

多工况多约束下离散变量桁架结构的拓扑优化设计¹⁾

王跃方 孙焕纯

(大连理工大学工程力学系, 大连 116023)

摘要 提出了一个多工况下受应力、位移约束的离散变量桁架结构的拓扑优化方法, 给出了结构拓扑形式变更时的约束处理方法及杆件删除策略, 使基结构设计空间的维数不断降低, 达到最优拓扑, 避免了奇异解的出现. 在算例中指出了截面离散集和位移约束对最优拓扑的影响, 算例给出了满意的拓扑优化解.

关键词 离散变量, 拓扑优化, 应力, 位移约束, 离散集

1 离散变量桁架的拓扑优化设计模型

求最轻重量的桁架拓扑优化模型是

$$\begin{aligned} & \text{求 } A_1, A_2, \dots, A_M \\ & \min W = \sum_{i=1}^M \rho_i A_i \sum_{j=1}^{N_i} l_{ij} \\ & \text{s.t. } \underline{\sigma}_i \leq \sigma_{ijl} \leq \bar{\sigma}_i \\ & \underline{\delta}_k \leq \delta_{kl} \leq \bar{\delta}_k \\ & \underline{A}_i \leq A_i \leq \bar{A}_i \\ & A_i \in S = \{S_1, S_2, \dots, S_{N_s}\} \\ & (i = 1, 2, \dots, M; \quad j = 1, 2, \dots, N_i; \quad l = 1, 2, \dots, NL; \quad k = 1, 2, \dots, NN) \end{aligned} \quad (1)$$

其中 M 是变量连接后的杆件组数, N_i 是第 i 组的杆件数, ρ_i 和 A_i 是该组杆件的容重和面积, $\bar{\sigma}_i$ 和 $\underline{\sigma}_i$ 是该组杆件的拉、压许用应力, l_{ij} 是该组中第 j 根杆的长度, σ_{ijl} 是这根杆在第 l 个工况下的应力, $\bar{A}_i$ 和 $\underline{A}_i$ 是面积上、下限. NL 是工况数, NN 是位移约束数, δ_{kl} 是第 l 个工况下第 k 个受约束的位移值, $\bar{\delta}_k$ 和 $\underline{\delta}_k$ 是其上、下限. S 称为截面离散集, N_s 是 S 中元素的个数. 设最优拓扑结构有 M_s 组杆件 ($M_s \leq M$), 则基结构和最优拓扑结构的杆件面积分别对应着 M 维离散空间 V^M 和 M_s 维离散空间 V^{M_s} 中的离散点, 并且 $V^{M_s} \subseteq V^M$. 离散变量结构的拓扑优化设计实质上是从 V^M 到 V^{M_s} 的一个降维寻找最优解的过程.

2 拓扑形式变更时的约束处理方法

文献 [1] 指出, 产生奇异拓扑解的原因是杆件删除时应力约束的不连续性, 因此设计空间维数降低前后的可行域可能是不连通的. 对于离散变量优化问题, 杆件的

¹⁾ 国家自然科学基金资助课题.

1993-11-29 收到第一稿, 1994-05-01 收到修改稿.

应力约束本身就是不连续的. 为此我们把原截面离散集予以扩展, 引入一个非常小的正数 ε , 令 $S(0) = \varepsilon$. 当删除第 i 组杆件时, 令 $A_i = S(0) = \varepsilon$, 同时令第 i 组各杆的应力约束不起作用, 自动地得到满足. 这样处理既保证了杆件删除的真实物理意义, 又使计算模型的规模保持不变. 位移约束仍不变. 实际上, 由于 ε 取极小的值, 体系刚度与杆件真正被删除的体系刚度的差别是非常小的, 所以可以较精确地模拟杆件删除后的位移约束, 而不会改变其在维数降低后的设计空间中的可行性.

3 杆件的删除策略和优化算法

为确定在一轮截面优化后应删除的杆件, 我们给出如下的杆件删除策略.

