

旋涡与水面相互作用研究¹⁾

马 晖 扬

(中国科技大学研究生院, 北京 100039)

吴 锤 结

(中国人民解放军空军气象学院, 南京 211101)

摘要 采用 Navier-Stokes 方程的有限差分数值解来研究水下生成的旋涡在浮升过程中与水面的相互作用. 旋涡的初始模型为 Oseen 涡. 数值模拟给出了在旋涡与水面相互作用过程中, 水面形状和涡量场的演化, 还讨论了 Froude 数、Reynolds 数和 Weber 数对水面变形的影响.

关键词 旋涡, 自由面, 有限差分, Navier-Stokes 方程

引 言

最近十年来, 水下浸没的旋涡与水面的相互作用的研究受到人们的广泛注意, 已经成为水动力学的一个前沿领域的研究课题. 旋涡与水面的相互作用研究, 可以分成实验研究和理论研究两个方面. 实验研究主要是在水槽和溢流水池中进行, 其中最早见诸于报道的是 Sarpkaya^[1](1986) 的尾涡对 (Vortex Pair) 与净水面的相互作用的实验结果, 首次发现涡对会使水面发生特定的变形 (纵向沟槽和横向条纹). Fish^[2](1991) 进一步在水槽中以实验方法研究了更接近于实际情况的尾涡对与二维行进水波的相互作用. 实验结果表明当存在行波时, 旋涡与自由面的相互作用不再是左右对称的, 而且相互作用的水动力学机制也不相同.

理论研究工作是目前该领域研究工作中十分活跃的一部分, 其中除了少数研究者应用摄动方法作理论分析外, 绝大多数是用数值模拟方法来进行研究. 已经有一些研究者尝试用有限差分方法、涡方法和有限基本解方法等模拟了尾涡与水面的相互作用, 例如 Ohring 等^[3](1991). 目前, 大多数的数值模拟工作仍局限于二维流动, 个别的三维流动的数值模拟工作已经有所报道 (Marcus 等^[4](1994)). 数值模拟工作取得了丰硕的成果, 基本上模拟出了实验所观察到的水面的特定形状的变形, 并且分析了有关参数 (例如 Froude 数, Reynolds 数, Weber 数等) 的影响.

我们曾经用涡方法模拟了二维无粘流体中旋涡与水面的相互作用 (马晖扬等^[5](1993)). 作为上述工作的继续深入, 采用有限差分方法对二维粘性流体中旋涡与水面的相互作用进行了研究. 考虑的旋涡的初始形态为 Oseen 涡. 计算了旋涡与水面相互作用过程中水面的变形, 涡量场随时间的演化, 旋涡涡核中心的轨迹等. 讨论了有关参数如 Froude 数、Reynolds 数以及表面张力的影响.

¹⁾ 国家自然科学基金资助项目.

1994-11-25 收到第一稿, 1995-03-11 收到修改稿.

1 问题的数学描述和数值方法

考虑二维粘性流体. 假设在初始时刻水面是水平的, 在水下深度为 H 处生成一对强度为 Γ 的旋涡. 在旋涡的相互诱导作用下, 涡对将向上浮起, 越来越接近水面, 从而与水面发生相互作用.

首先将控制方程组无量纲化. 定义旋涡涡核中心之间的距离 a 为特征长度, 旋涡间的诱导速度 V_0 为特征速度, 即 $V_0 = \Gamma/2\pi a$, 那么特征时间为 a/V_0 . 压强的无量纲形式为 $p/\rho V_0^2$. 采用上述无量纲形式以后, 控制方程中将出现三个无量纲参数, 它们分别是 Froude 数 Fr , Reynolds 数 Re 和表征表面张力作用的 Weber 数 We , 它们的定义为

$$Fr = \frac{V_0}{(ga)^{1/2}} = \frac{\Gamma}{2\pi(ga^3)^{1/2}}, \quad Re = \frac{V_0 a}{\nu} = \frac{\Gamma}{2\pi\nu}, \quad We = \frac{\sigma a^4 \pi^2}{\rho \Gamma^2}$$

其中 g 是重力加速度, σ 是水的表面张力系数.

采用无量纲形式的 Navier-Stokes 方程. 在应用 Navier-Stokes 方程进行数值解时, 关键的问题是要在自由面 (即水面) 上满足相应的运动学和动力学边界条件. 这样才有可能正确地确定水面的变形.

关于旋涡模型. 旋涡模型采用的是 Oseen 涡. 考虑到左右对称问题. 故还应加上对称面左侧的镜像涡. 注意到初始时刻 $t = 0$ 时, 假设了水面是平面. 为了满足这一初始条件, 还必须考虑在水面上方再布置两个镜像涡, 构成了一个初始旋涡系统.

