

二维任意多边形有限单元¹⁾

范亚玲 张远高 陆明万

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要 目前常用于单晶体材料的计算细观力学分析方法是将其晶体细分成许多三角形或四边形有限元. 对于多晶体材料, 这方法的计算量之大将难于承受. 实验观测表明, 多晶体材料中除角点附近局部区域外每个晶体内部的变形、滑移基本上是缓慢变化的. 因此可以将每个晶体简化为一个多边形有限单元, 晶界简化为界面单元, 使计算量大大减少. 本文导出一类任意多边形等参有限元格式, 并证明这类多边形单元中的任意两个都是相互协调的, 无论其边数是否相等. 算例表明任意多边形单元是有效可行的.

关键词 计算细观力学, 多晶体, 有限单元法, 多边形等参元

引 言

目前的二维有限元程序大多采用等参四边形(或三角形)单元. 没有出现向多边形单元发展的趋势. 究其原因, 首先是因为三角形和四边形等参元已能很好地逼近任意平面几何图形, 似乎没有研究边数更多的单元的必要性. 其次是因为构造协调的多边形单元形函数有一定困难.

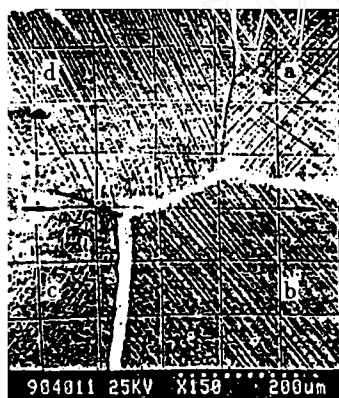


图 1 多晶体的塑性变形

Fig.1 Plastic deformation of polycrystalline

目前计算细观力学中常把一个单晶体分成许多四边形(或三角形)单元^[1], 当考虑材料和几何非线性效应时计算工作量相当大^[2]. 实际工程材料都由大量的晶体、晶界等构元组成, 如果每个构元都要细分成许多有限单元, 计算工作量之大将难于承受.

细观力学的实验观测表明, 虽然多晶体材料中各晶体的滑移方向及应力水平各不相同, 但每个晶体内部的变形、滑移基本上是缓慢变化的(见图 1). 为了研究多晶体细观结构、性能与材料宏观特性

的联系, 把每个晶体简化为一个多边形有限单元, 把晶界简化为界面单元, 将使计算工作量大大减少.

本文导出了二维任意多边形单元的形函数和位移有限元格式, 并证明这类新的

¹⁾ 国家自然科学基金八五重大项目资助课题.

1995-01-25 收到第一稿, 1995-05-18 收到修改稿.

多边形等参元是协调元. 作为研究的第一步, 本文仅限于弹性计算, 即将进一步完成基于晶体塑性本构关系的弹塑性有限元分析.

1 二维任意多边形单元的形函数

有限元形函数的基本要求是能描述刚体位移和常应变状态, 且沿单元边界及单元内部能满足协调条件.

形函数应具有如下基本性质^[4]:

1) 在结点上形函数的值为

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } j = i \\ 0 & \text{当 } j \neq i \end{cases} \quad (1)$$

2) 在单元中任意一点处各形函数 N_i 之和应等于 1. 即

$$\sum N_i = 1 \quad (2)$$

对于二维任意多边形单元, 将正多边形作为母单元, 建立局部直角坐标系 (ξ, η) 如图 2, 本文推导采用极坐标系 (r, θ) .

设正 n 边形母单元第 i 边的直线方程为

$$\left. \begin{aligned} L_m &= 0 \quad (m = 1, 2, \dots, n) \\ L_m &= r \cos \left[\theta - \frac{2\pi}{n}(m-1) - \theta_0 \right] - a \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

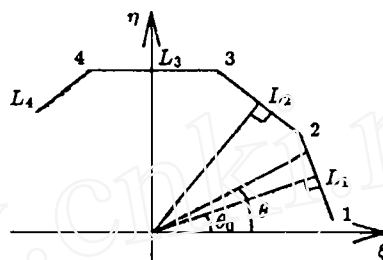


图 2 正多边形母单元
Fig.2 Equilateral polygon element

其中, a 为正多边形内切圆半径, θ_0 是 L_1 过原点的垂线与 ξ 轴的夹角, n 是正多边形的边数.

构造与角点 i 相对应的如下函数

$$\hat{N}_i = \prod_{k=i+1}^{i+n-2} L_k / \prod_{k=i+1}^{i+n-2} L_k(\xi_i, \eta_i) \quad (4a)$$

其中

$$m = \begin{cases} k & \text{当 } k \leq n \\ k - n & \text{当 } k > n \end{cases}$$

$L_m(\xi_i, \eta_i)$ 为函数 L_m 在角点坐标 (ξ_i, η_i) 处的值.