定义第 i 组 ($i = 1, 2, \dots, M$) 杆件的评价值

$$R_i = \frac{\sum_{l=1}^{NL} \sum_{k=1}^{N_i} |F_{ikl}|}{\sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^{NL} \sum_{k=1}^{N_j} |F_{jkl}|} \quad (2)$$

其中 F_{ikl} 是该组的第 k 根杆在第 l 个工况下的轴力. 显然, 该组中各杆的内力水平越低, R_i 就越小, 删除该组杆件的优先程度就越高.

设第 t 轮截面优化后得到的杆件面积向量是 $A^{(t)} = [A_1^{(t)}, A_2^{(t)}, \dots, A_M^{(t)}]$. 由式 (2) 可得 $R_i^{(t)}$ ($i = 1, 2, \dots, M$). 将它们由大到小排序, 为讨论方便起见, 设已有 $R_1^{(t)} > R_2^{(t)} > \dots > R_M^{(t)}$, 由它们构成集合

$$R^{(t)} = \{R_1^{(t)}, R_2^{(t)}, \dots, R_M^{(t)}\} \quad (3)$$

进一步地将 $R^{(t)}$ 分成两个子集 $\phi_1^{(t)}$ 、 $\phi_2^{(t)}$

$$\begin{aligned} \phi_1^{(t)} &= \{R_1^{(t)}, \dots, R_k^{(t)}\} \\ \phi_2^{(t)} &= \{R_{k+1}^{(t)}, R_{k+2}^{(t)}, \dots, R_M^{(t)}\} \\ R^{(t)} &= \phi_1^{(t)} \cup \phi_2^{(t)} \end{aligned} \quad (4)$$

$\phi_1^{(t)}$ 对应的 k 组杆件具有较高的评价值, 它们将在第 $t+1$ 轮截面优化时得到保留, $\phi_2^{(t)}$ 中的某组杆件将被删除. k 由下式决定

$$R_1^{(t)} / R_{k+1}^{(t)} \geq P \quad (5)$$

上式中 $P > 1$. 如对 $R^{(t)}$ 的元素下标进行搜索后找不到这样的 k , 则令 $k = 0$, 此时 $\phi_1^{(t)} = \emptyset$ (空集), $\phi_2^{(t)} = R^{(t)}$.

拓扑优化算法的具体步骤如下:

(1) 形成基结构. $t \leftarrow 1$. 按文 [4] 方法做截面优化, 得到面积 $A^{(t)}$ 和重量 $W^{(t)}$. $A^* \leftarrow A^{(t)}$, $W^* \leftarrow W^{(t)}$, $\bar{W}^* \leftarrow W^*$, $IDD \leftarrow 0$. 将各工况下的杆件内力存入数组 F^* .

(2) 按式 (2) 由 F^* 计算评价值 R_i ($i = 1, 2, \dots, M$), 排序后得 $R^{(t)}$, 将 $R^{(t)}$ 的各元素对应的杆件组号记入一个索引数组 IND 中, 按式 (5) 搜索出 k , 从而按式 (4) 形成 $\phi_1^{(t)}$ 和 $\phi_2^{(t)}$. $A^{(t+1)} \leftarrow A^{(t)}$, $j \leftarrow 1$.

(3) $A_{IND(k+j)}^{(t+1)} \leftarrow \varepsilon$. 以 $A^{(t+1)}$ 为初值并按前述的约束处理方法进行截面优化, 得到面积 $jA^{(t+1)}$ 和重量 $W_j^{(t+1)}$. 如果 $W_j^{(t+1)} < W^*$ 且优化后结构非几何可变, 令 $W^* \leftarrow W_j^{(t+1)}$, $A^* \leftarrow jA^{(t+1)}$, 将各工况下的内力存入 F^* .

