s}\dot{q}_s$ 和方程 (3), (4)，必要条件 (7) 可进一步改写为

$$-R\frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}\tilde{\Lambda}_s\left(G^s - R\frac{\partial H}{\partial P_s}\right) + \sum_{s=1}^{n} P_s \dot{G}_s - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_s}G^s - H\dot{R} - \dot{\Omega} + I = 0 \tag{9}$$

式中

$$I = \sum_{s=1}^{n}\mu^s\left(\dot{P}_s + \frac{\partial H}{\partial q_s} - \tilde{\Lambda}_s\right) \tag{10}$$

定义 2　如果函数集 G^s, R, Ω 和 μ^s 满足必要条件 (9) 且使 (8) 式成为守恒量，则我们称函数 G^s, R, Ω 和 μ^s 组成非奇异集.

为了寻找系统的守恒量，从定理 1 我们可以得到下列定理：

定理 2 对任一非奇异函数集 G^s, R, Ω 和 μ^s, 如果满足必要条件 (9), 则给定的非完整非保守系统存在守恒量 (8).

要给出存在守恒量的非奇异函数集可通过积分 (9) 或采用特殊路径逼近法来得到. 如果 (9) 的任意解不含有任何积分常数，我们称此为 (9) 的函数解. 将 (9) 的一个非奇异解代入 (8), 就可得到系统的第一积分. 这里，唯一的一个积分常数就是 D 的值. 文献 [10] 已经指出，利用 (9) 的含有足够多积分常数完整解，可以构成方程 (3), (4) 的有限解.

把 (9) 视作偏微分方程，函数集 G^s, R, Ω 和 μ^s 中的各函数地位相同，即函数集中每一个函数都可能是未知的或首先给定的，利用

$$\frac{\mathrm{d}(\ )}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial(\ )}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\frac{\partial(\ )}{\partial q_\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{n}\dot{P}_\alpha\frac{\partial(\ )}{\partial P_\alpha}\tag{11}$$

我们分 3 种情况来讨论 (9) 式在具体寻找第一积分时的方法.

(1) 假设 (9) 式对所有 t, q_s, $\dot{P}_s$ 成立，利用 (9)—(11) 可以得到关于 $\dot{P}_s$ 的线性方程

$$\begin{aligned}&-R\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\tilde{\Lambda}_s\Big(G^s-R\frac{\partial H}{\partial P_s}\Big)+\sum_{s=1}^{n}P_s\Big(\frac{\partial G^s}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\frac{\partial G^s}{\partial q_\alpha}\Big)-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_s}G^s\\&\quad-H\Big(\frac{\partial R}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}\Big)-\frac{\partial\Omega}{\partial t}-\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\frac{\partial\Omega}{\partial q_\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{n}\mu^\alpha\Big(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}-\tilde{\Lambda}_\alpha\Big)\\&\quad+\sum_{\alpha=1}^{n}\Big(\sum_{s=1}^{n}P_s\frac{\partial G^s}{\partial P_\alpha}-H\frac{\partial R}{\partial P_\alpha}-\frac{\partial\Omega}{\partial P_\alpha}+\mu^\alpha\Big)\dot{P}_\alpha=0\end{aligned}$$

因为函数集 G^s, R, Ω 和 μ^s 中的函数不依赖于 $\dot{P}_s$, 则有

$$\begin{aligned}&-R\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\tilde{\Lambda}_s\Big(G^s-R\frac{\partial H}{\partial P_s}\Big)+\sum_{s=1}^{n}P_s\Big(\frac{\partial G^s}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\frac{\partial G^s}{\partial q_\alpha}\Big)-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_s}G^s\\&\quad-H\Big(\frac{\partial R}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}\Big)-\frac{\partial\Omega}{\partial t}-\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\frac{\partial\Omega}{\partial q_\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{n}\mu^\alpha\Big(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}-\tilde{\Lambda}_\alpha\Big)=0\end{aligned}\tag{12}$$

$$\sum_{s=1}^{n}P_s\frac{\partial G^s}{\partial P_\alpha}-H\frac{\partial R}{\partial P_\alpha}-\frac{\partial\Omega}{\partial P_\alpha}+\mu^\alpha=0\tag{13}$$

