

可压缩流体中封闭薄球壳的自由振动¹⁾

丁皓江 陈伟球

(浙江大学力学系, 杭州 310027)

摘要 通过引入位移函数, 成功地研究了薄球壳在可压缩流体中的自由振动. 发现存在两类自由振动: 第一类与外界流体无关; 第二类则受到流体性质的影响. 证明了第二类振动的频率方程具有多项式形式并只存在复频率 (除 $n=1$ 时有 $\Omega=0$). 求解 $n=0, 1$ 和 2 时的频率方程, 并讨论参数的影响及给出根轨迹图. 最后就小阻尼系数法作了对比分析.

关键词 封闭薄球壳, 位移函数, 可压缩流体, 自由振动, 根轨迹图

引 言

关于球壳与周围介质的耦合振动问题, 因其广阔的工程背景, 一直备受关注. 1954 年 Junger^[1] 首先考虑浸没于可压缩流体中的薄球壳的自由振动及相关的声散射问题. Hayek^[2] 利用 Lagrange 方程研究了声介质中球壳的轴对称无扭转振动且给出了薄球壳在可压缩流体中受集中谐和力作用的动态位移响应. Lou 等^[3] 指出在忽略流体粘性的情况下, 薄球壳在流体中自由振动的衰减仅由于外界流体的可压缩性但并未给出严格证明; 针对浸没于水中的钢球壳, 文 [3] 计算了具有小阻尼因子的自由振动频率. Carlos 等^[4] 通过对可压缩流体的波动方程作拉氏变换分析了流体对球壳的影响, 并给出了薄球壳作轴对称自由振动的频率方程及相应的若干根轨迹图. Su^[5] 采用边界层理论讨论了流体粘性对球壳自由振动的影响. 据作者所知, 已有的球壳与可压缩流体耦合振动的文献都只考虑轴对称情形. 而球壳在真空中的非轴对称自由振动已有较多研究^[6-8], 如文 [6] 利用适当的辅助变量, 将薄球壳的运动方程简化为二个非耦合的偏微分方程和一个部分耦合的偏微分方程, 并且给出具有连带 Legendre 函数形式的解.

本文从薄壳的 Kirchhoff 假设出发, 将中面位移 u, v 用另两个位移函数 ϕ 和 ψ 表示后, 可将可压缩流体中封闭薄球壳的自由振动分成二类. 其中第一类振动无径向位移发生, 如果不计流体的粘性则与外界流体无关; 第二类振动则受到流体的影响. 另外, 与文 [4] 有所不同, 本文不对波动方程作拉氏变换而直接利用球 Hankel 函数的 Rayleigh 表达式, 得到可压缩流体中封闭薄球壳第二类自由振动多项式形式的频率方程, 简化了计算工作. 给出 $n=0, 1$ 和 2 时频率方程的根轨迹图并讨论了参数的影响. 最后还就小阻尼系数法作了讨论.

¹⁾ 国家自然科学基金资助项目.

1994-05-17 收到.

1 基本方程和方法

采用球坐标系, 则球壳的几何关系如图 1 所示. 设中面位移为 u, v 和 w , 则根据 Kirchhoff 假设, 球壳几何方程为^[9]

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R}(u_{,\theta} + w), & \chi_\theta &= -\frac{1}{R^2}w_{,\theta\theta} \\ \varepsilon_\phi &= \frac{1}{R}(u\text{ctg}\theta + v_{,\phi}\csc\theta + w), & \chi_\phi &= -\frac{1}{R^2}(w_{,\phi\phi}\csc^2\theta + w_{,\theta}\text{ctg}\theta) \\ \gamma_{\theta\phi} &= \frac{1}{R}(u_{,\phi}\csc\theta + v_{,\theta} - v\text{ctg}\theta), & \chi_{\theta\phi} &= \frac{1}{R^2}(w_{,\phi}\text{ctg}\theta - w_{,\theta\phi})\csc\theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

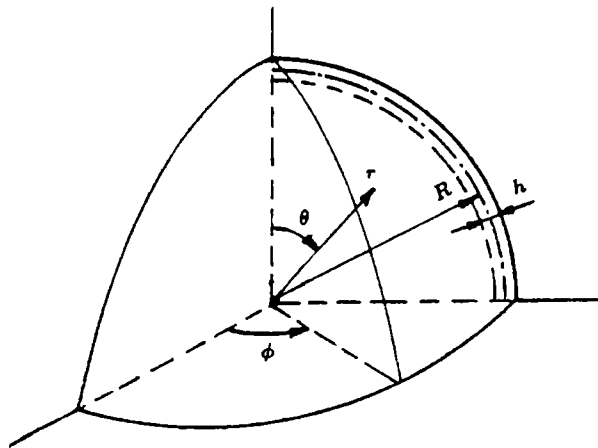


图 1 球壳几何示意图

Fig.1 Spherical shell geometry

其中逗号表示对所跟字母求偏导. 球壳在可压缩流体中的运动方程可由 Hamilton 原理导得, 即

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) dt = 0 \quad (2)$$

式中

$$T = \frac{1}{2} \rho h R^2 \iint (u_{,t}^2 + v_{,t}^2 + w_{,t}^2) \sin \theta d\theta d\phi \quad (3)$$