(4) 如果 $j < M - k$, 令 $A_{IND(k+j)}^{(t+1)} \leftarrow A_{IND(k+j)}^{(t)}$, 恢复该组杆件的应力约束, $j \leftarrow j+1$, 转 (3). 否则, 如果有 $W^* < W^{(t)}$, 恢复各组杆件的应力约束, $t \leftarrow t+1$, $A^{(t)} \leftarrow A^*$, $W^{(t)} \leftarrow W^*$, 转 (2).

(5) 如果 $W^* < \bar{W}^*$, 令 $\bar{W}^* \leftarrow W^*$, $\bar{A}^* \leftarrow A^*$, $IDD \leftarrow 0$, 转 (6). 否则令 $IDD \leftarrow IDD + 1$, 若 $IDD = 2$, 转 (7).

(6) 将 $\min_j W_j^{(t+1)}$ 对应的面积 $jA^{(t+1)}$ 存入 $A^{(t+1)}$, 杆件内力存入 F^* . $W^* \leftarrow \min_j W_j^{(t+1)}$, $W^{(t)} \leftarrow W^*$, $t \leftarrow t+1$, 转 (2).

(7) 打印 $\bar{A}^*$ 和 $\bar{W}^*$, 结束.

4 算例

算例 1 十二杆桁架

如图 1 所示. $M=12$. 各组的 $E = 6.897 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$, $\rho = 0.02768 \text{ kg/cm}^3$, $\bar{\sigma} = 17243.5 \text{ N/cm}^2$, $\underline{\sigma} = -17243.5 \text{ N/cm}^2$. 在节点 2, 4 的 Y 方向上有 $\pm 5.08 \text{ cm}$ 的位移约束. 工况有两个, 分别作用在节点 2, 4 的 Y 方向上, 大小都是 $-4.5 \times 10^5 \text{ N}$.

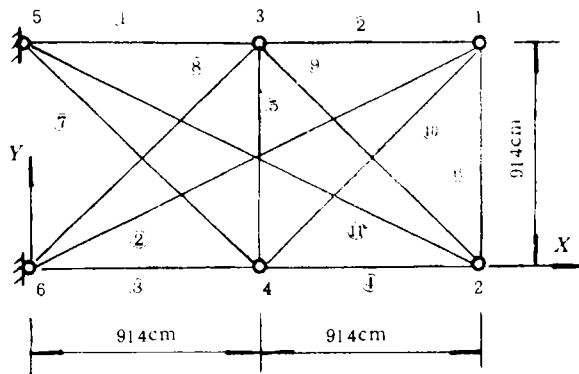


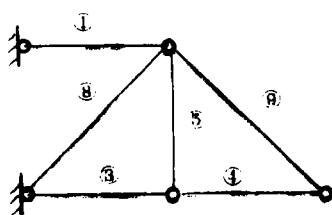
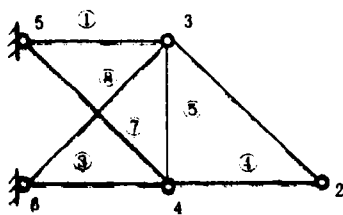
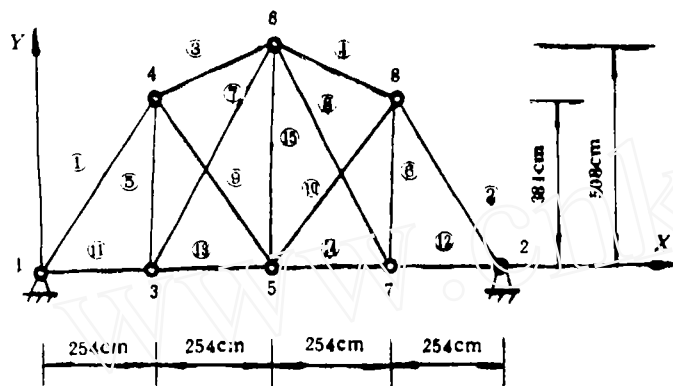
图 1
Fig.1

本题考查截面离散集的影响. 给定 $S_1 = \{129.03, 167.74, 180.64, 225.81, 264.52, 296.77, 322.58\} \text{ cm}^2$. $S_2 = \{6.45, 19.35, 32.26, 51.61, 67.74, 77.42, 96.77, 109.68, 141.94, 154.84, 167.74, 180.64, 187.10, 200.00, 225.81\} \text{ cm}^2$.

