

集中力拉伸作用下的不可压缩橡胶类锥体¹⁾

刘 波

(河北工业大学动力系, 天津 300132)

高玉臣

(北方交通大学工程力学所, 北京 100044)

摘要 分析了受集中力拉伸作用下不可压缩橡胶类锥体尖端附近的应力分布及形变行为. 给出了锥体尖端应力场的渐近解, 当锥角为 180° 时, 即为非线性的 Boussinesq 问题的解.

关键词 大变形, 非线性, 橡胶类材料, 奇异性

引 言

物体受集中力作用是弹性理论中一个典型而又重要的问题. Michell^[1] 解决了二维区域的集中力问题, Boussinesq^[2] 解决了三维问题, 即半空间受集中力作用的问题. 所有集中力问题的解都具有奇异性, 尽管在特别靠近奇异点时奇异解不再适用, 但奇异解仍能反映出奇异点附近应力应变的本质特征. 一般工程材料, 小应变时就发生破坏, 线弹性理论已经足够, 而对于能承受大变形的橡胶类材料, 则必须考虑到几何非线性. 尤其是带有集中力的问题, 由于奇异点处应变是无限大的, 因而问题的解决就更加困难, 主要障碍在于: 1) 一般的本构方程当应变趋于无限大时常常变成不合理; 2) 要给出适当方法来描述非线性几何关系; 3) 构造尖端场的模式. Gao^[3] 给出了在无限大应变时仍能适用的本构方程, 而且应力被分解为偏应力及静水应力两个部分. 应用该本构方程, Gao^[3] 分析了平面应变情况下橡胶类材料 I 型裂纹的尖端场, 随后 Gao 和 Durban^[4] 又给出了平面应力情况下同样问题的严格数学解. 在集中力方面, Gao^[5] 用该本构方程分析了在线集中力拉伸作用下橡胶尖劈顶端的应力分布及形变行为, 并且得到一新的变形模式, 进而 Gao 和 Gao^[6] 又分析了受集中力压缩作用下的同样问题. 必须指出的是, 橡胶类尖劈在受拉与受压两种不同情况下, 其尖端的变形模式完全不同. 本文将分析不可压缩橡胶类材料的锥体在受集中力拉伸作用时其尖端附近的应力分布及形变行为. 分析过程中, 设锥体是旋转体, 并且是轴对称变形.

1 基本关系及公式

首先考虑一个三维区域. 设 P, p 为变形前后物质点的位置向量, $X^i (i = 1, 2, 3)$

¹⁾ 国家自然科学基金资助课题.

1994-01-03 收到第一稿, 1994-03-23 收到修改稿.

为 Lagrangian 坐标, 我们引进局部标架

$$\mathbf{P}_i = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^i}, \quad \mathbf{p}_i = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^i} \quad (1)$$

定义变形梯度

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{P}^i \quad (2)$$

其中包含求和约定, $\mathbf{P}^i$ 为 $\mathbf{P}_i$ 的逆变基, $\otimes$ 为并矢记号. Green 和 Cauchy 变形张量 $\mathbf{D}$, $\mathbf{d}$ 分别为

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (3)$$

其中, T 表示转置. 可以证明 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{d}$ 具有相同的不变量.

在文 [3] 中, Gao 给出了一新的应变能函数形式

$$\mathbf{W} = A[(I/K^{1/3})^n - 3^n] + B(K-1)^m K^{-q} \quad (4)$$

式中

$$I = \mathbf{D} : \mathbf{E}, \quad K^{1/2} = [\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3] / [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3] \quad (5)$$

$\mathbf{E}$ 为单位张量, $[\]$ 代表括号中三个向量的混合积, A, B, m, q, n 为非负材料常数. 对于不可压缩材料, 我们有约束条件

$$K \equiv 1 \quad (6)$$

此时, (4) 成为

$$\mathbf{W} = A(I^n - 3^n) \quad (7)$$

由应变能函数 $\mathbf{W}$ 及约束条件 (6) 可以得到 Kirchhoff 应力

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{D}} = 2nA(I^{n-1} \mathbf{E} + s \mathbf{D}^{-1}) \quad (8)$$