$$U = \frac{E h R^2}{24(1-\nu^2)} \iint \{ 6[2(\varepsilon_\theta + \varepsilon_\phi)^2 - (1-\nu)(4\varepsilon_\theta\varepsilon_\phi - \nu_{\theta\phi}^2)] + h^2[(\chi_\theta + \chi_\phi)^2 - 2(1-\nu)(\chi_\theta\chi_\phi - \chi_{\theta\phi}^2)] \} \sin \theta d\theta d\phi \quad (4)$$

$$W = -R^2 \iint P_f \cdot w \cdot \sin \theta d\theta d\phi \quad (5)$$

其中, T 和 U 分别表示壳体的动能和应变能, W 是外力作的功; t 表示时间, ρ, h, R, E 和 ν 分别是壳体的密度, 厚度, 中面半径, 杨氏模量和泊松比; P_f 是流体的液动压力, 当壳体以圆频率 ω 作谐振动, 可压缩流体作用于壳体表面的压力按下式计算^[2]

$$P_f = \rho_f \cdot \omega \cdot c_f h_n(kr) w \quad (r = R) \quad (6)$$

式中 ρ_f 是流体密度, c_f 是流体介质中的声速, k 是波数, 即

$$k = \omega/c_f \quad (7)$$

而 $h_n(x)$ 由下式定义

$$h_n(x) = \frac{h_n^{(2)}(x)}{\frac{d}{dx}[h_n^{(2)}(x)]} = \frac{xh_n^{(2)}(x)}{nh_n^{(2)}(x) - xh_{n+1}^{(2)}(x)} \quad (8)$$

式中 $h_n^{(2)}(x)$ 是 x 的第二种球 Hankel 函数.

将所需各式代入式 (2), 得如下微分方程组

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta,\theta} + N_{\theta\phi,\phi} \csc\theta + (N_\theta - N_\phi) \cot\theta + Q_\theta &= -\rho h R \omega^2 u \\ N_{\theta\phi,\theta} + N_{\phi,\phi} \csc\theta + 2N_{\theta\phi} \cot\theta + Q_\phi &= -\rho h R \omega^2 v \\ Q_{\theta,\theta} + Q_{\phi,\phi} \csc\theta - (N_\theta + N_\phi) + Q_\theta \cot\theta &= -\rho h R \omega^2 w + R P_f \\ M_{\theta,\theta} + M_{\theta\phi,\phi} \csc\theta + (M_\theta - M_\phi) \cot\theta - R Q_\theta &= 0 \\ M_{\theta\phi,\theta} + M_{\phi,\phi} \csc\theta + 2M_{\theta\phi} \cot\theta - R Q_\phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= \frac{Et^*}{1-\nu^2} [u_{,\theta} + w + \nu(v_{,\phi} \csc\theta + u \cot\theta + w)] \\ N_\phi &= \frac{Et^*}{1-\nu^2} [\nu(u_{,\theta} + w) + v_{,\phi} \csc\theta + u \cot\theta + w] \\ N_{\theta\phi} &= \frac{Et^*}{2(1+\nu)} (v_{,\theta} - v \cot\theta + u_{,\phi} \csc\theta) \\ M_\theta &= \frac{Et^{*2}h}{12(1-\nu^2)} [-w_{,\theta\theta} - \nu(w_{,\phi\phi} \csc^2\theta + w_{,\theta} \cot\theta)] \\ M_\phi &= \frac{Et^{*2}h}{12(1-\nu^2)} [-\nu w_{,\theta\theta} - (w_{,\phi\phi} \csc^2\theta + w_{,\theta} \cot\theta)] \\ M_{\theta\phi} &= \frac{Et^{*2}h}{12(1+\nu)} (w_{,\phi} \cot\theta - w_{,\theta\phi}) \csc\theta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中 $t^* = h/R$. 式 (9) 即是薄球壳在可压缩流体中作自由振动的运动方程.

引进两个位移函数 Φ 及 Ψ , 设

$$u = \Phi_{,\theta} - \Psi R \sin\theta, \quad v = \Phi_{,\phi} \csc\theta \quad (11)$$

将式 (11) 代入式 (10) 再代入式 (9) 前三式, 其中 Q_θ , Q_ϕ 预先用式 (9) 后两式将其消去, 不难得到

$$(\nabla^2 + \Omega^2 + 2)\Psi = 0 \quad (12)$$

$$(\nabla^2 + \alpha_1)\Phi + (\alpha_2 \nabla^2 + \alpha_3)w = 2\Psi R \cos\theta + \frac{1+\nu}{2} \Psi_{,\theta} R \sin\theta \quad (13)$$

$$\nabla^2 \Phi + (\alpha_4 \nabla^4 + \alpha_5 \nabla^2 + \alpha_6)w = 2\Psi R \cos\theta + \Psi_{,\theta} R \sin\theta \quad (14)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \cdot \csc^2 \theta \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= k_1(\Omega^2 + 2), & \alpha_2 &= -t^{*2}/12 \\ \alpha_3 &= 1 + \nu + 2k_1\alpha_2, & \alpha_4 &= -\alpha_2/(1 + \nu) \\ \alpha_5 &= -2k_2\alpha_2, & \alpha_6 &= 2 - k_2\Omega^2 + k_2k_3\Omega h_n(\Omega/c_0) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= R\omega/v_2, & v_2^2 &= E/[2(1 + \nu)\rho] \\ \rho_0 &= \rho_f/\rho, & c_0 &= c_f/v_2 \\ k_1 &= (1 - \nu)/2, & k_2 &= k_1/(c + \nu), & k_3 &= \rho_0 c_0/t^* \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