$\hat{N}_i$ 满足形函数的基本性质 (1), 但不一定满足基本性质 (2), 因为和式 $\sum_{i=1}^n \hat{N}_i$ 在单元内不一定为常数, (当 $n=3, 4$ 时为常数, 当 $n \geq 5$ 时为多项式), 为此用它除 $\hat{N}_i$

$$N_i = \frac{\hat{N}_i}{\sum_{k=1}^n \hat{N}_k} \quad (4)$$

这样得到角点 i 的形函数 N_i 就能同时满足形函数的基本性质 (1) 和 (2), 因而可以选为任意多边形单元的形函数. 下节将证明, 若采用与位移形函数相同的坐标插值函数对其进行等参变换, 就能构成协调的多边形等参元.

2 多边形单元形函数的性质

有限元分析中解的收敛条件要求单元必须是协调的和完备的.

1) 完备性

考察多边形等参元, 坐标和位移插值为

$$x = \sum_i N_i x_i \quad y = \sum_i N_i y_i \quad (5)$$

$$u = \sum_i N_i u_i \quad (6)$$

当给定与常应变相应的结点位移 $u_i = ax_i + by_i + c$ 时, 得到单元内的位移表达式

$$u = \sum N_i u_i = a \sum N_i x_i + b \sum N_i y_i + c \sum N_i = ax + by + c \sum N_i \quad (7)$$

由 (5) 和 $\sum N_i = 1$ 可以得到线性位移场

$$u = ax + by + c \quad (8)$$

这表明经过等参变换后, 子单元能描述刚体位移和常应变状态, 满足完备性要求.

2) 协调性

图 3 中的子单元由母单元变换而来. 考虑子单元某边 $I-J$ 上的任意点 (x, y) . 在 $I-J$ 边上除了 N_I 和 N_J 外其它形函数都为零, 且由这条边上的 $\sum N_i = 1$ 得 $N_I + N_J = 1$, 所以坐标变换为

$$x = \sum N_i x_i = x_I N_I + x_J N_J = x_I + (x_J - x_I) N_J \quad (9a)$$

$$y = \sum N_i y_i = y_I N_I + y_J N_J = y_I + (y_J - y_I) N_J \quad (9b)$$

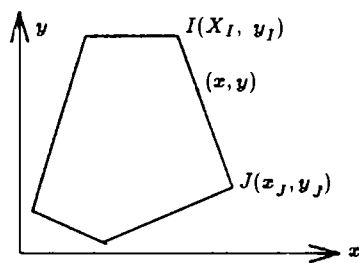


图 3 多边形子单元
Fig.3 Isoparametric polygon element

因为 $x_J - x_I$ 与 $y_J - y_I$ 中至少有一个不为零, 不妨设 $y_J - y_I \neq 0$, 由 (9a,b) 式可得

$$\frac{x - x_I}{y - y_I} = \frac{x_J - x_I}{y_J - y_I} \quad (10)$$

这正是通过 (x_I, y_I) 和 (x_J, y_J) 的直线方程, 因而证明等参变换将正多边形母单元变换为任意直多边形子单元.

下面再证明协调性, 由 (9b) 式得

$$N_J = \frac{y - y_I}{y_J - y_I} \quad (11)$$

由式 (10) 和 (11) 可知 N_J (同理 N_I) 在子单元边界上关于 (x, y) 是线性的. 又由 $u = N_I u_I + N_J u_J$ 可知位移在边界上也是坐标 (x, y) 的线性函数. 因此这类单元中的任意两个单元, 无论边数是否相等, 在界面处都满足协调性要求.

3) 退化为三角形或四边形单元

可以验证, 当 (4) 式中取多边形边数 $n = 3$ 或 4 时即退化为常用的三角形或四边形单元的形函数^[5]. 因而 (4) 式是构造任意多边形单元形函数的通用形式. 其中当 $n = 3, 4$ 时 N_i 为 (ξ, η) 的多项式, 当 $n \geq 5$ 时为 (ξ, η) 的分式多项式. 且当 $n = 5, 6$ 时 N_i 的分母仅为二次式.

将上述形函数及等参变换代入普遍公式可得到单元刚度矩阵, 这里不再赘述. 单元刚度矩阵的计算需采用数值积分. 对于 n 多边形单元可分成 n 个三角形, 在每个三角形中可取一次精度的形心积分或二次精度的 Hammer 积分^[6].

3 算例分析

常见的晶体以四、五、六边形为多. 算例也采用四、五、六边形混合剖分方案. 一般说, 多晶体中各晶粒的材料性质并不完全相同, 并与晶轴的取向有关. 但是为了验证多边形单元的适用性, 我们假设材料性质是均匀、各向同性的, 以便能找到精确解供比较.

