

一类新变量的 Reissner 板弯曲边界元法¹⁾

雷小燕 黄茂光

(中国科学技术大学力学系, 合肥 230026)

摘要 文 [4] 导出了二维弹性力学平面问题的一类新型边界积分方程. 本文将该理论和方法推广到三变量的 Reissner 板弯曲中, 给出边界场变量含广义位移和新型广义力的边界积分方程. 从而边界弯矩应力张量可直接由离散边界积分方程求出.

关键词 Reissner 板, 边界元法, 边界应力张量

引言

直接边界积分方程方法已成功地应用到三变量中厚板弯曲的静、动力, 非线性分析等问题中去^[1-3]. 这类称之为常规的或标准的边界元法均以边界广义位移和广义面力作为边界场变量, 如边界弯矩 M_n 和扭矩 M_{ns} . 但在很多情况中, 如应力集中、接触问题、断裂问题等, 人们所关心的边界应力张量都必须通过对位移微商才能求出. 在平面应力问题中, Cruse^[5] 给出计算边界应力张量的表达式, 但其核函数含 $1/r^2$ 阶奇异性, 最终只能利用分部积分或对插值函数微商来解决, 因而降低了计算精度. N. Ghost^[6] 等人提出了一类边界积分方程的弱形式, 其中引入了对位移微商的变量, 且仅适合于应力边界条件和单连通域. H. Okada^[7] 所导出的弱形式边界积分方程以位移梯度作为边界未知量, 仅适合应力边界条件, 同时每个节点有四个自由度, 而平面问题每节点有两个自由度.

本文从 Reissner 板弯曲的平衡方程出发, 引入一组新型的加权方程, 推导出完全不同于 F. Vander^[1] 给出的边界积分方程. 其边界场变量含 M_{ss} ($M_{ss} = M_{ij}t_it_j$, t_i 是边界切向余弦). 从而使 M_{ss} 可直接由离散边界积分方程求出, 其计算精度与边界广义位移和广义力同阶. 本文成果在理论上完善了 Reissner 板弯曲问题的边界元法分析. 文末给出的算例证实了本理论的正确性和有效性. 在处理应力集中问题方面, 和常规方法比较, 本文结果尤其出色.

1 Reissner 板理论

我们考虑一个板厚为 h , 中面坐标 X_α ($\alpha = 1, 2$) 和板厚度方向坐标 X_3 的各向同性板弯曲问题. 板的平衡方程是

$$\left. \begin{aligned} M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha + F_\alpha &= 0 \\ Q_{\alpha,\alpha} + F_3 + q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

¹⁾ 国家教委优秀青年教师基金资助课题.

1994-04-09 收到第一稿, 1994-08-07 收到修改稿.

其中 F_i 是体积力, q 是板表面的横向分布载荷. 以下我们用 (u_α, u_3) 表示广义位移, 其中 u_α 是转角分量, u_3 是挠度. 则广义位移和广义力之间的关系和用广义位移表示的平衡方程分别是

$$\left. \begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \frac{1-\nu}{2} D \left[u_{\alpha'\beta} + u_{\beta'\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma'\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \nu q \delta_{\alpha\beta} / (1-\nu) \lambda^2 \\ Q_\alpha &= C(u_\alpha + u_{3,\alpha}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\Delta_{ij}^* u_j + P_i = 0 \quad (3)$$

其中 $\lambda = \sqrt{10}/h$ 是特性参数. $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 和 $C = 0.5(1-\nu)D\lambda^2$ 分别为弯曲刚度和剪切刚度. (3) 式中的算子分量为

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}^* &= \frac{1-\nu}{2} D \left[(\nabla^2 - \lambda^2) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right] \\ \Delta_{\alpha 3}^* &= -C \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = -\Delta_{3\alpha}^* \\ \Delta_{33}^* &= C \nabla^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$P_\alpha = F_\alpha + \nu q_{,\alpha} / (1-\nu) \lambda^2, \quad P_3 = F_3 + q \quad (5)$$