显然, 式 (12) 是关于 ψ 的齐次偏微分方程, 此时无径向位移, 称与之对应的振动为第一类振动; 而式 (13) 和 (14) 则是关于 ϕ 和 w 的联立的偏微分方程组, 且右端项还包含有 ψ . 事实上, 从式 (13) 和 (14) 并利用式 (12) 可巧妙地消去 ϕ 和 ψ , 从而得到一个仅关于 w 的六阶齐次偏微分方程

$$[\alpha_4 \nabla^6 + (\alpha_5 + \alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2) \nabla^4 + (\alpha_6 + \alpha_1 \alpha_5 - \alpha_3) \nabla^2 + \alpha_1 \alpha_6] w = 0 \quad (18)$$

虽然式 (18) 仅与 w 有关, 但从式 (13) 和 (14) 可知, 此时仍有 ϕ 不等于零, 与之对应的振动则称作第二类振动.

2 频率方程及讨论

对于整球壳, 由式 (12) 和 (18) 观察可知, w 和 ψ 具有如下形式的解

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} A_n S_n(\theta, \phi) e^{i\omega t}, \quad \psi = \sum_{n=0}^{\infty} B_n S_n(\theta, \phi) e^{i\omega t} \quad (19)$$

式中 $S_n(\theta, \phi) = p_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}$ 为球面谐函数, $p_n^m(x)$ 则是关于 x 的第一类连带的 Legendre 函数. A_n, B_n 为任意常数. 将上式代入式 (12) 和 (18), 即得二类自由振动的频率方程

$$\Omega^2 = (n-1)(n+2) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_4 n^3 (n+1)^3 - (\alpha_5 + \alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2) n^2 (n+1)^2 \\ & + (\alpha_6 + \alpha_1 \alpha_5 - \alpha_3) n (n+1) - \alpha_1 \alpha_6 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

可以看到, 第一类振动频率方程 (20) 中不含流体的任一参数, 且与文 [10] 给出的真空中薄球壳的第一类频率方程完全一致.

当 $n = 0$ 时球壳作纯径向振动, 对应所谓的“呼吸模态”, 此时式 (20) 失去意义, 只有第二类自由振动, 不难得到其频率方程为

$$\alpha_6 = 0 \quad (22)$$

将式 (22) 和 (21) 分别写成如下形式

$$F_1 C_0^2 x^2 - 2 = F_2 C_0 x h_0(x) \quad (n = 0) \quad (23)$$

$$F_3 C_0^4 x^4 + F_4 C_0^2 x^2 + F_5 = (F_6 C_0^2 x^2 + F_7) C_0 x h_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (24)$$

式中 $x = \Omega/C_0$, F_i 为无量纲参数, 即

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= k_2, \quad F_2 = k_2 k_3, \quad F_3 = k_1 k_2 \\ F_4 &= 2k_1 k_2 - k_2 n(n+1) - k_1 [\alpha_4 n^2(n+1)^2 - \alpha_5 n(n+1) + 2] \\ F_5 &= \alpha_4 n^3(n+1)^3 + (\alpha_2 - \alpha_5 - 2k_1 \alpha_4) n^2(n+1)^2 + (2 - \alpha_3 - 2k_1 \alpha_5) n(n+1) - 4k_1 \\ &= \alpha_4 (n-1)(n+2)[n(n+1)(n^2 + n + \nu - 1) + 2k_1/\alpha_4] \\ F_6 &= k_1 F_2, \quad F_7 = [2k_1 - n(n+1)] F_2 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

值得指出的是, 如令 $h_n(x) = 0$, 则式 (23) 和 (24) 即为相应于真空中球壳第二类振动频率方程; 且当壳很薄即 $t^* \ll 1$ 时, 略去 t^* 二次方以上项 (即令 $\alpha_2 = 0$), 此时所得真空中球壳第二类频率方程与文 [10] 所给相同. 如果流体可看作是“不可压缩的”, 那么只需将式 (23) 和 (24) 中的项 $C_0 h_n(x)$ 代之以 $-\Omega/(n+1)$ 即可 [5].

利用 Rayleigh 公式

$$h_n^{(2)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right)^n \frac{e^{-ix}}{x} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (26)$$

可将 $h_n^{(2)}(x)$ 写成如下形式

$$h_n^{(2)}(x) = \frac{A_n(x)}{x^{n+1}} e^{-ix} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (27)$$

式中 $A_n(x)$ 表示 x 的 n 次多项式. 利用式 (27), 由式 (8) 定义的函数 $h_n(x)$ 可表示为

$$h_n(x) = x A_n(x) / B_{n+1}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (28)$$

式中 $B_{n+1}(x)$ 为 $n+1$ 次多项式, 按下式计算

$$B_{n+1}(x) = n A_n(x) - A_{n+1}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (29)$$

于是方程 (23) 和 (24) 化为

$$C_3(x)/B_1(x) = 0 \quad (n = 0) \quad (30)$$

$$C_{n+5}(x)/B_{n+1}(x) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (31)$$

式中 $C_n(x)$ 表示 x 的 n 次多项式, 具体地有

$$C_3(x) = (F_1 C_0^2 x^2 - 2)B_1(x) - F_2 C_0 x^2 A_0(x) \quad (n=0) \quad (32)$$

$$C_{n+5}(x) = (F_3 C_0^4 x^4 + F_4 C_0^2 x^2 + F_5)B_{n+1}(x) - (F_6 C_0^2 x^2 + F_7)C_0 x^2 A_n(x) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (33)$$