于是 Cauchy 应力为

$$\boldsymbol{\tau} = 2nA[I^{n-1} \mathbf{d} + s \mathbf{E}] \quad (9)$$

其中, s 为未知函数, 由平衡方程确定. 平衡方程为

$$\left(\mathbf{P}^i \frac{\partial}{\partial X^i} \right) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (10)$$

2 变形模式

图 1(a), 图 1(b) 分别为受集中力 $\mathcal{F}$ 拉伸作用前后的锥体.

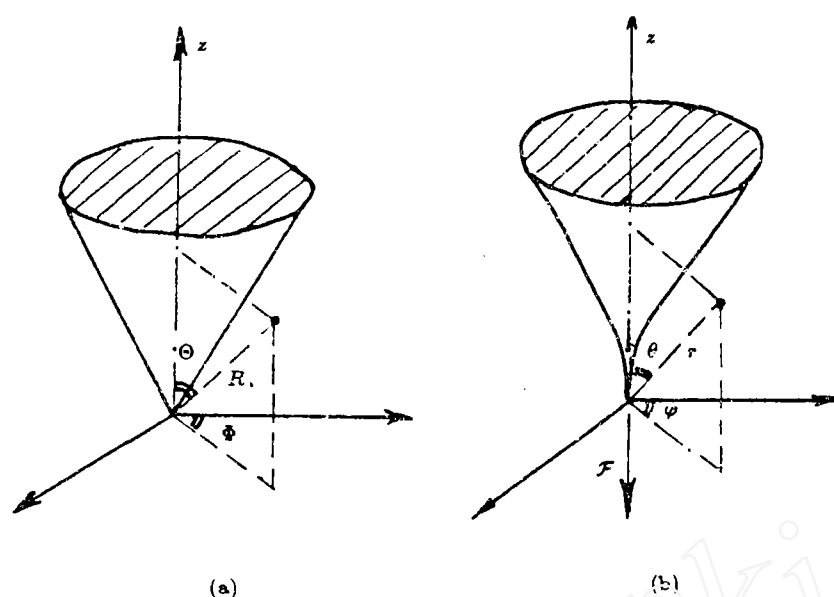


图 1 变形及坐标

Fig.1 Coordinate and deformation pattern

设锥体是旋转体, 对称于 z 轴, 形变也对称于 z 轴. 设受力前锥角为 $2\theta_0$, 如图 1(a) 所示. 引入两个 Lagrangian 坐标 (R, θ, ϕ) , (r, θ, ϕ) , 前者为变形前球坐标, 后者为变形后球坐标, 如图 1 所示. 假设受力后锥尖附近变得非常尖细, 我们用如下公式来描述这种变形

$$\left. \begin{aligned} R &= r^{1+\beta} f(\zeta) \\ \theta &= g(\zeta), \quad \zeta = \theta/r^\alpha \\ \phi &= \varphi \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中, α, β 为待定常数, f, g 为未知函数. 令

$$P_R = \frac{\partial P}{\partial R}, \quad P_\theta = \frac{\partial P}{\partial \theta}, \quad P_\phi = \frac{\partial P}{\partial \phi} \quad (12)$$

$$P_r = \frac{\partial P}{\partial r}, \quad P_\theta = \frac{\partial P}{\partial \theta}, \quad P_\varphi = \frac{\partial P}{\partial \varphi} \quad (13)$$

$$p_r = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad p_\theta = \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad (14)$$

$$e_R = P_R, \quad e_\theta = \frac{1}{R} P_\theta, \quad e_\phi = \frac{P_\phi}{R \sin \phi} \quad (15)$$

$$e_r = p_r, \quad e_\theta = \frac{1}{r} p_\theta, \quad e_\varphi = \frac{p_\varphi}{r \sin \varphi} \quad (16)$$