2 新的加权方程

首先引入一个新函数 $A_{\alpha\beta}$ (如文 [4])

$$A_{\alpha\beta} = (-1)^{(\beta)} \frac{1}{\nu} M_{\alpha 3-\beta} \quad (6)$$

其中上标 (β) 仅表示 (-1) 的幂次, 而不表示与下标 β 求和. 考虑关系式 (2) 和平衡方程 (3), 不难证明平衡方程可写成如下形式

$$\left. \begin{aligned} A_{\alpha\beta,\beta} - \frac{1-\nu^2}{\nu} D \omega_{12,\alpha} + \bar{Q}_\alpha + \bar{F}_\alpha &= 0 \\ Q_{\alpha,\alpha} + F_3 + q &= 0 \\ \omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} - u_{\beta,\alpha}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_\alpha &= (-1)^{(\alpha)} C (u_{3-\alpha} + u_{3,3-\alpha}) \\ \bar{F}_\alpha &= -(-1)^{(\alpha)} F_{3-\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

需要说明的是 $\omega_{\alpha\beta}$ 类似于弹性力学平面问题中的转动张量, 具有反对称特性. 边界外法线方向余弦 n_α 和切线方向余弦 t_α 有关系式

$$t_\alpha = (-1)^{(\alpha)} n_{3-\alpha} \quad (9)$$

本文仅考虑板面上的横向分布载荷 q . 取权函数 $u_i^*(i=1,2,3)$, 并将它们乘以方程 (7), 然后在整个区域积分

$$\int_{\Omega} \left[\left(A_{\alpha\beta,\beta} - \frac{1-\nu^2}{\nu} D\omega_{12,\alpha} + \bar{Q}_\alpha \right) u_\alpha^* + (Q_{\alpha,\alpha} + q) u_3^* \right] d\Omega = 0 \quad (10)$$

将 (6) 式中的 $A_{\alpha\beta}$ 代入上式, 并对它两次分部积分. 最终导出加权方程的一种新型式

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left[\frac{-1}{\nu} (M_{\alpha\beta} + (1-\nu^2) D\omega_{\alpha\beta}) t_\beta u_\alpha^* + Q_\alpha n_\alpha u_3^* \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{\nu} u_\alpha p_\alpha^* + u_3 p_3^* \right] d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \left[(-1)^{(\alpha)} u_{\alpha,3-\alpha}^* / (1-\nu) \lambda^2 + u_3^* \right] q d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \left[(-1)^{(\alpha)} u_{3-\alpha} (\Delta_{\alpha\beta} u_\beta^* + \Delta_{\alpha 3} u_3^*) + u_3 (\Delta_{3\alpha} u_\alpha^* + \Delta_{33} u_3^*) \right] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

上式中算子表达式和导出量 p_j^* 分别是

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta} &= D \left[(\nabla^2 - C/D) \delta_{\alpha\beta} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right] \\ \Delta_{\alpha 3} &= (-1)^{(\alpha)} C \frac{\partial}{\partial x_{3-\alpha}} = \Delta_{3\alpha} \\ \Delta_{33} &= -C \nabla^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} p_\alpha^* &= -D \left[u_{\alpha',\beta}^* - \nu u_{\beta',\alpha}^* + \frac{1-\nu}{2} \nu u_{\gamma',\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} \right] t_\beta \\ p_3^* &= C (u_\alpha^* t_\alpha - u_{3,\alpha}^* n_\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

不难发现由方程 (10) 分部积分导出的算子 (12) 不同于平衡方程 (3) 中的算子.

3 边界积分方程和基本解

假设基本解 U_{ij} 是如下方程的一个特解

$$\Delta_{ij} U_{kj}(\xi, \chi) = \delta(\xi, \chi) \delta_{ik} \quad (14)$$

其中算子分量 Δ_{ij} 由 (12) 式定义. $\delta(\xi, \chi)$ 是 Dirac- δ 函数, ξ 和 χ 分别表示源点和场点. 根据算子解耦技术求其基本解^[8-10], 则 U_{ij} 可表示成如下形式

$$U_{kj}(\xi, \chi) = {}^{\circ}\Delta_{jk} \phi(\xi, \chi) \quad (15)$$

式中 ${}^{\circ}\Delta_{jk}$ 是算子矩阵 Δ_{jk} 的余子式, $\phi(\xi, \chi)$ 是一个标量函数, 将 (15) 式代入方程 (14) 得

$$[\det \Delta] \phi(\xi, \chi) = \delta(\xi, \chi) \quad (16)$$

其中

$$[\det \Delta] = -\frac{1-\nu}{2} C D^2 \nabla^4 (\nabla^2 - \lambda^2) \quad (17)$$