可以证明 $C_3(x)$ 和 $B_1(x)$, $C_{n+5}(x)$ 和 $B_{n+1}(x)$ 都没有公共零点 (参看附录), 因而可得多项式频率方程

$$C_3(x) = 0 \quad (n=0) \quad (34)$$

$$C_{n+5}(x) = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (35)$$

而且除当 $n=1$ 时有 $x=0$ (即 $\Omega=0$) 并为二重根外, 式 (34) 和 (35) 的其它的根全为复根 (见附录). 事实上, 进一步可把方程 (34) 和 (35) 化为一元三次和一元 $n+5$ 次实系数代数方程 (见附录)

$$R_3(y) = C_0^2 F_1 y^3 - (C_0^2 F_1 + C_0 F_2) y^2 + 2y - 2 = 0 \quad (n=0) \quad (36)$$

$$R_{n+5}(y) = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (37)$$

式中 $y = -x \cdot i$.

和真空中自由振动情形一样, 代表球壳非轴对称振动的整数 m 不包含在频率方程中, 这一点 Silbiger 已给出合理的解释^[11].

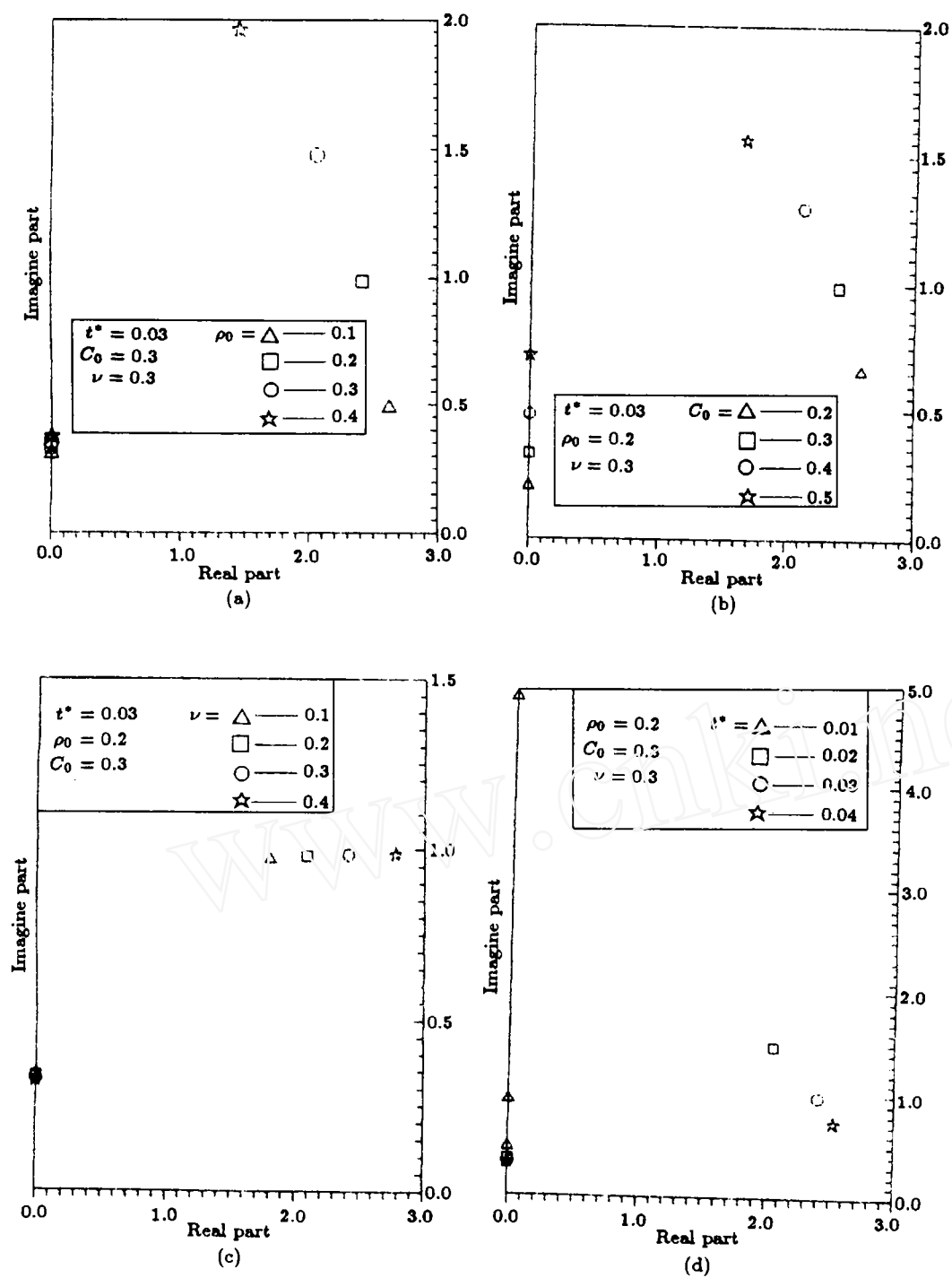
3 算例和分析

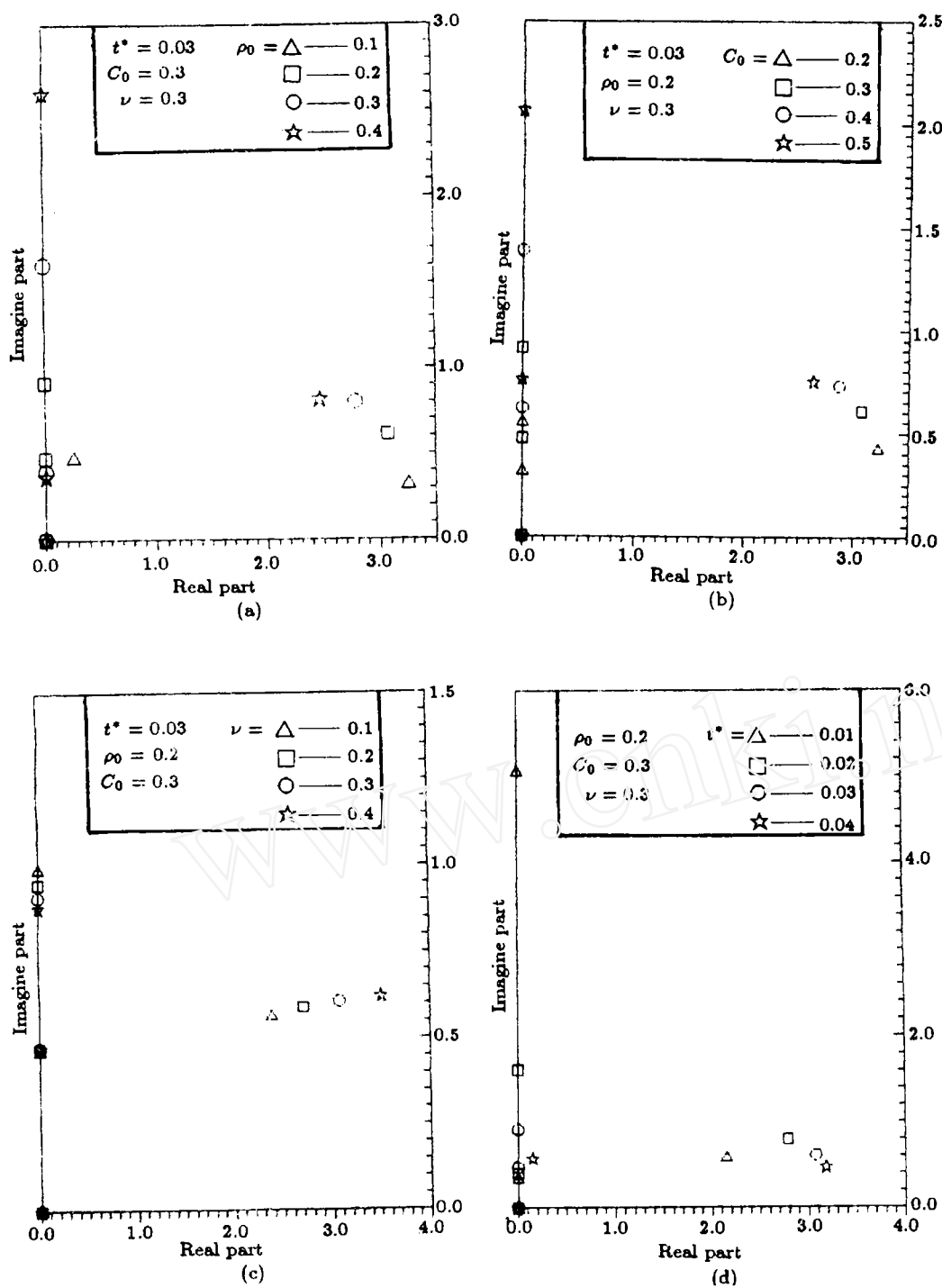
由于第一类频率方程 (20) 形式简单且与流体无关, 下面只考察第二类自由振动. 显然 Ω 和 ρ_0 , C_0 , ν 及 t^* 有关. 式 (36) 是一元三次代数方程, 其根可用系数表示; 求式 (37) 或 (35) 的根则利用 Laguerre 法^[12].