我们称方程组 (12), (13) 为广义 Killing 方程. 因此若方程组含有关于 $R(t,q,P)$, $G^s(t,q,P)$, $\Omega(t,q,P)$ 和 $\lambda^s(t,q,P)$ 的非奇异解，就存在第一积分 (8). 这里方程组中含有 $n+1$ 个线性偏微分方程， $2n+2$ 个未知函数. 所以，选择解的自由度很大. 一般可预先指定 $n+1$ 个函数，然后再由方程组解剩下的 $n+1$ 个未知数. 通常先确定的 $n+1$ 个函数就是 Ω 和 μ^s.

(2) 假设 (9) 式对系统的运动轨道成立，这就意味着 $\dot{P}_s$ 在 (9) 式中不再是任意函

数，$\dot{P}_s=\dot{P}_s(t,q_s,P_s)$ 满足 (4)，利用 (4)，(10) 和 (11)，必要条件 (9) 变成

$$\begin{aligned}&-R\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\tilde{\Lambda}_s\Big(G^s-R\frac{\partial H}{\partial P_s}\Big)+\sum_{s=1}^{n}P_s\Big(\frac{\partial G^s}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial G^s}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\Big)\\&-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_s}G^s-H\Big(\frac{\partial R}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\Big)-\frac{\partial \Omega}{\partial t}-\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial \Omega}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\\&+\sum_{\alpha=1}^{n}\Big(\tilde{\Lambda}_\alpha-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\Big)\Big(\sum_{s=1}^{n}P_s\frac{\partial G^s}{\partial P_\alpha}-H\frac{\partial R}{\partial P_\alpha}-\frac{\partial \Omega}{\partial P_\alpha}\Big)=0\end{aligned}\tag{14}$$

我们称方程 (14) 为广义轨道 Killing 方程，是一个偏微分方程. 通常 $n+2$ 个函数 R,Ω 和 G^s 均是未知的，按照定理 2，方程 (14) 的任一关于 G^s,R,Ω 和 μ^s 的非奇异解均成为第一积分 (8).

(3) 假定广义轨道 Killing 方程 (14) 不依赖于 μ^α. 如果从 (13) 中求出关于 μ^α 的解，代入 (12)，就可以得到广义轨道 Killing 方程 (14). 因此对所有 μ^α 的非零解，方程 (12) 和 (13) 等同于广义轨道 Killing 方程 (14)；若 μ^α 均为零，则从方程 (12) 和 (13) 不能得到方程 (14). 假设部分 $\mu^i(i=1,\cdots,m<n)$ 不为零，其余均为零，则 (12) 和 (13) 可由 $(n-m+1)$ 个方程来代替.

$$\begin{aligned}&-R\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\tilde{\Lambda}_s\Big(G^s-R\frac{\partial H}{\partial P_s}\Big)+\sum_{s=1}^{n}P_s\Big(\frac{\partial G^s}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial G^s}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\Big)\\&-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_s}G^s-H\Big(\frac{\partial R}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\Big)-\frac{\partial \Omega}{\partial t}-\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial \Omega}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\\&+\sum_{i=1}^{m}\Big(\tilde{\Lambda}_i-\frac{\partial H}{\partial q_i}\Big)\Big(\sum_{s=1}^{n}P_s\frac{\partial G^s}{\partial P_i}-H\frac{\partial R}{\partial P_i}-\frac{\partial \Omega}{\partial P_i}\Big)=0\end{aligned}\tag{15}$$

$$\sum_{s=1}^{n}P_s\frac{\partial G^s}{\partial P_A}-H\frac{\partial R}{\partial P_A}-\frac{\partial \Omega}{\partial P_A}=0\qquad(A=m+1,\cdots,n)\tag{16}$$

2 上述定理的逆定理

假定已知系统的一个第一积分 (8) 与相应积分因子 G^s，函数 Ω 和 R 满足 (9)，则必要条件 (9) 等同于 (12)—(14) 或 (15)，(16)，因此 $n+2$ 个函数 G^s,Ω,R 必须满足 (8) 与 (12)—(14) 或 (15)，(16) 联立的方程组，对 $\mu^s=0$ 的特殊情形，函数可通过 (8)，(12) 和 (13) 来寻找.

