

康脱洛维奇法和线法在高梯度问题中的应用

戴 耀 L.S. Xanthis* 郑 林

(中国机械工程学会表面工程研究所, 北京 100072)

*(University of Westminster, London W1M 8JS, U.K.)

摘要 应用两种半解析数值方法即康脱洛维奇法和线法, 对文献 [1] 中的高梯度问题进行了数值求解, 获得了令人满意的结果. 特别在后一方法中首次尝试了“子结构法”, 结果, 在计算精度和计算效率方面都取得了显著的改进. 因此, 这一可行性研究的成果, 对于突破当前国际上热门的“应变局部化”所导致的“剪切带”中高梯度变形的研究现状, 提供了新的思路.

关键词 半解析数值法, 康脱洛维奇法, 线法, 高梯度问题, 应变局部化

引 言

“现在, 每个人都喜爱局部化问题”^[2], 作为断裂的前兆, 如何有效准确地分析“剪切带”中高梯度式的剧烈变形, 这不仅具有强烈的工程应用背景, 而且是固体力学中失效分析方面最基本的课题之一. 特别, 在应变局部化问题的求解中, 要想求得封闭的解析解, 这几乎是不可能的, 因而, 它在计算力学方面又向人们提出了一个带挑战性的课题^[3].

自然, 人们首先想到工程分析中最常用的有限单元法, 实践表明, 它往往导致严重的网格依赖性, 即使开发了各种各样的改进技术 (例如文 [4] 中所述), 但是, “.....对于解决局部化问题, 哪一种方法是最有效果和最有效率的, 仍然是待定的”^[2].

与 [1] 类似, 本文是新方法可行性方面的研究 ([5] 用不同的方法, 进行过类似的研究). 众所周知, 在数学上, 对于采用偏微分方程组描述的边值问题, 如果采用常微分方程组作近似描述, 一般来讲, 它要优于普通的有限单元法所采用的代数方程组. 遵循这一思路, 本文尝试了康脱洛维奇法和线法.

1 康脱洛维奇法^[6]

首先, 简单描述一下采用康脱洛维奇法对一般线性边值问题作部分离散化的过程.

设基本方程是

$$\mathcal{L}\phi + p = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (1)$$

1993-12-07 收到第一稿, 1994-08-15 收到修改稿.

其中 $\mathcal{L}$ 是线性算子. 边界条件可以写成

$$\mu\phi + r = 0 \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上} \quad (2)$$

然后, 引入试探函数 $\hat{\phi}$, 其展开式为

$$\phi \cong \hat{\phi} = \psi + \sum_{m=1}^M \alpha_m(y) N_m(x, z) \quad (3)$$

其中函数 ψ 和 N_m 要使 $\hat{\phi}$ 在 $\bar{\Omega}$ 上满足强加的边界条件. 将近似的 $\hat{\phi}$ 回代, 采用加权残数法, 就可以得到以 y 为自变量、 α_m 为因变量的常微分方程组

$$\underline{K} \underline{\alpha} + \underline{c} \frac{d\underline{\alpha}}{dy} + \cdots = \underline{f} \quad (4)$$

在一定的边界条件下, 此法是非常有效的. 下面, 用它来求解 [1] 的高梯度问题即“算例 1”, 其基本方程是

$$u_{,ii} + 2c^2 \sec^2[c(y-3)] \operatorname{tg}[c(y-3)] = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (5)$$

其中 Ω 是矩形区域 $\{0 < x < 4, 0 < y < 6\}$. 边界条件是

$$\left. \begin{aligned} u &= \operatorname{tg}(3c) \quad \text{当 } y=0 \text{ 和 } y=6 \\ u_{,x} &= 0 \quad \text{当 } x=0 \text{ 和 } x=4 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

该问题的精确解是

$$u = \operatorname{tg}[c(y-3)] \quad (7)$$

对此问题, 我们取下述多项式型的试探函数

$$\left. \begin{aligned} N_1(x) &= 1 \\ N_m(x) &= x^{m+2} \left(\frac{x}{m+3} - \frac{4}{m+2} \right), \quad m=2, 3, \cdots, M \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

代入 (3) 式, 再回代 (5), (6) 就可以得到相应的微分方程组.

