第 27 卷 第 6 期　　力 学 学 报　　Vol. 27, No.6
1995 年 11 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Nov., 1995

无限元与相同子结构串的一致性及其算法

刘汉礼
(大连理工大学建设监理公司，大连 116023)

摘要　讨论了无限元方法 [1] 与相同子结构串分析 [2] 的一致性，综合文 [1] 和 [2] 得到一种通用算法，依据文 [3] 尚可应用于 LQ 控制问题. 且提出一种直接求出转移矩阵的算法，具有简便和较高精度的优点.

关键词　无限元方法，子结构串，转移矩阵

引　言

应隆安教授在专著 [1] 中详细介绍的无限元方法，适用于求解边界外部的无穷域中场问题. 无限元方法的实质是用有限元方法的理论去研究上述外域中无穷多个单元的性态，所有单元的剖分必须具备分层和相似的特点，如图 1 所示. 由于剖分是分层相似的，根据有限元方法的理论，可知每层的刚度阵是相同的，表示为 $\begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0^1 \end{pmatrix}$ {文 [1] 中的 (1.5) 式 }，各项符号的含义见文 [1]. 文 [1] 还给出了相邻两层的关系

$$-A\cdot y_{K-1}+K\cdot y_K-A^{\mathrm{T}}\cdot y_{K+1}=0\ ,\quad K=K_0+K_0^1\ ,\quad K=1,2,3,\cdots$$

文 [1] 证明了存在一个转移矩阵 X 满足 $y_{K+1}=X\cdot y_K$ 关系 $K=0,1,2,\cdots$，并且推导出组合刚度矩阵的表达式，$K_z=K_0-A^{\mathrm{T}}\cdot X$，再根据边界条件最终求出 y_0，y_1，y_2，$\cdots$. 求解的全过程可概括为先求解关于 X 的特征值问题，再找到组合刚度矩阵.

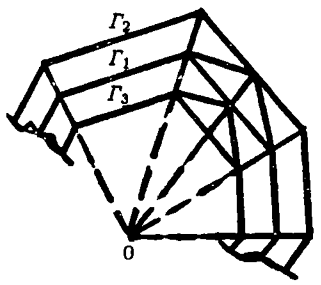

图 1
Fig.1

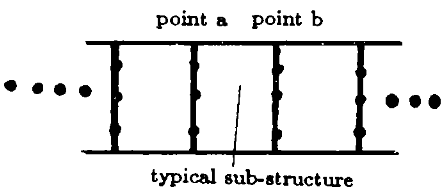

图 2
Fig.2

1994-05-01 收到第一稿，1994-09-11 收到修改稿.

钟万勰教授在文 [2] 中给出了相同子结构串问题的解法，相同子结构串问题如图 2 所示．相同子结构是指各子结构的几何形态和刚度阵都相同，子结构的刚度阵记为 $\begin{pmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{pmatrix}$ {文 [2](2.1) 式 }．文 [2] 首先构造状态空间 $\{U,N\}^{\mathrm{T}}$，得到递推关系式 $\begin{Bmatrix} U_b \\ N_b \end{Bmatrix} = [C]\cdot\begin{Bmatrix} U_a \\ N_a \end{Bmatrix}$，$[c]$ 是已知的，符号意义见文 [2]．由于 N_a, U_a 不能同时给定，因此必须要求解关于 $[C]$ 的特征值问题，但这一问题难于解决，所以根据位移不变法转而先求出左右各半无限串的总刚 A_b, A_a，然后还需找到关系式中 $U_b=\lambda U_a$ 的 λ 矩阵，这就要求解关于 λ 的特征值问题，因此文 [2] 的求解可概括为先找到总刚再求解特征值问题．

比较文 [1] 和 [2] 不难看出无限元方法和相同子结构串分析是一致的，因为各自均具有相同的刚度阵，区别仅在于无限元方法中每层单元是相似形，而相同子结构串则是几何相等．从剖分的方法几何直观分析，无限元方法是由过中心点的射线形成的，相同子结构串是由两条平行线形成的，因此可以说相同子结构串是无限元的一个特例．从另一个角度分析，相同子结构串可分析包括左右半无限结构问题，而无限元方法则研究相当于上述右半无限串问题，也可以说无限元方法是相同子结构串分析的一个特例．这样文 [1] 和 [2] 的参数具有一一对应的关系，即 $U\leftrightarrow y$, $N\leftrightarrow f_0$, $K_{aa}\leftrightarrow K_0$, $K_{bb}\leftrightarrow K_0^1$, $K_{ab}\leftrightarrow -A^{\mathrm{T}}$, $K_{ba}\leftrightarrow -A$, $A_a\leftrightarrow K_z$, $\lambda\leftrightarrow X$．但从上述分析，无限元方法与相同子结构串分析的求解过程恰好相反．