由 (13), (11), (12) 和 (15), 得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}_r &= r^\beta \{e_R[(1+\beta)f - \alpha\zeta\dot{f}] - e_\theta\alpha\zeta f\dot{g}\} \\ \mathbf{P}_\theta &= r^{1+\beta-\alpha} [e_R\dot{f} + e_\theta f\dot{g}] \\ \mathbf{P}_\varphi &= r^{1+\beta} f \sin g \cdot e_\phi \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

由 (17) 得其逆变基为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}^r &= \frac{1}{V} r^{-\beta} (e_R f \dot{g} - e_\theta \dot{f}) \\ \mathbf{P}^\theta &= \frac{1}{V} r^{\alpha-\beta-1} \{e_R \alpha \zeta f \dot{g} + [(1+\beta)f - \alpha\zeta\dot{f}] e_\theta\} \\ \mathbf{P}^\varphi &= \frac{r^{-1-\beta}}{f \sin g} \cdot e_\phi \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中

$$V = (1+\beta)f^2\dot{g} \quad (19)$$

根据 (2), (3), (14), (16), (11) 及 (18), 我们得 Cauchy 应变为

$$\begin{aligned} \mathbf{d} = & V^{-2} r^{-2\beta} \{e_r \otimes e_r \\ & + V^{-2} r^{2\alpha-2\beta} \{\alpha^2 \zeta^2 f^2 \dot{g}^2 + [(1+\beta)f - \alpha\zeta\dot{f}]^2\} e_\theta \otimes e_\theta \\ & + V^{-2} r^{\alpha-2\beta} \{\alpha\zeta f^2 \dot{g}^2 - \dot{f}[(1+\beta)f - \alpha\zeta\dot{f}]\} (e_r \otimes e_\theta \\ & + e_\theta \otimes e_r) + r^{2\alpha-2\beta} \cdot \frac{\zeta^2}{f^2 \sin^2 g} e_\varphi \otimes e_\varphi \end{aligned} \quad (20)$$

式中

$$U = \dot{f}^2 + f^2 \dot{g}^2 \quad (21)$$

由 (5), (12)–(18) 和 (20), 得

$$I = r^{-2\beta} V^{-2} U, \quad K = r^{4\alpha-6\beta} V^{-2} Q^2 \quad (22)$$

式中

$$Q = \frac{\zeta}{f \sin g} \quad (23)$$

对不可压缩材料, 由 (6), (19) 及 (22), 我们得到

$$\alpha = \frac{3}{2}\beta \quad (24)$$

$$(1+\beta)f^3 = \frac{\zeta}{\dot{g} \sin g} \quad (25)$$

由 (9), (20) 和 (22), 得到

$$\boldsymbol{\tau} = 2nAr^{-\lambda} [(V^{-2}U)^{n-1} \bar{\mathbf{d}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* E] \quad (26)$$

式中

$$\lambda = 2\beta n \quad (27)$$

$$\bar{\mathbf{d}} = r^{2\beta} \mathbf{d} \quad (28)$$

$$\bar{\sigma}^* = r^{2\beta n} s \quad (29)$$

根据集中力 $\mathcal{F}$ 的值为有限的要求, 我们可以得到

$$\tau^{rr} \sim r^{-2(1+\alpha)} \quad (30)$$

因此, 由 (26), (27), (30) 及 (24), 得到

$$\left. \begin{aligned} \lambda = 2\beta n = 2(1+\alpha) &= \frac{4n}{2n-3} \\ \alpha &= \frac{3}{2n-3} \\ \beta &= \frac{2}{2n-3} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

平衡方程为

$$\left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (32)$$

3 坐标变换

为了更清楚认识锥尖附近形变的特征, 我们引入一新的正交坐标系 (η, ζ, φ) 来描述受力后的锥体, 它与 (r, θ, φ) 的关系为

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \theta / r^\alpha \\ \eta &= r \left(1 + \frac{\alpha}{2} \theta^2 + \frac{\alpha^2}{4} \theta^4 + \frac{\alpha^3}{48} \theta^6 + \dots \right) \\ \varphi &= \varphi \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

可以证明 (η, ζ, φ) 为正交坐标系.