对于高梯度问题, 好的数值方法首先体现在能准确地捕捉最大峰值的所在位置. 考虑梯度场 $u_{,y}$, 根据精确的理论解, 其峰值位于 $y=3.0$ 处, [1] 求得在 $y=2.991$ 处, 而本文求得在 $y=3.0$ 处. 由图 1 可知, 峰值位置的微小偏差, 却带来 $u_{,y}$ 的较大误差. 其次, 体现在解的精度上. 根据 [1] 中唯一可资比较的数字: 在 $y=2.991$ 处, 精确解 $u_{,y}=9.919$ ([1] 中误为 9.806), 有限元结果是 3.327, [1] 中的结果是 9.818, 本文的结果是 9.9105. 显然, 本文的结果是最好的. 为了详示峰值附近的结果, 列表 1. 易发现, 误差仅发生在小数点后的第四位上.

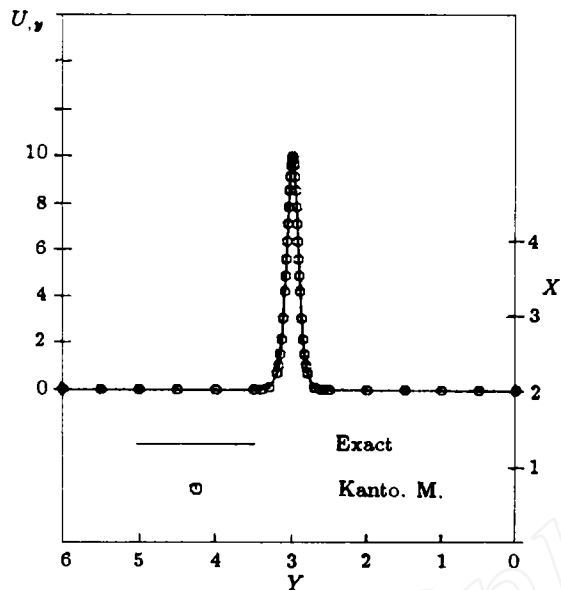


图 1 $x = 2.0$ 处精确解与数值结果对比
Fig.1 Comparison between exact solution and numerical results at $x = 2.0$

表 1 峰值附近的梯度场 $u_y (c = 10)$
Table 1 Gradient field u_y near the peak value

y	2.70	2.80	2.90	2.92	2.94	2.96	2.98	2.99	3.0
Exact solution	.0987	.7065	4.1997	5.5906	7.1158	8.5564	9.6104	9.9007	10.0
Kantorovich method	.0986	.7065	4.1996	5.5905	7.1157	8.5564	9.6104	9.9006	9.9999

由上可见，此法在对高梯度问题的捕捉能力和追踪能力都是非常优秀的。

2 线法 (MOL)

将偏微分方程组化为常微分方程组，除了康脱洛维奇法外，线法 (method of lines, 简称 MOL) 也是常用的方法之一 [7,8]。其基本思想来源于差分法，这里就不再详述。下面我们仍考虑高梯度，即文献 [1] 中的“算例 4”。其基本方程是

$$\left. \begin{aligned} u_{,ii} + b(x, y) &= 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ b(x, y) &= 2c \left\{ c \left(1 + \frac{x^2}{16} \right) \operatorname{tg} \left[c \left(y + \frac{x^2}{8} - 4 \right) \right] - \frac{1}{8} \right\} \sec^2 \left[c \left(y + \frac{x^2}{8} \right) - 4 \right] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中 Ω 与“算例 1”中的相同。

该问题在边界上是固定位移，它的精确解是

$$u^* = \operatorname{tg} \left[c \left(y + \frac{x^2}{8} - 4 \right) \right] \quad (10)$$