在 (8) 式中求 $\dfrac{\partial \Omega}{\partial P_\alpha}$，并令其满足 (13)，有

$$G^s=\frac{\partial D}{\partial P_s}+R\frac{\partial H}{\partial P_s}\tag{17}$$

联立 (8) 和 (17)，得

$$\Omega=\sum_{s=1}^{n}P_s\frac{\partial D}{\partial P_s}-D+R\Big(\sum_{s=1}^{n}P_s\frac{\partial H}{\partial P_s}-H\Big)\tag{18}$$

用 (17), (18) 代入 (12), 产生

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=0 \tag{19}$$

由此我们得到以下定理：

定理 3(定理 1 和定理 2 的逆定理)　对于非完整非保守系统，由 Hamilton 函数 H 和广义力 $\tilde{\Lambda}_s$ 来描述的守恒量 (第一积分)$D=D(t,q_s,P_s)$, 其相应的积分因子 G^s 和函数 Ω,R 由 (17), (18) 得到.

代数方程组 (17) 和 (18) 包含 $n+1$ 个关系式，$n+2$ 个函数 G^s,Ω 和 R, 很显然其中有一个函数可以根据需要自由选定 [12], 这个自由函数通常是 R. 值得一提的是，由定理 1 和定理 2 得到的守恒量不是唯一 (这一点与 Noether 定理是一致的 [12−14]), 因为通常方程 (12) 和 (13), (14) 或 (15) 和 (16) 中的关系式少于未知函数个数.

3 例　子

Appell-Hamel 例

考虑一个质量为 m 的质点在重力作用下运动，受有非线性非完整约束

$$f=\dot{q}_3-a(\dot{q}_2^2+\dot{q}_1^2)^{1/2}=0 \tag{20}$$

系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-mgq_3$$

首先，将问题的方程正则化， Routh 方程 (2) 给出

$$m\ddot{q}_1=-\lambda a\dot{q}_1(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2},\quad m\ddot{q}_2=-\lambda a\dot{q}_2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2},\quad m\ddot{q}_3=-mg+\lambda \tag{21}$$

将 (20) 对 t 求导并利用 (21) 消去 $\ddot{q}_1,\ddot{q}_2,\ddot{q}_3$, 得到

$$\lambda=mg/(1+a^2) \tag{22}$$

将 (22) 代入 (21), 并引入广义动量，得到

$$\dot{q}_1=P_1/m,\qquad \dot{q}_2=P_2/m,\quad \dot{q}_3=P_3/m \tag{23}$$

$$\dot{P}_1=-\frac{amg}{1+a^2}\frac{P_1}{(P_1^2+P_2^2)^{1/2}},\quad \dot{P}_2=-\frac{amg}{1+a^2}\frac{P_2}{(P_1^2+P_2^2)^{1/2}},\quad \dot{P}_3=-\frac{a^2mg}{1+a^2} \tag{24}$$

$$H=\frac{1}{2m}(P_1^2+P_2^2+P_3^2)+mgq_3 \tag{25}$$

因为 $Q_1=Q_2=Q_3=0$, 根据式 (5) 计算

$$\tilde{\Lambda}_1=-\frac{amg}{1+a^2}\frac{P_1}{(P_1^2+P_2^2)^{1/2}},\quad \tilde{\Lambda}_2=-\frac{amg}{1+a^2}\frac{P_2}{(P_1^2+P_2^2)^{1/2}},\quad \tilde{\Lambda}_3=\frac{mg}{1+a^2} \tag{26}$$