从截面 $\varphi = \text{const}$ 看到的 η, ζ 坐标线如图 2 所示. 由于在锥尖附近 θ 非常小, 所以我们有近似的反变换

$$\left. \begin{aligned} r &= \eta \left[1 - \frac{\alpha}{2} (\zeta \eta^\alpha)^2 \right] \\ \theta &= \zeta \eta^\alpha \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

由 (34), 有

$$\mathbf{p}_\eta = \mathbf{e}_r + \alpha \theta \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{p}_\zeta = \eta^{1+\alpha} (-\alpha \theta \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta) \quad (35)$$

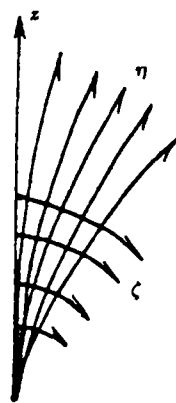


图 2 η, ζ 坐标
Fig.2 η, ζ coordinate

进而得

$$\mathbf{p}^\eta = \mathbf{p}_\eta, \quad \mathbf{p}^\zeta = \eta^{-2-2\alpha} \mathbf{p}_\zeta \quad (36)$$

$$\mathbf{e}_\eta = \mathbf{e}_r + \alpha\theta\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{e}_\zeta = -\alpha\theta\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \quad (37)$$

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\eta - \alpha\zeta\eta^\alpha\mathbf{e}_\zeta, \quad \mathbf{e}_\theta = \alpha\zeta\eta^\alpha\mathbf{e}_\eta + \mathbf{e}_\zeta \quad (38)$$

将 (38), (34) 代入 (20), 我们得到

$$\begin{aligned} \mathbf{d} = & \eta^{-2\beta} V^{-2} [U\mathbf{e}_\eta \otimes \mathbf{e}_\eta - \eta^\alpha(1+\beta)f\dot{f}(\mathbf{e}_\zeta \otimes \mathbf{e}_\eta + \mathbf{e}_\eta \otimes \mathbf{e}_\zeta) \\ & + \eta^{2\alpha}(1+\beta)^2 f^2 \mathbf{e}_\zeta \otimes \mathbf{e}_\zeta] + \eta^{2\alpha-2\beta} Q^2 \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (39)$$

根据 (39), (34), (28) 和 (26), 得到 (η, ζ, φ) 坐标下 Cauchy 应力的分量为

$$\left. \begin{aligned} \tau^{\eta\eta} &= 2nA\eta^{-\lambda}[(V^{-2}U)^n + \dot{\sigma}] \\ \tau^{\zeta\zeta} &= 2nA\eta^{-\lambda}[\eta^{2\alpha}V^{-2n}U^{n-1}(1+\beta)^2 f^2 + \dot{\sigma}] \\ \tau^{\varphi\varphi} &= 2nA\eta^{-\lambda}[\eta^{2\alpha}(V^{-2}U)^{n-1}Q^2 + \dot{\sigma}] \\ \tau^{\zeta\eta} &= -2nA\eta^{\alpha-\lambda}V^{-2n}U^{n-1}(1+\beta)f\dot{f} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

4 平衡方程及问题的解

在 (η, ζ, φ) 坐标下, 由 (10) 知平衡方程可写为

$$\left(\mathbf{p}^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \mathbf{p}^\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + \mathbf{p}^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (41)$$

为了得到平衡方程的最终形式, 我们需要下列关系式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_\eta}{\partial \eta} &= \alpha(1+\alpha)\zeta\eta^{\alpha-1}\mathbf{e}_\zeta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\eta}{\partial \zeta} = (1+\alpha)\eta^\alpha\mathbf{e}_\zeta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\zeta}{\partial \eta} &= -\alpha(1+\alpha)\zeta\eta^{\alpha-1}\mathbf{e}_\eta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\zeta}{\partial \zeta} = -(1+\alpha)\eta^\alpha\mathbf{e}_\eta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \zeta} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\eta}{\partial \varphi} &= (1+\alpha)\zeta\eta^\alpha\mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\zeta}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_\zeta - (1+\alpha)\zeta\eta^\alpha\mathbf{e}_\eta \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