根据上述提法，应用线法，可得下述常微分方程组

$$\underline{U}'' = \underline{A} \underline{U} + \underline{F} \quad (11)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ \cdots \ u_m\}^T \\ \underline{A} &= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ \underline{F} &= \{-b(0,y)/h^2, 0, \cdots, 0, -b(4,y)/h^2\}^T \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

需要强调指出, 这里的高梯度区域, 其形状与“算例 1”不同. 在 xy 平面上, 它是以 $y + \frac{x^2}{8} - 4 = 0$ 曲线为中心线的曲边区域 (参见图 2), 这在计算上增加了较大的难度. 文 [1] 的重要目的之一就是希望有效地处理复杂形状的高梯度问题.

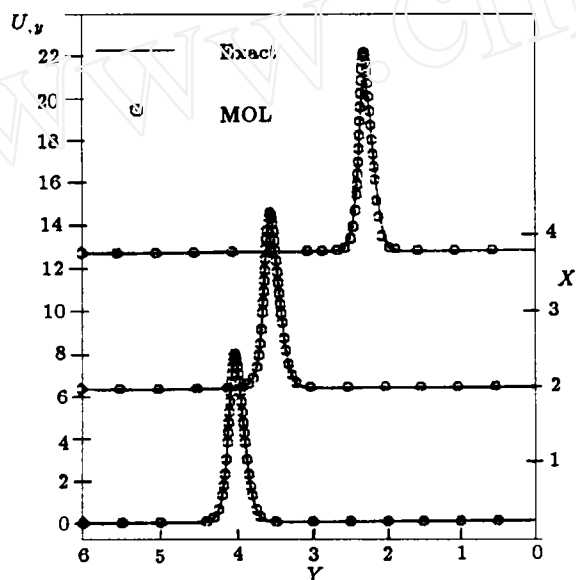


图 2 $x = 0.2, 2.0, 3.8$ 处 u_y 的对比 ($c = 8, h_1 = 0.2$)

Fig.2 Comparison of u_y at $x = 0.2, 2.0, 3.8$ ($c = 8, h_1 = 0.2$)

计算此问题, 如果仅采用常规的线法, 一般来讲, 要花费巨大的代价, 甚至在中型计算机上难以求得合乎需要的数值解. 为此, 本文引入了多重子结构法. 这一方法的思想很简单, 但非常有效, 因而在有限单元法中或差分法中经常被采用. 然而, 在线法中, 却很少见到使用 (采用以后, 即使在高档微机上也可以得到令人满意的结果). 它的基本实施过程是在高梯度区域, 沿 x 方向逐次剖分, 逐次求解的网格尺寸为 $h_k = h/2^{k-1} (k = 1, 2, \cdots)$. 本算例中, 二重子结构法被采用 ($h_2 = 0.1, h_3 = 0.05$), 对误差较大的 $2 \leq x \leq 4$ 区域 (图 2) 进行了细算.

与“算例 1”一样, 这里仍从对峰值点发生位置的捕捉能力和最大峰值的追踪能

力这两个方面来考察数值结果和方法的优劣.

由表 2 可知, 半解析的 MOL 方法在第一方面是非常优秀的, 即使网格很粗, 但是, 峰值点的位置却抓得很准 (当然, 对于粗网格, 此时峰值可能有较大的误差). 从表面上看, [1] 中的 y 值误差也很小. 但是, 由图 2 可以看出, 它引起 $u_{,y}$ 的偏离则是明显的. 事实上也是如此, 它使 $u_{,y}$ 从精确的 8.0 偏移到了 7.725, 而本文的线法却在 $y = 2.799$ 处得到了 8.0570 的结果.

表 2 峰值点位置 y 的捕捉
Table 2 Capture of peak-value position y

Given x	0.2	2.0	3.1	3.6	3.9
Exact y	3.995	3.5	2.79875	2.38	2.09875
[1]			2.769		
MOL(h_i)	3.995(h_1)	3.5(h_1)	2.799(h_2)	2.38(h_2)	2.099(h_1)

在梯度值的追踪方面, 文 [1] 只给了一个点处的 $u_{,y}$, 即 $x = 3.1, y = 2.769$ 处 $u_{,y} = 7.725$, 此处的精确解是 7.563 (相对误差为 2.14%); 但有限单元法的结果是 5.165 (31.71%), 而本文的 MOL 给出 7.5533 (0.05%). 总的来说, 本文的方法可以使误差控制在所要求的范围之内 (恒小于 1%, 别的方法一般是难以做到的).