优化结果是: 当使用 S_1 时得到的是图 2 所示的最优拓扑 ($W^* = 2328.1 \text{ kg}$), 而用 S_2 优化得到的是图 3 所示的最优拓扑 ($W^* = 2047.7 \text{ kg}$). 可见对同一问题, 如截面离散程度不同, 得到的最优拓扑就可能不同. 另外值得说明的是, 当用 S_2 优化时, 如果继续删除图 3 中的杆 5, 得到的六杆桁架的最优重量要大一些 ($W^* = 2422.2 \text{ kg}$).

算例 2 十五杆桁架

如图 4 所示. $M = 8$, 分组情况列在表 1 内. $E, \rho, \bar{\sigma}, \underline{\sigma}$ 与上例相同. 工况有两个, 工况 1: $P_{3y} = P_{6y} = P_{9y} = -4.5 \times 10^5 \text{ N}$, 工况 2: $P_{4y} = P_{6y} = P_{8y} = -4.5 \times 10^5 \text{ N}$.

图 2
Fig.2图 3
Fig.3图 4
Fig.4

给定截面离散集 $S = \{6.45, 9.68, 22.58, 32.26, 45.16, 70.97, 83.87, 103.23, 129.03, 161.29, 193.55\} \text{cm}^2$. 一般认为位移约束不影响最优拓扑, 在优化时甚至可以忽略^[2,3]. 本例对此做了考查, 按下面两种情形进行优化: (1) 无位移约束. (2) 节点 5Y 方向上有 $\pm 1.524 \text{cm}$ 的位移约束. 优化结果表明, 不考虑位移约束得到的最优拓扑是图 4 所示的结构 ($W^* = 364.78 \text{kg}$), 如果考虑上述的位移约束, 则杆 7, 8 最终被删除掉了, 最优重量是 $W^* = 485.94 \text{kg}$. 由此可见位移约束可能影响最优拓扑, 因此必须保留在优化模型中, 以免漏掉最优拓扑.

表 1 变量连接

Table 1 Variable linking

组号	杆件号	组号	杆件号
1	① ②	5	⑨ ⑩
2	③ ④	6	⑪ ⑫
3	⑤ ⑥	7	⑬ ⑭
4	⑦ ⑧	8	⑮

参 考 文 献

- 1 Gengdong Cheng, Zheng Jiang. Study on topology optimization with stress constraints. *Engineering Optimization*, 1992, 20(2): 129-148
- 2 Kirsch U. Optimal topologies of structures. *Appl Mech Rev*, 1989, 42(8): 223-239
- 3 Kirsch U, Topping BHV. Minimum weight designs of structural topologies. *J Struct Engrg*, 1992, 118(7): 1770-1785
- 4 许强, 孙焕纯. 离散变量桁架结构优化设计的组合算法. 大连理工大学学报, 1991, 31(6): 625-633

OPTIMAL TOPOLOGY DESIGNS OF TRUSSES WITH DISCRETE SIZE VARIABLES SUBJECTED TO MULTIPLE CONSTRAINTS AND LOADING CASES

Wang Yuefang Sun Huanchun

(Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract An algorithm is given for topology optimization of trusses with discrete variables subjected to multiple constraints and loading cases. The treatment of constraints and strategy of removing bars when the topologies change are proposed to avoid singular solutions. The facts that optimal topologies may be affected by different displacement constraints and discrete section sets are pointed out in the examples for which satisfactory optimal solutions are obtained.

Key words discrete variables, optimal topologies, stress/displacement constraints, discrete section sets