方程 (16) 中, 一个含奇异性的特解为^[1]

$$\phi(\xi, \chi) = \frac{2}{(1-\nu)C} D^{-2} \frac{1}{2\pi} \lambda^{-4} [K_0(Z) + \ln Z + Z^2(\ln Z - 1)/4] \quad (18)$$

利用 (15), (18) 和 (13) 式, 核函数 U_{ij} 和对应的 T_{ij} 可以被导出

$$\left. \begin{aligned} U_{\alpha\beta} &= \frac{1}{8\pi D} \left[\left(2\ln r + 1 + \frac{8}{1-\nu} E(Z) \right) \delta_{\alpha\beta} - \left(2 + \frac{8}{1-\nu} A(Z) \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \\ U_{3\alpha} &= \frac{1}{8\pi D} (-1)^{(\alpha)} r (2\ln r - 1) r_{,3-\alpha} = U_{\alpha 3} \\ U_{33} &= -\frac{1}{8\pi D} \left[\frac{4D}{C} \ln r - r^2 (\ln r - 1) \right] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\pi r} \left[r_{,\alpha} t_{\beta} \left(2A(Z) + \frac{1-\nu}{2} - \nu K_1 Z \right) + r_{,\beta} t_{\alpha} \left(2A(Z) + \frac{1+\nu}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\alpha\beta} r_{,s} \left(2A(Z) - \frac{1+\nu}{2} \right) - r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,s} (1-\nu + 2k_1 Z + 8A(z)) \right] \\ T_{3\alpha} &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \left[(1+\nu) \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) n_{\alpha} + \nu r_{,\alpha} r_{,n} - (-1)^{(\alpha)} r_{,s} r_{,3-\alpha} \right] \\ T_{3\alpha} &= \frac{C}{2\pi D} \left[t_{\alpha} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{1-\nu} E(Z) \right) - r_{,\alpha} r_{,s} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{1-\nu} A(Z) \right) - (-1)^{(\alpha)} \frac{1}{2} r_{,n} r_{,3-\alpha} \right] \\ T_{33} &= \frac{1}{2\pi r} r_{,n} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中

$$E(Z) = (K_1 - 1/Z)/Z, \quad A(Z) = K_0 + 2(K_1 - 1/Z)/Z \quad (21)$$

上式中, $K_0(Z)$ 和 $K_1(Z)$ 分别为零阶和壹阶修正的贝塞尔函数, 且 $Z = \lambda r$. 不难验证 $E(Z)$ 有 $\ln r$ 阶奇异性, 而 $A(Z)$ 是连续的. 由 (14) 式中 $D_{\text{irac}}\delta$ 函数的特性, 则加权方程 (11) 式得

$$\begin{aligned} C_{ik} u_k(\xi) &+ \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{\nu} T_{i\alpha}(\xi, \chi) u_{\alpha}(\chi) + T_{i3}(\xi, \chi) u_3(\chi) \right] d\Gamma(\chi) \\ &= \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{\nu} U_{i\alpha}(\xi, \chi) P_{\alpha}(\chi) + U_{i3}(\xi, \chi) P_3(\chi) \right] d\Gamma(\chi) \\ &\quad - \int_{\Omega} q(\chi) [U_{i3}(\xi, \chi) + (-1)^{(\alpha)} U_{i\alpha}(\xi, \chi)_{,3-\alpha} / (1-\nu) \lambda^2] d\Omega(\chi) \end{aligned} \quad (22)$$

其中

$$P_{\alpha} = [M_{\alpha\beta} + (1-\nu^2) D \omega_{\alpha\beta}] t_{\beta}, \quad P_3 = -Q_{\alpha} n_{\alpha} \quad (23)$$