再次指出, 子结构法的效率是很高的, 它使最大相对误差迅速减小, 详见表 3. 此外, 采用一重子结构法后, 不仅峰值的数值结果得到明显的改善 (表 3), 而且, 整个梯度场与理论解的相对误差, 都被迅速减小, 图 3 的结果充分显示了这一点. 进一步, 采用二重子结构法后, 数值解 $u_{,y}$ 与理论解的对比可参见表 3 和图 4, 可以看出, 二者非常一致.

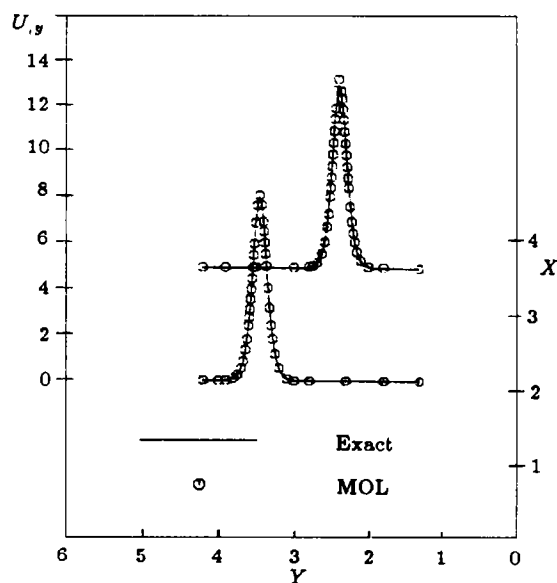


图 3 $x = 2.1, 3.6$ 处 $u_{,y}$ 的对比 ($c = 8, h_2 = 0.1$)
Fig.3 Comparison of $u_{,y}$ at $x=2.1, 3.6$ with $c = 8$ and $h_2 = 0.1$

表 3 峰值 u,y 的最大相对误差
Table 3 Relative error max. of peak-values of u,y

Case	$h_1=0.2$	$h_2=0.1$	$h_3=0.05$
Position	$x = 3.8, y=2.2$	$x = 3.9, y=2.1$	$x = 3.6, y=2.38$
Exact (u,y)	7.9872	7.9992	8.0000
MOL (u,y)	9.3037	8.3788	8.0773
Relative error max.	16.48%	4.75%	0.97%