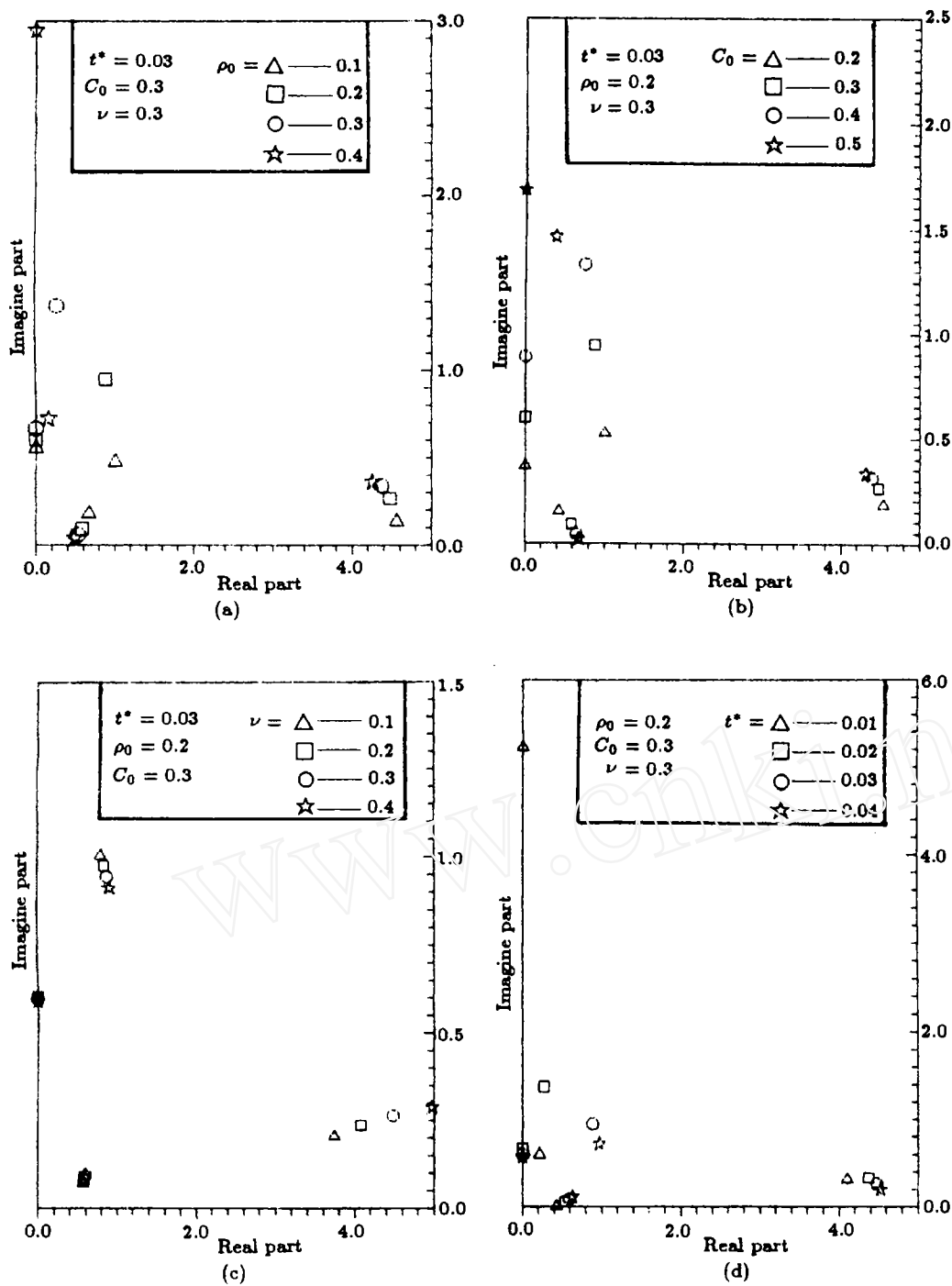
$n=0, 1$ 和 2 的根轨迹图分别示于图 2、3 和 4 中. 由代数方程理论可推知方程 (34) 和 (35) 的根要么为纯虚数, 要么成对地关于虚轴对称, 因而各图仅给出了 Ω 的实部大于等于零的部分.

当 $n=0$ 时, 频率方程 (34) 只有 3 个复根且根轨迹形状较为简单. 从图 2(a) 中可看到, 关于虚轴对称的那对根随 ρ_0 的增大而向上内收, 落在虚轴上的根则基本不变; 在图 2(b) 中, 关于虚轴对称的那对根随 C_0 的增长亦向上内收, 而纯虚根则明显沿虚轴上升; 在图 2(c) 中, 关于虚轴对称的那对根随 ν 的增大而呈外扩趋势, 而纯虚根基本保持不动; 在图 2(d) 中, 当 $t^* = 0.01$ 时方程 (34) 的三个根都是纯虚数, 在其它情形关于虚轴对称的那对根随 t^* 的增大而向下外扩, 纯虚根则随 t^* 增大而沿虚轴向下移动.

当 $n \geq 1$ 时, 频率方程的根数目 ≥ 6 , 根轨迹形状也随之复杂. 注意当 $n=1$ 时, 复平面原点总是方程的二重根. 从图 2、3 可以看出, 当不同的参数变化时, 根轨迹图大不相同. 虽然没有给出 $n > 2$ 时的根轨迹图, 计算表明同 $n=2$ 相似, 频率方程 (35) 至少有一对根实部绝对值较小, 虚部也较小, 这样的低阶频率具有较弱的衰减特性, 在实际工程中具有重要意义.

图 2 频率方程根轨迹图 ($n=0$)Fig.2 Root-loci plots for frequency equation ($n=0$)

图 3 频率方程根轨迹图 ($n=1$)Fig.3 Root-loci plots for frequency equation ($n=1$)

图 4 频率方程根轨迹图 ($n=2$)Fig.4 Root-loci plots for frequency equation ($n=2$)

4 关于小阻尼系数法

在文 [3,5] 中, 因没有得到多项式表示的频率方程, 认为可压缩流体中频率方程由于含有球 Hankel 函数而很难求得所有的根; 另一方面, 考虑到工程实际中设计人员一般仅对那些具有弱衰减特性的自由振动频率感兴趣, 因此建议采用小阻尼系数法来求所需频率, 即设

$$\Omega = \Omega^0(1 + i\varepsilon) \quad (38)$$

其中 $\Omega^0 \geq 0$, $0 \leq \varepsilon \ll 1$. 将式 (38) 代入频率方程, 利用 Taylor 展开, 略去 ε 的高阶项, 令其实部和虚部分别为零再消掉 ε 即可得到一个关于 Ω^0 的实系数频率方程, 用迭代法求解 Ω^0 , 然后再求解 ε , 详细过程见文 [3].