如果源点 ξ 位于域内, 则由方程 (11) 中的最后一项和方程 (14) 可求出系数 C_{ik} 的表达式

$$[C] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

而当源点 ξ 位于边界时, 其系数 C_{ik} 将在附录 I 中计算. 对于均布载荷 $q(x) = q_0$, 区域积分可化为边界积分来处理

$$\left. \begin{aligned} V^\alpha &= \frac{1}{128\pi D} (-1)^{(\alpha)} r^3 (4\ln r - 5) r_{,3-\alpha} \\ V^3 &= \frac{1}{256\pi D} \left[r^4 (2\ln r - 3) - 32 \frac{D}{C} r^2 (\ln r - 1) \right] \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$q_0 \int_{\Omega} [U_{i3} + (-1)^{(\alpha)} U_{i\alpha,3-\alpha} / (1-\nu) \lambda^2] d\Omega = q_0 \int_{\Gamma} [V_{,\alpha}^i n_\alpha + U_{i\alpha} t_\alpha / (1-\nu) \lambda^2] d\Gamma \quad (26)$$

4 边界条件

Reissner 板弯曲中的位移和力平衡条件分别为

$$\left. \begin{aligned} u_n &= u_\alpha n_\alpha, & u_s &= u_\alpha t_\alpha, & u_3 \\ M_{nn} &= M_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta, & M_{ns} &= M_{\alpha\beta} n_\alpha t_\beta, & Q_n &= Q_\alpha n_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

其中 M_{nn} 和 M_{ns} 分别是表面弯矩和扭矩, Q_n 是边界剪力. 而边界上另一个弯矩分量是

$$M_{ss} = M_{\alpha\beta} t_\alpha t_\beta \quad (28)$$

方程 (22) 中的新边界变量 P_α 可证明为

$$P_\alpha = [M_{\alpha\beta} + (1-\nu)^2 D \omega_{\alpha\beta}] t_\beta = B_{ns} n_\alpha + t_\alpha M_{ss} \quad (29)$$

$$B_{ns} = M_{ns} + (1-\nu^2) D \omega_{ns} \quad (30)$$

$$\omega_{ns} = \frac{1}{2} (\partial u_\alpha / \partial x_\beta - \partial u_\beta / \partial x_\alpha) n_\alpha t_\beta = \frac{1}{2} (\partial u_1 / \partial x_2 - \partial u_2 / \partial x_1) = \omega_{12} \quad (31)$$

这样我们得出一个十分有益的结果: M_{ss} 做为一个独立的场变量出现在边界积分方程中. 将 (29) 式代入到 (22) 式中

$$\begin{aligned} C_{ik} u_k(\xi) &+ \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{\nu} T_{i\alpha}(\xi, \chi) u_\alpha(\chi) + T_{i3}(\xi, \chi) u_3(\chi) \right] d\Gamma(\chi) \\ &= \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{\nu} U_{i\alpha}(\xi, \chi) n_\alpha B_{ns}(\chi) + \frac{1}{\nu} U_{i\alpha}(\xi, \chi) t_\alpha M_{ss}(\chi) + U_{i3}(\xi, \chi) P_3(\chi) \right] d\Gamma(\chi) \\ &\quad - \int_{\Omega} q(\chi) [U_{i3}(\xi, \chi) + (-1)^{(\alpha)} U_{i\alpha}(\xi, \chi)_{,3-\alpha} / (1-\nu) \lambda^2] d\Omega(\chi) \end{aligned} \quad (32)$$

在方程 (32) 中, 边界场变量是 u_i , B_{ns} , M_{ss} 和 Q_n . 对于已知边界位移分量 u_α 和 u_3 (或 P_3), 则其它的边界场变量可直接由离散边界积分方程 (32) 或 (22) 求出. 而在混合边界条件的情况下, 边界广义位移和广义面力可由常规的边界元法导出, 然后边界弯矩分量 M_{ss} 和转动张量 $\omega_{\alpha\beta}$ 由本文方法求出. 且边界弯矩应力张量 $M_{\alpha\beta}$ 可以很容易地从 M_{nn} , M_{ns} 和 M_{ss} 导出.

另一个十分有益的结论是: 边界积分方程 (22) 式中的两个核函数 U_{ij} 和 T_{ij} 分别含 $\ln r$ 和 $1/r$ 阶奇异性. 这一特性与常规的边界元法完全一致.

5 算 例

作者根据本文的结果,在已发展起来的边界元计算软件中加入了这个新的单元.边界场变量和边界几何形状均采用线性插值.积分方程中含 T_{ik} 的奇异积分项采用刚体位移的方法(见附录 I). 而含 U_{ij} 的奇异积分项解析地求出. 其余的边界单元积分均采用四点高斯积分. 泊松比 $\nu = 0.3$.