采用有限差分方法求解非定常 Navier-Stokes 方程组. 应用有限差分方法求解带有自由面的问题, 关键是如何模拟自由面的演化. 在本文中, 采用的是流体体积法 (The Fractional Volume-of-Fluid Method). 定义一个函数 $F(x, y, t)$, 它随着网格和时间而变化. 如果某个网格完全为流体所充满, 则定义 $F(x, y, t)$ 在该网格的值为 1; 如果该网格完全没有为流体所占据, 即空网格, 则 $F(x, y, t) = 0$. 一般情况下, $F(x, y, t)$ 是数值在 0—1 之间的函数, 它表示了网格中流体所占体积的比例. 在计算中, 自由表面定义为这样的网格: 它含有非零的 F 值, 且与它相邻的单元中至少有一个是 F 值为零的. 因此, 根据流体体积函数 $F(x, y, t)$ 提供的信息, 就可以确定自由面的位置.

应用有限差分方法对上述具有自由面的问题进行数值求解. 采用非等距正交网格. 压强 $p_{i,j}$ 和流体体积函数 $F_{i,j}$ 定义在网格的中心; 而速度分量 $u_{i+1/2,j}$ 和 $v_{i,j+1/2}$ 分别定义在网格的右边界和上边界的中点. Navier-Stokes 方程中, 时间项采用前向差分格式, 对流项采用基于迎风差分和二阶中心差分的混合差分格式, 粘性项采用二阶中心差分格式.

2 计算结果分析

在本文的研究工作中, 考虑了 Re 数、 Fr 数和 We 数对旋涡与水面相互作用的影响. 在计算这些参数的数值时, 有关的流体物理特性数据均取自 $t = 15^\circ\text{C}$ 时纯水的值. 现在就来分析有关的数值计算结果.

2.1 水面形态随时间的演化

图 1 是 $Fr = 0.2$, $Re = 5000$ 时, 在五个不同时刻, 数值模拟给出的水面的形态. 可以看出, 由于旋涡向上运动, 导致水面由平面而隆起, 其中在涡对的中心线上, 隆起的最高. 在隆起的两边, 分别有明显的水面的下陷. 在那里形成了类似于沟槽的变形. 数值结果表明, 旋涡对与水面的相互作用基本上局限于涡对上方的范围, 是局部区域的现象. 我们虽然作的是二维数值模拟, 但其结果, 在最主要的特征上, 都和 Sarpkaya (1986) 的实验相符合. 因此, 二维数值计算结果在分析旋涡与自由面相互作用的现象和机制方面仍然是有重要作用的. 沟槽的出现, 正是由于斜压效应而产生的二次涡与主涡相互作用的结果. 可以看出, 随着旋涡不断上升, 它与水面的相互作用不断加强, 因而水面的隆起越来越高. 但是它有一个限度. 超过这个限度以后, 水面即开始向下跌落. 我们分析这个现象产生的原因有两个. 一是由于粘性的作用, 旋涡对的涡量在耗散过程中不断衰减, 使之与水面的相互作用的程度越来越弱. 另一个原因是由于二次涡生成后, 二次涡涡量符号与主涡的相反, 二次涡的存在抵消了部分主涡的作用. 正是由于这些机制, 使得旋涡与水面的相互作用是一个从逐渐增强到逐渐变弱和最终消失的时间历程. 也就是说, 旋涡与自由面的相互作用是有一定“寿命”的. 这一点无疑为用遥感方法捕捉水下物体的运动增加了困难.

2.2 涡量场形态描述

图 2 描绘了 $Fr = 0.2$, $Re = 5000$, $T = 0.305$ 时的等涡量线. 图中封闭圆环所围的区域是主涡. 由于粘性的扩散作用, 涡量分布的区域越来越大, 涡中心处的涡量的绝对值最大. 由于主涡与水面相互作用, 使水面发生变形, 从而导致斜压效应出现, 诱导出新的涡量, 集中在水面的附近. 在沟槽处, 由于斜压效应最强, 新生涡量也最强, 最集中, 形成了明显的二次涡. 旋涡与水面的相互作用的后, 实际上成为主涡与二次涡的相互作用并最终消失的过程.