其次，假设积分因子 G^1,G^2,G^3 和函数 R,Ω 具有以下形式

$$G^1=\frac{P_1}{2m},\quad G^2=\frac{P_2}{2m},\quad G^3=\frac{P_3}{2m},\quad R=0,\quad \Omega=\Omega(q_3) \tag{27}$$

把 (25), (26) 和 (27) 代入 (14), 有

$$
\begin{aligned}
&-\frac{amg}{1+a^2}\frac{P_1}{(P_1^2+P_2^2)^{1/2}}\frac{P_1}{2m}-\frac{amg}{1+a^2}\frac{P_2}{(P_1^2+P_2^2)^{1/2}}\frac{P_2}{2m}+\frac{mg}{1+a^2}\frac{P_3}{2m}-mg\frac{P_3}{2m}\\
&-\frac{P_3}{m}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}q_3}-\frac{amg}{1+a^2}\frac{P_1}{(P_1^2+P_2^2)^{1/2}}\frac{P_1}{2m}-\frac{amg}{1+a^2}\frac{P_2}{(P_1^2+P_2^2)^{1/2}}\frac{P_2}{2m}\\
&+\left(\frac{mg}{1+a^2}-mg\right)\frac{P_3}{2m}=0
\end{aligned}
\tag{28}
$$

利用 (23) 和 (20), 由 (28) 解得

$$
\Omega=-mgq_3+c \qquad (c\ \text{取零}) \tag{29}
$$

由此我们得到 Appell-Hamel 问题的第一积分

$$
D=P_sG^s-HR-\Omega=\frac{1}{2m}(P_1^2+P_2^2+P_3^2)+mgq_3 \tag{30}
$$

这正是文献 [11] 的结果. 文献 [11] 的另一个守恒量可通过选择不同的积分因子来得到.

作者对黄克累教授的帮助致以衷心的谢意.

参 考 文 献

1 Van Dooren R. Droc 14th IUTAM Congress, Delft, 1976, 373–391

2 Rumiantsev VV, Sumbatov AS. *ZAMM*, 1978, (58): 477–481

3 Vujanovic B. *Int J Non-Linear Mechanics*, 1984, (19): 383–396

4 Vujanovic B. *Acta Mechanica*, 1979, 34: 167–179

5 Djukic DjS, Sutela T. *Int J Non-Linear Mechanics*, 1984, (19): 333–339

6 梅凤翔. 力学学报, 1989, 5(3): 260–268

7 Mei Fengxiang. Proceeding of Intern. Conference on Dynamics, Vibration and Control, Peking University Press, Beijing, 1990, 653–658

8 梅凤翔. 力学学报, 1991, 5(3): 366–370

9 Новоселов ВС. Вариационные методы в механике, ЛГУ, 1966

10 Vujanovic B. *Int J Engng Sci*, 1981, 19: 1739–1747

11 刘端. 中国科学 (A 辑), 1990, 11: 1189–1197

12 Sarlet W, Cantrijn F. Generalizations of Noether's Theorem in Classical Mechanics, *Am J Phys*, 1971, 39: 467–494

13 Djukic Dj, Vujanovic B. Noether's theory in chassical nonconservative mechanics, *Acta Mechanica*, 1975, 23: 17–27

14 Vujanovic B. Conservation laws of dynamical systems via D'Alembert's principle, *Int J Non-linear Mechanics*, 1978, 13: 185–197

INTEGRATING FACTORS AND CONSERVATION LAWS FOR NONHOLONOMIC NONCONSERVATIVE DYNAMICAL SYSTEMS

Yu Huidan　　Zhang Jiefang
(*Phys. Depart. of Zhejiang Normal Univ., Jinhua* 321004, *China*)
Yu Jixiong
(*Zhejiang Grain School, Jinhua* 321000, *China*)

Abstract Construction of the conservation laws of nonholonomic nonconservative systems by finding corresponding intergrating factors and the necessary conditions for the existence of such conservation laws are discussed in detail. One example is given to illustrate the application.

Key words nonholonomic nonconservative system, integrating factor, conservative laws