例 1 固支圆板受均荷载

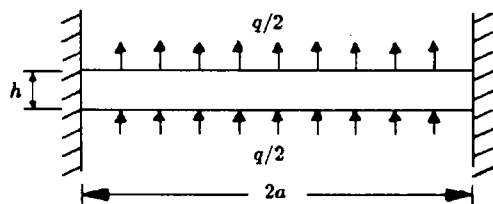


图 1
Fig.1

如图 1 所示周边固支的圆板,上下表面分别作用均布载荷 $q/2$. 边界条件为

$$u_r = u_\theta = u_3 = 0, \quad r = a \quad (33)$$

由于对称性,仅对 1/4 板划分网格. 边界弯矩分量 $M_{ss}(M_{\theta\theta})$ 和剪应力 V_n 的数值结果列于表 1 中. 随着网格的加密,它们

很快地收敛于精确解. 表 1 中括号内的值是精确解^[1].

表 1 周边固支圆板受均布载荷

Table 1 Clamped circular plate with uniform pressure

Number of elements	$h/a = 0.01$		$h/a = 0.1$		$h/a = 0.2$	
	$M_{\theta\theta}$	V_n	$M_{\theta\theta}$	V_n	$M_{\theta\theta}$	V_n
	(0.03750)	(0.5000)	(0.03707)	(0.5000)	(0.03579)	(0.5000)
4	0.03398	0.4905	0.03661	0.4905	0.03570	0.4906
6	0.03720	0.4958	0.03685	0.4958	0.03589	0.4958
8	0.03730	0.4976	0.03695	0.4976	0.03596	0.4976
10	0.03736	0.4985	0.03701	0.4985	0.03599	0.4985

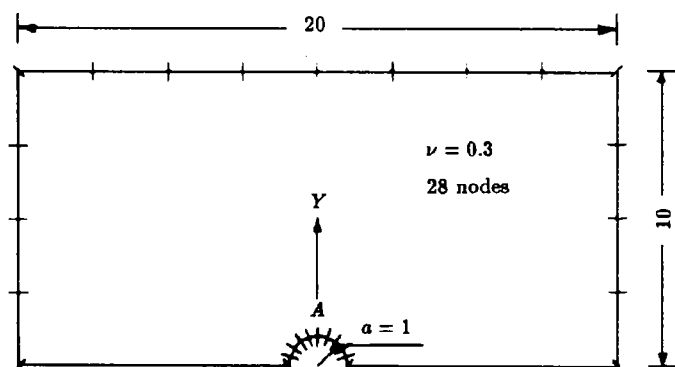
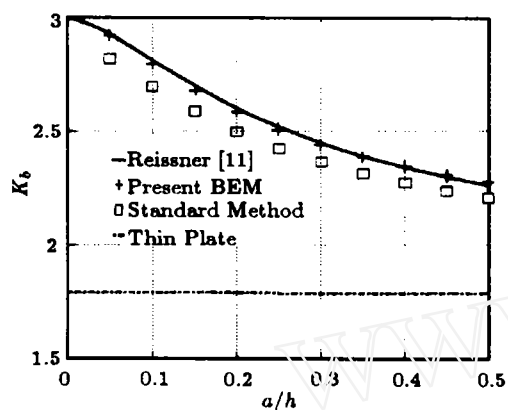
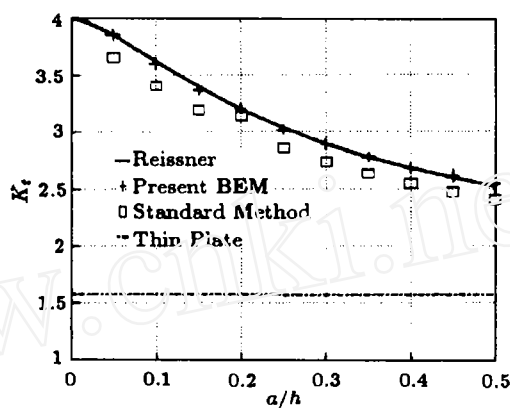
例 2 中厚板弯曲的应力集中