为了校验小阻尼系数法的可行性, 在表 1 中列出了流体参数不同时用小阻尼系数法计算的结果. 表中数据是依照具有弱的衰减特性同时实部尽可能小的原则计算的 (因工程中一般仅考虑最低阶频率), 还列出了用本文方法求得的相应的精确解, 以资比较.

表 1 小阻尼系数法同精确解的比较

Table 1 Comparison between small damping coefficient (SDC) method and present exact (PE) method

n		0	1	2	3	4
SDC	(1)	(2.506, 0.662)	(0, 0)	(0.494, 0.359)	(0.607, 0.231)	(0.738, 0.135)
	(2)	(2.586, 0.401)	(0, 0)	(0.930, 0.068)	(1.137, 0.029)	(1.275, 0.007)
PE	(1)	(2.591, 0.663)	(0, 0)	(0.433, 0.159)	(0.599, 0.130)	(0.747, 0.094)
	(2)	(2.616, 0.402)	(0, 0)	(0.935, 0.062)	(1.143, 0.027)	(1.279, 0.006)

(1) $\rho_0 = 0.2$, $C_0 = 0.2$, $t^* = 0.03$, $\nu = 0.3$;

(2) $\rho_0 = 0.05$, $C_0 = 0.5$, $t^* = 0.03$, $\nu = 0.3$.

从表中可以看出, 对第 1 组参数而言, 由于流体对球壳自由振动的阻尼作用明显, 使频率方程本身无很弱的衰减特性的根 (除 $n = 1$ 时有 $\Omega = 0$), 这样导致小阻尼系数法的计算结果同精确解偏差显著. 而对于第 2 组参数, 情况正好相反, 因此小阻尼系数法就能精确地求得所需频率. 事实上, 进一步观察可发现, 对第 1 组参数来说, 尽管代表衰减特性的虚部相对误差高达 125.8%, 但为工程界所关心的代表固有振动周期的实部误差只有 14.1% ($n = 2$), 因此用小阻尼系数法计算大阻尼问题, 其结果还是有一定参考价值. 尤其对于形式复杂的频率方程, 小阻尼系数法不失为求取近似周期的有效手段.

5 结 论

1) 可压缩流体中封闭薄球壳的非轴对称自由振动有两类振动的频率方程. 真空中在壳很薄时, 它们同文 [10] 所给公式一致.

2) 可压缩流体中球壳第二类自由振动都是阻尼振荡; 而当 $n = 1$ 时有 $\Omega = 0$, 对

应于球壳的刚体运动.

3) 第二类振动频率方程是一元高次代数方程,并可化为实系数代数方程,求解简单方便.

4) 多项式 $A_n(x)$ 的引入及其递推公式的导得,使球 Hankel 函数的表达更为直观和方便,在应用上比 Rayleigh 公式更优.

5) 当 $n \geq 2$ 时,频率方程 (35) 在所考察的参数范围内,至少有一对根表征具有较弱衰减特性的低阶频率,在工程中有重要意义.

6) 同小阻尼系数法的对比发现,该法所致误差主要表现在虚部,而实部从工程意义上来说具有一定程度的参考价值.

参 考 文 献

- 1 Junger MC. *J Appl Mech*, 1952, 19: 439-445
- 2 Hayek S. *J Acoust Soc Am*, 1966, 40: 342-348
- 3 Lou YK, Su TC. *J Acoust Soc Am*, 1978, 63: 1402-1408
- 4 Carlos AF, Thomas LG. *J Acoust Soc Am*, 1980, 67: 1427-1431
- 5 Su TC. *J Sound & Vib*, 1981, 77: 101-125
- 6 Prasad C. *J Acoust Soc Am*, 1964, 36: 489-494
- 7 Wilkinson JP, Kalnins A. *J Appl Mech*, 1965, 32: 525-532
- 8 Ramakrishnan CV, Shah AH. *J Acoust Soc Am*, 1970, 47: 1366-1374
- 9 徐芝纶. 弹性力学 (下). 第三版, 人民教育出版社, 1983: 216-222
- 10 Love AEH. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, fourth edn, Dover Publications, 1944: 549
- 11 Silbiger A. *J Acoust Soc Am*, 1962, 34: 862
- 12 何光渝主编. Fortran 77 算法手册. 科学出版社, 1993: 499-506

附录 频率方程的注记

利用 $h_n^{(2)}(x)$ 的递推公式, 不难导得

$$A_n(x) = (2n-1)A_{n-1}(x) - x^2 A_{n-2}(x) \quad (n=2, 3, \dots) \quad (\text{F-1})$$

此即 $A_n(x)$ 的递推公式. 由式 (26) 和 (27) 可得

$$A_0(x) = i, \quad A_1(x) = i - x \quad (\text{F-2})$$

于是按式 (F-1) 可求得

$$A_2(x) = 3A_1(x) - x^2 A_0(x) = 3i - 3x - ix^2 \quad (\text{F-3})$$

利用 (F-1) 和 (F-2) 两式还能得到 $A_n(x)$ 的常数项为

$$a_n^0 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)i \quad (n=1, 2, \dots) \quad (\text{F-4})$$

而按式 (29) 可得多项式 $B_{n+1}(x)$ 的常数项是

$$b_{n+1}^0 = -(n+1)a_n^0 \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (\text{F-5})$$

因而按式 (28) 有 $h_n(0) = 0$, 则显然 $x = 0$ (即 $\Omega = 0$) 不是方程 (23) 的根. 若 $x = 0$ 是方程 (24) 的根, 则要求 $F_5 = 0$. 由式 (25) 知, 只有 $n = 1$ 时能使 $F_5 = 0$, 即此时 $x = 0$ 为方程 (24) 的根, 其余当 $n \geq 2$ 时 $x = 0$ 都不是方程 (24) 的根.