根据 (36), (37), (42) 和 (41), 我们得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau^{\eta\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta^{\alpha+1}} \cdot \frac{\partial \tau^{\zeta\eta}}{\partial \zeta} + \frac{2(1+\alpha)\tau^{\eta\eta} - (1+\alpha)(\tau^{\zeta\zeta} + \tau^{\varphi\varphi})}{\eta} + \frac{1}{\eta^{\alpha+1}} \cdot \frac{\tau^{\zeta\eta}}{\zeta} &= 0 \\ \frac{\partial \tau^{\zeta\zeta}}{\partial \zeta} + \frac{\tau^{\zeta\zeta} - \tau^{\varphi\varphi}}{\zeta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

注意到 (40) 及 (31), 于是 (43) 进一步可写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT^{\zeta\eta}}{d\zeta} + \frac{T^{\zeta\eta}}{\zeta} - (1+\alpha)(T^{\zeta\zeta} + T^{\varphi\varphi}) &= 0 \\ \frac{dT^{\zeta\zeta}}{d\zeta} + \frac{1}{\zeta}(T^{\zeta\zeta} - T^{\varphi\varphi}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} T^{\eta\eta} &= 2nA[(V^{-2}U)^n + \dot{\sigma}^*] \\ T^{\zeta\zeta} &= T^{\varphi\varphi} = 2nA\dot{\sigma}^* \\ T^{\zeta\eta} &= -2nA(1+\beta)f\dot{f}V^{-2n}U^{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

(44) 的边界条件为

$$T^{\zeta\zeta} = T^{\zeta\eta} = 0, \quad \text{当 } \theta = \theta_0 \text{ 时} \quad (46)$$

由 (45), (44) 和 (46), 得到

$$T^{\zeta\eta} \equiv 0, \quad T^{\zeta\zeta} \equiv 0 \quad (47)$$

根据 (47), (45), (19), (21) 和 (25), 则有

$$f = f_0 = \text{const} \quad (48)$$

$$\frac{\dot{g} \sin g}{\zeta} = \frac{f_0^{-3}}{(1+\beta)} = H = \text{const} \quad (49)$$

$$U = f_0^2 \dot{g}^2, \quad V = (1+\beta)f_0^2 \dot{g} \quad (50)$$

将 (50) 代入 (45) 第一式, 则有

$$T^{\eta\eta} = 2nA[(1+\beta)f_0]^{-2n} \quad (51)$$

现计算作用在锥体上的力 $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = 2\pi \int (\tau^{rr} \cos \theta - \tau^{r\theta} \sin \theta) r^2 \theta d\theta = 2\pi T^{\eta\eta} \int \zeta d\zeta \quad (52)$$

根据 (49) 可将 (52) 化为

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{H} T^{\eta\eta} \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta = \frac{2\pi}{H} T^{\eta\eta} (1 - \cos \theta_0) \quad (53)$$

将 (49), (51) 代入 (53), 可解得

$$f_0 = \left[\frac{\mathcal{F}}{4\pi An(1 - \cos \theta_0)} \right]^{-\beta/2} (1+\beta)^{-(1+\beta)} \quad (54)$$

由 (49), (54) 可得

$$\cos g = 1 - \frac{\zeta^2}{2} \cdot \left[\frac{\mathcal{F}}{4\pi An(1 - \cos \theta_0)} \right]^\alpha (1+\beta)^{2(1+\alpha)} \quad (55)$$

而 ζ 的最大值为

$$\zeta_0 = \sqrt{2} \cdot (1+\beta)^{-(1+\alpha)} \left[\frac{\mathcal{F}}{4\pi An} \right]^{-\alpha/2} (1 - \cos \theta_0)^{(1+\alpha)/2} \quad (56)$$