1) 单向拉伸与纯弯曲

对于单向拉伸情况采用四、五、六边形混合 (图 4), 正六边形与四边形混合以及任意六边形等三种单元剖分方案进行计算. 对纯弯情况采用正六边形与四边形混合划分 (图 5) 进行计算. 计算结果与精确解比较误差都在 3% 以内.

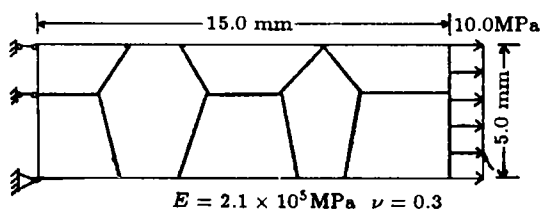


图 4 四、五、六边形混合划分
Fig.4 Application of mixed quadrilateral pentagon and hexagon elements

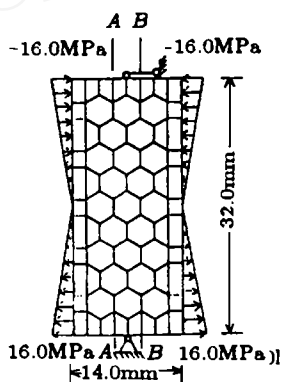


图 5 纯弯梁应力分析
Fig.5 Stress analysis of pure-bend beam

2) 小圆孔的应力集中

根据对称性, 取四分之一平板进行计算, 见图 6. 方板半宽为 50mm, 厚 1mm, 小孔半径为 5mm. 弹性常数 $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0.25$. 沿 x 方向施加均匀拉伸载荷 $p = 10 \text{ MPa}$. 最大应力的计算结果与精确解比较误差为 4%.

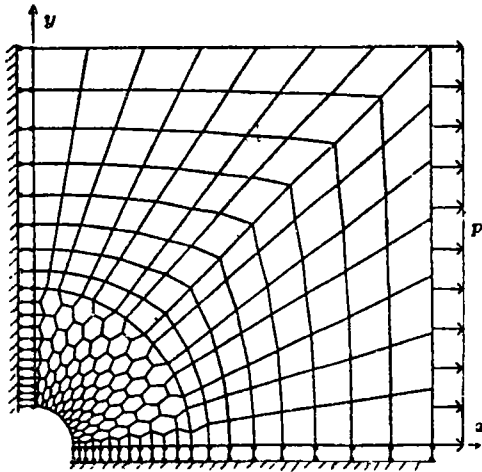


图 6 含小圆孔的单向拉伸平板
Fig.6 Stress concentration analysis

4 结 论

1) 本文提出的任意多边形单元是一类协调的等参单元. 当边数 $n = 3$ 或 4 时可以退化为常用的三角形和四边形单元. 尤其值得指出的是边数不同的多边形单元可以混合剖分, 单元交界处仍能保持协调.

2) 在加入晶体弹塑性本构关系后, 本文提出的任意多边形单元可用于模拟多晶聚合体中的晶粒, 使计算工作量大为减少.

参 考 文 献

- 1 陆明万, 罗学富, 郑长卿. 计算细观力学进展. 固体力学的现代进展, 北京理工大学出版社, 1995-3
- 2 Lu Ming-wan, Zhou Xu. Finite element simulation of plastic strain localization. 2nd Asia-Pacific Symposium on Advances in Engineering Plasticity and its Application, Beijing: 1994-06-29-07-02
- 3 仲政. 多晶滑移体的细观变形过程与本构关系. 清华大学博士论文, 1990
- 4 王 成, 邵敏. 有限单元法基本原理与数值方法, 清华大学出版社, 1988
- 5 蒋维成. 固体力学有限元分析. 北京理工大学出版社, 1990
- 6 Hammer PC, Marlow G, Stroud AH. Numerical integration over simplexes and cones, Math. Table Aids Comp. 1956, 10, 130-137

ARBITRARILY POLYGONAL 2-D FINITE ELEMENTS

Fan Yaling Zhang Yuangao Lu Mingwan

(Dept. of Engr. Mechanics, Tsinghua Univ., Beijing 100084, China)

Abstract At present, the computational analysis of micromechanics used to single crystal is to divide a crystal into many triangular or quadrilateral finite elements. If we use this method to analyze polycrystalline materials, the computation work will be too massive. Experimental observations show that the deformation and slide state vary slowly inside every crystal of the polycrystalline material. Therefore each crystal may be idealized to a polygonal element and each crystal interface to an interface element, in so doing the computation work will considerably reduce. In this paper we deduce finite element formulations for a set of arbitrarily polygonal isoparametric elements and show that such elements are compatible one another, regardless of the difference of number of sides between adjacent elements. Numerical examples are presented to check the validity of proposed polygonal elements.

Key words computational micromechanics, polycrystal, finite elements, polygonal isoparametric elements