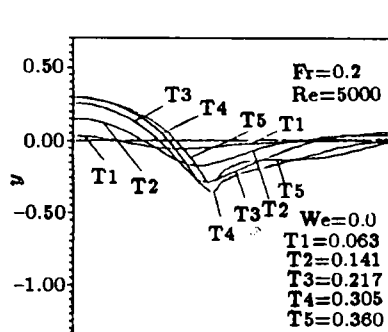


图 1 在旋涡的作用下水面发生的变形
Fig.1 Evolution of water surface

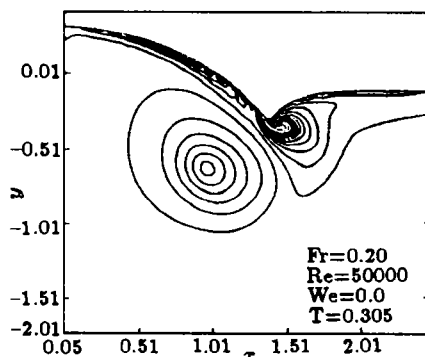


图 2 等涡量线图
Fig.2 Equivorticity lines

图 3 是沿水面表面涡量的分布曲线. 由图可见, 表面涡量分布具有一个峰值, 且该峰值较陡, 即沿水面大部分区域涡量都较小, 但在二次涡形成的区域附近有一较大的峰值. 由我们得到的自由面形状和表面涡量分布相对照, 不难看出, 表面涡量在很大程度上是由水面的曲率决定的.

2.3 Froude 数的影响

关于在不同 Fr 数下自由面变形的比较, 见图 4. 该算例的计算条件为 $Re = 5000$, $We = 0.0$. 结果表明, Fr 数在自由面的变形中起着决定性的影响. Fr 数越大, 自由面的变形越大. 由 Fr 数的定义, 显然, 在同样的涡对空间尺度的情形下, 旋涡越强, 自由面的变形越大; 反之, 在同样的旋涡强度的情形下, 旋涡对的几何尺度越小, 它对自由面的作用越强.

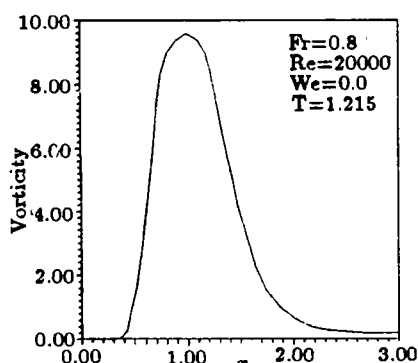


图 3 沿水面的表面涡量分布
Fig.3 Surface vorticity distribution

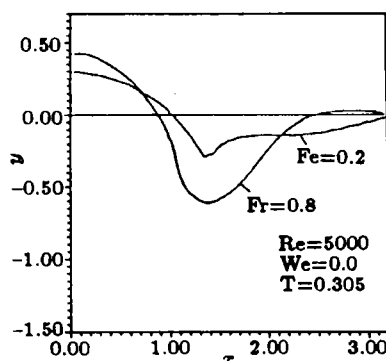


图 4 不同 Fr 数下水面的变形
Fig.4 Water surface deformations at two different Froude numbers

2.4 Weber 数的影响

在本文的研究工作中, 我们仅考虑了两种情况. 一是不考虑表面张力, 即 $We = 0.0$; 另一种情形是考虑介质为水, 即按水的表面张力系数 σ 来计算 Weber 数值, $We = 0.11$.

图 5 显示的是 $Fr = 0.2$, $Re = 5000$ 的情形. 我们可以看出, 对于水这种介质, 由于表面张力系数较小, 亦即 Weber 数较小, 表面张力对旋涡与水面的相互作用影响在整体上不大, 例如对于表面隆起的高度, 考虑表面张力与否几乎没有区别. 但是在表面曲率较大的地方, 两者之间在自由面的局部形态上还是有较大的区别的. 表面张力的存在使水面的变形变得较为平坦, 消除了局部变形过大的现象.

2.5 Reynolds 数的影响

计算的条件是 $Fr = 0.4$, $We = 0.0$, 而 Reynolds 数分别取为 $Re = 1000$, $Re = 5000$, $Re = 10000$. 令人感到吃惊的是尽管 Reynolds 增加了十倍, 而水面的变形却几乎相同. 我们由此可以得到一个结论: 即在大 Reynolds 数情况下, Reynolds 数对旋涡与水面的相互作用的影响是可以忽略的. 我们可以定义一个新的无量纲参数, 即 Reynolds 数与 Froude 数的比值来作为宏观流体运动和扩散运动相对重要性的度量. 该无量纲参数称为 Wehausen 数, 它的定义为 $W = a^{3/2}g^{1/2}/\nu$. 在我们所研究的问题中, Wehausen 数的量级为 $O(10^4)$. 确实, 粘性扩散的影响是可以忽略的, 即粘性对水面的变形是很小的.