笔者认为可以综合文 [1] 和 [2] 的求解方法，提出一个通用的算法，即首先利用文 [2] 先求出右半无限串的总刚 A_a，然后利用文 [1] 求出转移矩阵 X，就可得到问题全部的解．这一通用算法完全避开了求解特征值问题的步骤，从而使求解过程得到简化．

从方程 (6.1) 式立刻得到 U_b, U_a 的关系式 $U_b=-(A_a+K_{bb})^{-1}\cdot K_{ba}\cdot U_a$，它就是文 [2] 中要寻找的关系式 $U_b=\lambda\cdot U_a$，即 $\lambda=-(A_a+K_{bb})^{-1}\cdot K_{ba}$，并且适用于所有界面，因此就不必再去求关于 λ 的特征值问题了．另外，由于 λ 已经得到，那末文 [2] 中关于状态空间的递推关系式也可导出，即由文 [2] 的 (2.4) 式知道 $N_a=K_{aa}\cdot U_a+K_{ab}\cdot U_b=(K_{aa}+K_{ab}\cdot\lambda)\cdot U_a$，代入文 [2] 的 (2.7) 式得 $\begin{Bmatrix} U_b \\ N_b \end{Bmatrix} = [C]\cdot\begin{Bmatrix} U_a \\ (K_{aa}+K_{ab})\cdot\lambda\cdot U_a \end{Bmatrix}$，再将 λ 的具体表达式代入，经过运算得到下式：$\begin{Bmatrix} U_b \\ N_b \end{Bmatrix} = [C]\cdot\begin{Bmatrix} U_a \\ A_a\cdot U_a \end{Bmatrix}$，这样状态空间的递推关系式成为显式，它也可应用于无限元方法．从上式中可以得到一个重要启示：对于每一层或每一子结构的界面上，有 $N_a=A_a\cdot U_a$ 或者 $U_a=A_a^{-1}\cdot N_a$ 成立，那么 U_a 或 N_a 只要知道其中之一，则另一个马上就可求出．并且直接利用状

态空间关系式得到解答而勿需去寻求 λ 或 X 矩阵.

钟万勰教授首创了 LQ 控制问题的统一数学模拟理论体系 [3]，其基础源于相同子结构串的分析，因此上述算法也将会在 LQ 问题中得到应用.

笔者认为尚可从另一条途径去解决上述问题，即略去先求 A_a 或 K_z 的步骤而直接去求转移矩阵 X 或 λ. 因为在文 [1] 中关于 X 的矩阵方程已经给出了：$-A+K\cdot X-A^{\mathrm{T}}X^2=0$. 这个方程只要做适当地处理便可迭代求出解 X 来，计算实际表明这种直接求转移矩阵的方法，简便且具有足够精度.

1 算　法

1.1 先求 A_a 或 K_z，再求 λ 或 X

由文 [2] 知

$$A_a=K_{aa}-K_{ab}\cdot(K_{bb}+A_a)^{-1}\cdot K_{ba} \tag{1}$$

当 K_{ab} 为对称阵时 A_a 为精确解. K_{ab} 为非对称阵时须迭代求解. 笔者认为迭代的步骤也可有别于文 [2]，即每次迭代时只改变 A_a 值而其余各值 K_{aa}，K_{bb}，K_{ab}，K_{ba} 始终不变，这有利于加快收敛. 迭代过程是：先假定一个 A_a 对称阵譬如单位阵，代入 (1) 式得到 A'_a，检查 A'_a 是否满足预定精度，不满足则令 $A_a=\varepsilon\cdot A_a+(1-\varepsilon)\cdot A'_a$ 重复前述过程直到满足为止. 笔者的经验 $\varepsilon=0.618$，这是参照优选法中的 0.618 法确定的，实践证明是可行的. 将文 [1] 和 [2] 的参数对应关系引入 (1) 式就可得到无限元方法中组合刚度阵 K_z 的方程式

$$K_z=K_0-A^{\mathrm{T}}\cdot(K_0^1+K_z)^{-1}\cdot A \tag{2}$$

采用同样的算法求解.