图 2 所示是一个含小圆孔的有限大矩形板. 因考虑几何形状和边界条件的对称性,仅取其一半划分网格, X 轴是对称轴. 用它近似表示含孔洞的无限大板在无穷远处受 X 方向弯矩 M_0 的作用. 图 2 中板边界划分为 26 个单元,其中半圆孔划分为 10 个单元. 首先边界广义位移由常规的边界元法求出,然后边界弯矩分量 M_{ss} 由本文方法导出. 受弯板的边界条件为

$$\begin{aligned} x = \pm 10, \quad M_{xx} = \pm M_0, \quad M_{xy} = 0, \quad V_x = 0 \\ y = 10, \quad M_{xy} = 0, \quad M_{yy} = 0, \quad V_y = 0 \\ r = 1, \quad M_{rr} = 0, \quad M_{r\theta} = 0, \quad V_n = 0 \end{aligned}$$

$$u_3(x = \pm 10, y = 10) = 0 \quad (34)$$

对于不同的圆孔半径和厚度比 (a/h) , 板 A 点处的弯曲应力集中因子 $K_b = M_{ss}/M_0$ 绘于图 3 中. 其中,标准方法解是由对广义位移差分法和边界广义面力推导出的. 同理利用上面问题的叠加还可以求得纯扭情况下的应力集中因子,因为纯扭可以看作是两垂直方向上的正反弯曲. 纯扭的应力集中因子 $K_t = M_{ss}/M_1$ (此处的 M_1 代表无穷远处的扭矩)绘于图 4 中.

图 2
Fig.2图 3
Fig.3图 4
Fig.4

6 结 论

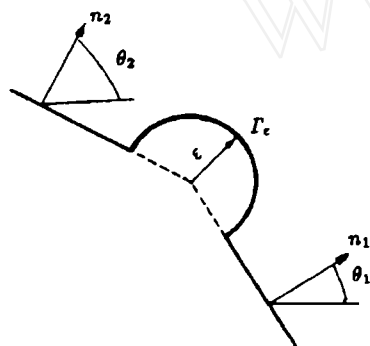
针对常规的边界元法中计算边界弯矩应力张量的困难, 本文建立了 Reissner 板一类新变量的边界积分方程. 结合常规的边界元方法, 边界弯矩应力张量和转动张量可直接由离散边界积分方程求出. 而不象常规的边界元方法计算边界弯矩应力张量要通过对广义位移微商或差分才能得到. 与以往边界元领域中计算边界应力张量的各种方法相比较, 本文工作有两个重要的特点: 其一是边界积分方程 (22) 中的两个核函数的奇异性阶次与常规的边界积分方程中的完全一致, 即分别为 $\ln r$ 和 $1/r$ 阶. 其二是离散方程中含 $1/r$ 阶的奇异积分项可通过刚体位移的方法很方便地求出. 这两点表明本文的数值离散、程序设计与常规的边界元法完全相似, 只需在单元一级进行修改即可.

本文理论适合于应力集中、断裂、接触等问题.

参 考 文 献

- 1 Van der Weeen F. Application of the boundary integral equation method to Reissner's plate model. *Int. J. for numerical method in engineering*, 1982, 18: 1-10
- 2 Lei Xiaoyan, Huang Maokuang, Wang Xiuxi. Geometrically nonlinear analysis of a Reissner type plate by the boundary element method, *Computers & Structures*, 1990, 37(6): 911-916
- 3 雷小燕. 解 Reissner 板弯曲问题的一个新的边界元法, *工程力学*, 1985, 2(4): 1-11
- 4 Lei Xiaoyan. A development of BEM to two dimensional elasticity, *ACTA Mechanica Solida Sinica*, Published by HUST, Wuhan, China, 1994, 7(1): 87-96
- 5 Cruse TA, Vanburen W. Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. *Int. J. Fracture Mechanics*, 1971, 7: 1-15
- 6 Ghosh N, Rajiyah H, Ghosh S, Mukherjee S. A new boundary element method formulation for linear elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 1986, 53: 69-76
- 7 Okada H, Rajiyah H, Atluri SN. A novel displacement gradient boundary element method for elastic stress analysis with high accuracy. *J Appl Mech ASME*, 1988, 55: 786-794
- 8 Hörmander H. *Linear Partial Differential Operators*. Springer Verlag, Berlin, 1963
- 9 Lei Xiaoyan, Huang Maokuang. Boundary element method for shallow spherical shell bending problems involving shear deformation. *Boundary element methods in engineering*, 9th. *Int. Conf. on BEM*, Sept. 1987: 69-79
- 10 雷小燕, 黄茂光. 中厚扁球壳边界积分方程解. *固体力学学报*, 1988(4): 351-355
- 11 Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, A69, 1945, 12