接下来可以证明方程 (23) 和 (24) 没有非零实根. 利用 Wronski 等式

$$j_n(x)y'_n(x) - j'_n(x)y_n(x) = x^{-2} \quad (\text{F-6})$$

其中 j_n , y_n , j'_n 和 y'_n 分别是第一、第二类 Bessel 函数及其导数, 则 $h_n(x)$ 的虚部

$$\text{Im}[h_n(x)] = \frac{1}{x^2(j_n'^2 + y_n'^2)} > 0 \quad (\text{当 } x \text{ 为非零实数}) \quad (\text{F-7})$$

因此, 如果方程 (23) 和 (24) 有实根, 则可分别导出

$$F_2 = 0, \quad F_1 C_0^2 x^2 - 2 = 0 \quad (\text{F-8})$$

$$F_6 C_0^2 x^2 + F_7 = 0, \quad F_3 C_0^4 x^4 + F_4 C_0^2 x^2 + F_5 = 0 \quad (\text{F-9})$$

但是 $F_2 = k_2 k_3 > 0$, 即方程 (23) 不可能有实根. 另由 (F-9) 可导得

$$F = F_3 F_7^2 - F_4 F_7 F_6 + F_5 F_6^2 = 0 \quad (\text{F-10})$$

但是经过计算可知 $F = -[1 + \alpha_4(n^2 + n + \nu - 1)](1 + \nu)n(n+1)k_1^2 F_2^2 < 0$, 故方程 (24) 也没有非零实根.

由式 (F-2) 和 (29) 得 $B_1(x) = x - i$, 而 $C_3(i) = iC_0 F_2 \neq 0$, 故 $C_3(x)$ 和 $B_1(x)$ 没有公共零点 (或公共因子). 因而频率方程 (30) 可简化为式 (34).

由式 (F-2) 和 (F-3) 知, $A_2(x)$ 和 $A_1(x)$ 无公共零点, 则按式 (F-1) 可用归纳法证 $A_n(x)$ 和 $A_{n-1}(x)$ 无公共零点. 因如 $A_n(x)$ 和 $A_{n-1}(x)$ 有公共零点 $x_1 \neq 0$ (因 $a_n^0 \neq 0$), 则按式 (F-1) 知 x_1 也是 $A_{n-2}(x)$ 的零点, 这与归纳法假定矛盾. 同理按式 (29) 可证 $B_{n+1}(x)$ 和 $A_n(x)$ 也无公共零点. 根据前面的结论, 我们可以限定讨论频率方程 (31) 中的复根. 由式 (33), 如 $C_{n+5}(x)$ 和 $B_{n+1}(x)$ 有一复公共零点, 则要求 $F_6 C_0^2 x^2 + F_7 = 0$, 但此方程解为

$$x^2 = \frac{-F_7}{C_0^2 F_6} = \frac{n(n+1) + \nu - 1}{C_0^2 k_1} > 0 \quad (\text{F-11})$$

即其根为实根. 所以 $C_{n+5}(x)$ 和 $B_{n+1}(x)$ 不可能有复公共零点. 于是式 (31) 即化为式 (35). 且由式 (33) 可知 $n=1$ 时 $x=0$ 的根亦是频率方程 (35) 的根且为二重根, 即所有要求的根都可由式 (35) 求出.

如将 $A_n(x)$ 表示成

$$A_n(x) = f_n(x) + i g_n(x) \quad (\text{F-12})$$

式中 $f_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 都是实系数多项式, 其递推公式同 $A_n(x)$ 一样. 另外可由式 (F-2) 知

$$f_0 = 0, \quad g_0 = 1; \quad f_1 = -x, \quad g_1 = 1 \quad (\text{F-13})$$

从而由递推式可知 $f_n(x)$ 为奇函数, 而 $g_n(x)$ 是偶函数, 即 $A_n(x)$ 的奇次方系数为实数, 而其余项系数为纯虚数. 再由式 (29), (32) 和 (33) 可知, $C_3(x)$ 和 $C_{n+5}(x)$ 也有与 $A_n(x)$ 相同的性质, 因而可作变换

$$x = yi \quad (\text{F-14})$$

将方程 (34) 和 (35) 化为实系数代数方程 (36) 和 (37).

FREE VIBRATIONS OF A THIN COMPLETE SPHERICAL SHELL SUBMERGED IN A COMPRESSIBLE FLUID MEDIUM

Ding Haojiang Chen Weiqiu

(*Department of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China*)

Abstract By the introduction of two displacement functions, the non-axisymmetric free vibrations of a complete thin isotropic spherical shell submerged in a compressible fluid medium are successfully investigated. It is found that there are two classes of free vibrations: the first class is not affected by the ambient fluid while the second is. It is further proved that the frequency equations can be expressed in terms of polynomial. For the second class of vibration of submerged spherical shell, it is also demonstrated that only complex frequencies exist except for the case of $n = 1$, for which the trivial solution $\Omega = 0$ emerges. For $n = 0, 1$ and 2, the root-loci plots of frequency equations of the second class are given in the paper and the effects of various relative parameters are discussed. The method of small damping coefficient is discussed finally.

Key words complete thin spherical shell, displacement function, compressible fluid medium, free vibration, root-loci plot

www.cnki.net