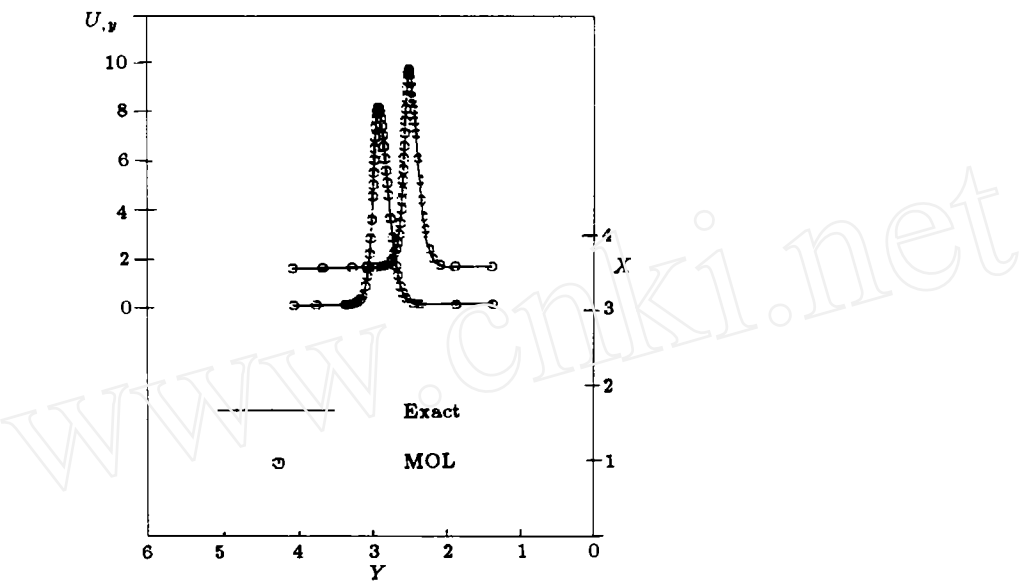


图 4 $x = 3.1, 3.6$ 处 u,y 的对比 ($c = 8, h_3 = 0.05$)
Fig.4 Comparison of u,y at $x = 3.1, 3.6$ with $c = 8$ and $h_3 = 0.05$

3 结束语

处理与应变局部化相关的高梯度问题，与 [1] 的“迭铺法”相比，本文讨论的半解析数值方法即康脱洛维奇法和线法，在 (1) 高梯度场中峰值点的捕捉能力，(2) 高梯度场的追踪能力，(3) 指定的高精度解的自适应求解能力 (本文采用子结构法) 等主要方面，均具有明显的优势。

尽管 [1] 中的方法，比其它以有限元为基础的各种方法，在求解精度上有明显的改进，但其内在的不足是只有事先知道局部化发生的位置时才能有效地用“迭铺法”加以改进。实际上，局部化在何处发生，一般来讲，事先是未知的 (如土石坝中应变局部化问题 [9])；此外，当高梯度区域发生在边界附近 (如表面工程问题 [10])，此时，此法就难以采用。而本文的方法即使采用很粗略的网格，也可以不管这些，依然能准确地捕捉峰值点所在的位置。

力学问题，在数学提法明确的前提下，说到底还是数学问题。本文的可行性研究，为有效地解决当前国际上热门的“应变局部化”问题提供了新的思路。

参 考 文 献

- 1 Belytschko T et al. *Comp Method in Appl Mech & Eng*, 1992, 95: 383-396
- 2 Needleman A et al. *Appl Mech Rev*, 1992, 45: S3-S18
- 3 Belytschko T et al. *Comp Method in Appl Mech & Eng*, 1988, 70: 59-89
- 4 Qrtiz M et al. *Comp Method in Appl Mech & Eng*, 1987, 61: 189-214
- 5 Xanthis LS et al. *Comp Method in Appl Mech & Eng*, to appear
- 6 康脱洛维奇Л В, 克雷洛夫В И. “高等分析近似方法. 何奕译. 科学出版社, 1966
- 7 Liskovets OA. *Differential Eqs*, 1965, 7: 1308-1323
- 8 Meyer GH. *J Inst Maths Applics*, 1977, 20: 317-329
- 9 Larsson R et al. *Archive of Appl Mech*, 1991, 61: 305-317
- 10 Dai Y, He JW et al. Proc of 14th Int Thermal Spray Conf, 1995, 日本

THE APPLICATION OF KANTOROVICH METHOD AND METHOD OF LINES TO HIGH GRADIENT PROBLEMS

Dai Yao L.S.Xanthis* Zhang Lin

(Surface Engineering Institute of CIMES, Beijing 100072, China)

*(University of Westminster, London W1M 8JS, U.K.)

Abstract In this paper, the two semi-analytic numerical methods, i.e. Kantorovich method and MOL, are applied to the high gradient problems in [1]. The obtained numerical results are satisfactory. In particular, we have tried the combination of the multi-sub-structure method and MOL. As a result, the precision of the numerical results and the efficiency of the solution are improved greatly. Therefore, the results of this feasibility study provide a new promising approach to tackle the high gradient deformation in “the shear band” of “the strain localization” which has received much attention of the researchers now.

Key words semi-analytic numerical methods, Kantorovich method, MOL, high gradient problems, the strain localization