附录 I

图 A
Fig. A

在边界积分方程 (22) 中, 当源点 ξ 趋于边界时, 假设该边界点具有不连续的边界法向 (如图 A) 在 ξ 点附近取半径为 ϵ 的小圆环边界 Γ_ϵ , 则边界 Γ 由 Γ_ϵ 和 $\Gamma - \Gamma_\epsilon$ 构成. 当 ϵ 趋于零时, 由于 $T_{ik}(\xi, \chi)$ 中含 $1/r$ 阶奇异性, (22) 式中存在哥西主值意义下的积分. 这时取边界角点系数

$$[\bar{C}_{i\alpha}, \bar{C}_{i3}] = [C_{i\alpha}, C_{i3}] + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \left[\frac{1}{\nu} T_{i\alpha}(\xi, \chi), T_{i3}(\xi, \chi) \right] d\Gamma(\chi) \quad (1.1)$$

当沿小圆环边界 Γ_ϵ 积分时, 存在关系式

$$r_{,i} = n_i, \quad r_{,k} t_k = 0 \quad (1.2)$$

故方程 (1.1) 可写成为

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_{\alpha\beta} &= C_{\alpha\beta} + \frac{1}{8\pi\nu} \int_{\theta_1 - \pi/2}^{\theta_2 + \pi/2} [-2(1+3\nu)n_\alpha t_\beta - 2(1-\nu)n_\beta t_\alpha] d\theta \\ \bar{C}_{3\alpha} &= \bar{C}_{\alpha 3} = 0 \\ \bar{C}_{33} &= C_{33} + \frac{1}{2\pi} (\pi + \theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

不难验证在光滑边界时 $\theta_1 = \theta_2$, 这时的 $\bar{C}_{ij}$ 为

$$[\bar{C}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

所以当源点 ξ 位于边界时, 边界积分方程 (22) 中的 C_{ij} 应由 $\bar{C}_{ij}$ 代替. 另一方面 $\bar{C}_{ij}$ 也可以由刚体位移的方法导出. 由应力自由, 方程 (22) 式为

$$\bar{C}_{ij}u_j(\xi) + \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{\nu} T_{i\alpha}(\xi, \chi) u_{\alpha}(\chi) + T_{i3}(\xi, \chi) u_3(\chi) \right] d\Gamma(\chi) = 0 \quad (1.5)$$

将三组位移解 $[1, 0, x_1(\xi) - x_1(\chi)]$, $[0, 1, x_2(\xi) - x_2(\chi)]$ 和 $[0, 0, 1]$ 代入到方程 (1.5) 中, 可得

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_{i\alpha}(\xi) &= - \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{\nu} T_{i\alpha}(\xi, \chi) + (x_{\alpha}(\xi) - x_{\alpha}(\chi)) T_{i3}(\xi, \chi) \right] d\Gamma(\chi) \\ \bar{C}_{i3}(\xi) &= - \int_{\Gamma} T_{i3}(\xi, \chi) d\Gamma(\chi) \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

A NEW BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR REISSNER'S PLATE WITH NEW BOUNDARY VALUES

Lei Xiaoyan Huang Maokuang

(Dept. of Mechanics, Univ. of Sci. & Tech. of China,
Hefei 230026, China)

Abstract A new boundary element formulation for Reissner's plate bending is presented. This form of BEM has an advantage in that the bending stresses on the boundary can be calculated directly from the numerical solution, and avoids the use of tangential derivatives of displacement to find plate bending stresses on the boundary. The effectiveness of the approach is also discussed through some test examples. In the present BEM formulation, the singular orders of the two kernels are same as that in the standard BEM formulation of Reissner's type plate-one of which is logarithmic singular and the other is $1/r$ singular.

Key words Reissner plate, BEM approach, boundary bending stress tensor