2.6 旋涡运动轨迹研究

在旋涡对与水面的相互作用过程中, 研究旋涡的运动轨迹是显示它们相互作用

特征的一个方面. 我们利用数值计算的中间结果, 对该问题进行了分析. 由于是采用粘性有核旋涡模型, 我们定义涡量绝对值最大的那一点为旋涡中心. 图 6 中的实线表示的即旋涡运动轨迹. 在旋涡与水面相互作用的初期, 旋涡基本上沿铅垂方向向上运动. 当旋涡接近水面后, 由于与水面的相互作用, 旋涡对的中心距离加大, 即两个涡分得比较开; 然后, 旋涡在二次涡的诱导作用下, 开始向下运动, 似乎水面是一个壁面, 旋涡被弹了回来, 同时主涡的横向尺度也越来越大. 作为一种比较, 在图中还用虚线标出了旋涡轨迹的经典理论结果. 它对应于无粘点涡对的理论模型, 同时假定水面一直保持平面. 通过与经典结果的比较, 我们可以看出, 当旋涡与水面较接近时, 旋涡运动轨迹主要是由主涡与二次涡的相互作用所决定的.

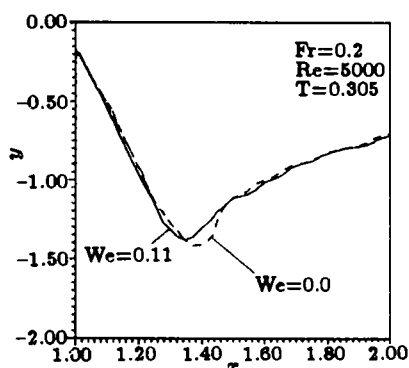


图 5 We 数对水面变形的影响
Fig.5. Effect of Weber number on water surface deformation

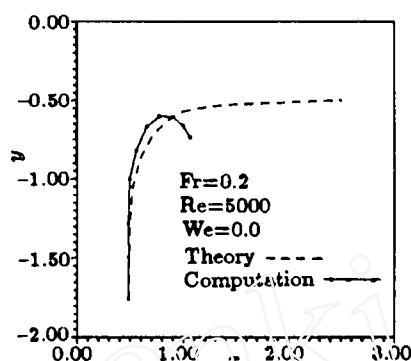


图 6 旋涡对的运动轨迹
Fig.6. Path of vortex centers

3 结 语

通过对粘性流体中旋涡与水面相互作用的 Navier-Stokes 方程的数值解, 进一步认识了旋涡与水面相互作用的特征. 水面确实发生了如实验所显示的那种特定形状的变形, 它为利用遥感、图像识别等高技术捕捉水下物体的运动提供了理论依据. 数值模拟表明这种相互作用引起的变形是有一个时间历程的, 即有一定的“寿命”. 通过对不同物理参数下计算结果的分析, 表明影响水面变形的主要因素是 Froude 数, 亦即旋涡的强度和几何尺度. 表面张力不会影响水面变形的整体形态, 但却会对局部变形有较大的影响. Reynolds 数的影响并不明显.

参 考 文 献

- 1 Sarpkaya T. Trailing-vortex wake on the free surface. In: Proceedings on the 16th Symposium on Naval Hydrodynamics. National Academy Press, 1986. 35-40
- 2 Fish S. Vortex dynamics in the presence of free surface waves. *Phys Fluids*, 1991, A3(4): 504-506
- 3 Ohring S, Lugt HJ. Interaction of a viscous vortex pair with a free surface. *J of Fluid Mech*, 1991, 227: 47-70
- 4 Marcus DL, Bell JB. Numerical simulation of a viscous vortex ring interacting with a density interface. *Phys Fluids*, 1994, A6(4): 1505-1514
- 5 马晖扬, 吴锤结, 谭伯彦. 旋涡与自由面相互作用研究. 见: 1993 全国水动力学研讨会文集. 1993: 365-370

INTERACTION OF VORTICES WITH THE SEA-WATER SURFACE

Ma Huiyang

(*Graduate School of Academia Sinica, Beijing 100039, China*)

Wu Chuijie

(*Air Force Institute of Meteorology, Nanjing 211101, China*)

Abstract The finite-difference solutions of Navier-Stokes equations are employed to investigate the interaction between a submerged vortex pair and the sea-water surface. The initial state of the vortex model is Oseen vortex. Numerical simulations describe the evolution of the sea-water surface and vorticity field in the interaction process. The effects of Reynolds number, Froude number, and Weber number on the surface deformation are discussed.

Key words Vortices, free surface, finite-difference method, Navier-Stokes equations

www.cnki.net