5 讨论及结论

在集中力拉伸作用下, 橡胶锥体的锥尖将变得十分尖细, 尖端附近处于单向拉伸应力状态, 即 $\tau^{rr} \sim r^{-2(1+\alpha)}$, $\tau^{r\theta} \sim \tau^{\theta\theta} \sim 0$, 类似于小变形情况, 即 $\tau^{rr} \sim r^{-1}$, $\tau^{r\theta} =$

$\tau^{\theta\theta} = 0$. 两者不同的是: 前者为了承受外载必须产生大变形.

本文所分析的是一旋转锥体, 受集中力沿锥体对称轴的拉伸作用. 但我们预料: 任意形状的锥体 (图 3 所示) 在受集中力拉伸作用下, 其锥尖周围的应力应变行为仍然是这个结果, 即 $f = f_0 = \text{const.}$ 对任意形状锥体, 我们可设形变关系为

$$\left. \begin{aligned} R &= r^{1+\beta} f(\zeta, \varphi) \\ \Theta &= g(\zeta, \varphi), \quad \zeta = \theta/r^\alpha \\ \Phi &= h(\zeta, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

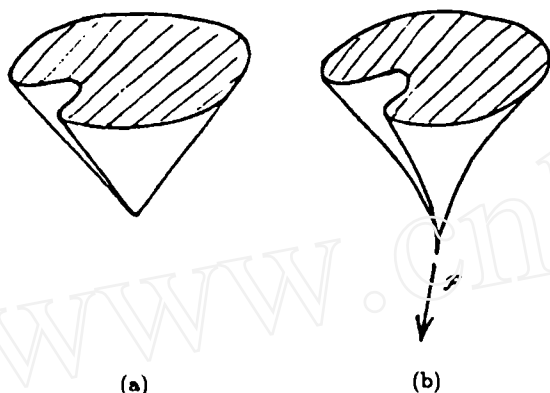


图 3 非旋转锥

Fig.3 The case of non-revolution cone

严格的理论分析甚为复杂, 但我们预料在满足平衡方程和边界条件时必然会有

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} \equiv 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} \equiv 0 \quad (58)$$

即 $f = f_0 = \text{const.}$ 此时仍然为单向拉伸应力状态.

当锥体受集中力压缩作用时, 其形变行为将完全不同于受拉情况, 该问题的分析将单独给出 [7].

参 考 文 献

- 1 Michell JH. Proceedings of London Math. Society, 1902, 34: 134
- 2 Boussinesq J. Application des potentiels à l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris: 1885
- 3 Gao YC. Elastostatic crack tip behavior for a rubber-like material. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 1990, 14: 219-231
- 4 Gao YC, Durban D. The crack tip field in a rubber-sheet. to appear in *European J of Mechanics*, 1995(A)
- 5 Gao TS. A rubber wedge under the tension of a line load at its tip, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 318, Série II, 1994: 1-6
- 6 Gao TS, Gao YC. A rubber wedge under the compression of a line load. *Int. J. Solids & Structures*, 1994, 31: 17, 2393-2406
- 7 Liu B, Gao YC. A rubber cone under the compression of a concentrated force. *Int. J. Solids & Structures*, 1995, 32(11): 1485-1493

A INCOMPRESSIBLE RUBBER CONE UNDER THE TENSION OF CONCENTRATED FORCE

Liu Bo

(*Department of Power Mechanical Engineering,
Hebei University of Technology, Tianjin 300132, China*)

Gao Yuchen

(*Institute of Mechanics, Northern Jiaotong University, Beijing 100044, China*)

Abstract This paper analyses the stress distribution and the deformation pattern near the apex of a incompressible rubber cone that is under the tension of a concentrated force. The asymptotic mathematical solution to the stress field near the apex of the cone is presented, when the cone angle is 180° , it turned out to be the non-linear Boussinesq's problem.

Key words large deformation, non-linear, rubber-like material, singularity