1.2 直接求转移矩阵 X

根据文 [1] 中关于 X 的方程

$$-A+KX-A^{\mathrm{T}}X^2=0 \tag{3}$$

式中 $K=K_0+K_0^1$，A 分为对称和不对称阵，但 A^{-1} 必然存在，这从文 [2] 中的状态空间递推关系式中的 $[C]$ 阵表达式可以说明 ($-A^{\mathrm{T}}$ 与 K_{ab} 有对应的关系)，因此说倘若 A^{-1} 不存在则说明刚度阵 $\begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0^1 \end{pmatrix}$ 病态或不能成立.

当 A 是对称的，(3) 式两端左乘 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}$ 得

$$-I+(A^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot K\cdot X-X^2=0 \tag{4}$$

(4) 式两端右乘 X^{-1} 得

$$X=B-X^{-1},\qquad B=(A^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot K \tag{5}$$

迭代求解 (5) 式即得到 X.

当 A 是不对称阵时, (3) 式左乘 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}$ 得

$$-(A^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot A+(A^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot K\cdot X-X^2=0 \tag{6}$$

令 $B=(A^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot K$, $C=(A^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot A$, (6) 式改写成

$$X^2=BX-C \tag{7}$$

(7) 式右乘 X^{-1}, 得

$$X=B-C\cdot X^{-1} \tag{8}$$

(7) 式左乘 X^{-1}, 得

$$X=X^{-1}\cdot B\cdot X-X^{-1}\cdot C \tag{9}$$

(9) 式改写成

$$(X^{-1}\cdot B-I)\cdot X=X^{-1}\cdot C \tag{10}$$

(10) 式左乘 $(X^{-1}\cdot B-I)^{-1}$ 得

$$X=(X^{-1}\cdot B-I)^{-1}\cdot X^{-1}\cdot C \tag{11}$$

(8) 式和 (11) 式就是 A 不对称时的两个迭代格式, 迭代结果选择一个, 选择的实用办法是: 假定 $y_0=\{\overbrace{1,1,\cdots,1}^{n个}\}^{\mathrm{T}}$, 如果 $y_1=X\cdot Y_0$ 的各元素绝对值均小于 1 则 X 阵是所求. 上述各方程迭代求解的方法依然采用松弛因子 $\varepsilon=0.618$.

2 算 例

用上述算法计算了文 [2] 的例, 它属于 K_{ab} 不对称情形.

如果先求 A_a 再求 λ, 用本文的迭代方法, 精度选定为 1.0×10^{-5}, 则迭代 24 次得到与文 [2] 完全一致的结果. λ 直接代入公式即得.

如果直接求 λ 矩阵, 因 K_{ab} 不对称, 用 (11) 式迭代求解 (预先将 A, A^{T}, X, K 与 K_{ba}, K_{ab}, λ, A_{aa} 对应代换), 精度选 1.0×10^{-5}, 本文迭代 15 次得到与文 [2] 完全相同的结果, 如果用 (8) 式迭代则得到文 [2] 中向左半无限串的传递关系也就是 λ^{-1}, 这个结果对无限元方法来说不予考虑.

以上数据说明本文的两种算法都是可行的, 直接求转移矩阵的算法更简便.

3 讨 论

1) 指出无限元方法与相同子结构串分析的一致性, 使得问题的求解得到简化. 把文 [1] 的数学严密性和文 [2] 的物理概念明确、处理手法简捷的特点结合在一起, 会促进这一类问题领域的更深入发展.

2) 只要找到 A_a 或 K_z, 则由于状态空间变成显式表示, 问题直接得到解答而勿需再去寻求 λ 或 X.

3) 只求解转移矩阵 X 也是一种途径，工作量和只求 A_a 或 K_z 相当． X 阵的求解尚可进一步探讨．

4) 三维问题和因控制方程引起的不相似问题，必须更进一步研究合适的算法．

致谢　衷心感谢钟万勰教授的热情指教．

参 考 文 献

1 应隆安．无限元方法．北京大学出版社， 1992

2 钟万勰．相同子结构串的本征对问题及展开解法，力学学报， 1991, 23(1)

3 钟万勰．最优控制与计算结构力学的模拟关系，力学与实践， 1993, 15(1)

AGREEMENT OF THE INFINITE ELEMENT METHOD AND THE ANALYTICAL METHOD FOR CHAIN OF IDENTICAL SUBSTRUCTURES AND THE SOLUTION OF TRANSLATIVE MATRIX

Liu Hanli

(Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract　An agreement of the infinite element method and the analytical method for the chain of identical substructures is discussed in this paper. A general solving program is given, which is based on reference [1] and [2] and can be applied to LQ control problems. Moreover, in this paper is the translative metrix X is solved directly by iderative method, which is very simple and accurate.

Key words　infinite element method, substructure chain, translative metrix