梁的蠕变开裂各向同性弯曲损伤分析[1)]

杨光松　金 星　陆寅初
(国防科技大学航天技术系，长沙 410073)

摘要　在梁的纯弯曲损伤基本假设条件下，导出了弯曲损伤的基本方程，与 Kachanov 的材料刚度劣化 (受载横截面积减小) 定义拉伸损伤变量类似，以梁的弯曲刚度劣化 (惯性矩减小) 定义弯曲损伤变量，从而建立了与 Kachanov 拉伸损伤模型相类似的梁的各向同性弯曲损伤模型．最后，以受蠕变纯弯曲梁为实例进行了损伤分析，所得计算结果与 Kachanov 拉伸损伤模型所得结果比较吻合，表明该弯曲损伤模型是合理适用的．

关键词　纯弯曲梁，蠕变各向同性损伤，拉伸损伤，弯曲损伤

1　梁纯弯曲损伤模型的基本假设

近年来，连续介质损伤力学已在蠕变、疲劳、塑性成型、寿命预估等方面得到成功的应用 [1-3]．然而，实际工程问题中应用最多的仍主要集中于单向或均布的平面应力状态，对于三维应力状态或非均布的应力状态，由于应力分布比较复杂，损伤状态也相当复杂，用各向同性损伤模型分析计算比较困难．鉴于实际工程结构中主要采用平板和壳体结构，且承受横向弯曲载荷较多，因此将各向同性 (平面应力) 拉伸损伤模型推广应用到梁和板、壳的弯曲损伤情形，对于损伤力学在工程实际中的应用发展具有重要意义．

假设梁的横截面为一矩形截面 (如图 1(a) 所示)，在外载 (弯矩作用) 或其它环境条件下，材料受到损伤．现对梁的损伤状态作如下假设：

1) 损伤由拉应力引起，在纯弯曲载荷作用下，损伤沿梁的宽度均匀分布．梁的有效宽度 $\bar{b}$ 为

$$\bar{b} = b(1-\omega) \tag{1}$$

式中，ω 为 (Kachanov[4]) 拉伸损伤变量，b 为梁的宽度．

2) 假设损伤不影响层间作用，梁的高度不变．由于梁的横截面存在损伤，使其中性轴移动．y_0 为中性轴与 x 轴 (梁的横截面中心轴线) 之间的距离．如图 1(a) 所示，如果此时梁的平剖面假设 (Euler-Bernauli 假设) 仍然成立．则几何关系 (简称为广义应变等效条件) 为

$$\varepsilon = \bar{k}(y+y_0) \tag{2}$$

式中，ε 为轴向 (x 方向) 应变，$\bar{k}$ 为受损梁的有效曲率，y_0 为受损梁的中性轴移动距离．

1) 机械结构强度与振动国家重点实验室资助项目．
1993-09-06 收到第一稿，1994-06-25 收到修改稿．

显见无损伤影响时，(2) 式即为通常的梁的几何关系式.

3) 如果 (1) 式中的单向拉伸损伤变量 ω 为 Kachanov 各向同性损伤变量，则根据 Lemaitre 应变等效原理，有效应力 $\bar{\sigma}$ 满足无损伤时的弹性本构关系

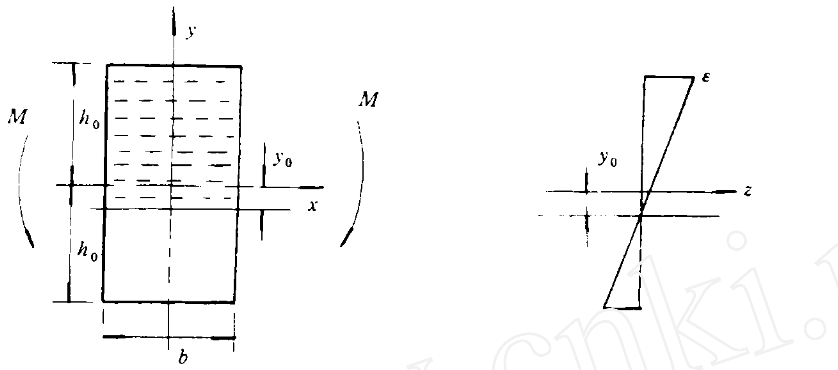
$$\bar{\sigma} = Ee = E\bar{k}(y + y_0) \tag{3}$$

式中，E 为杨氏 (Young) 弹性模量.

4) Kachanov 损伤变量 ω 的发展方程仍采用 Kachanov 假设

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} A\left(\dfrac{\sigma}{1-\omega}\right)^n & \sigma > 0 \\ 0 & \sigma \le 0 \end{cases} \tag{4}$$

式中，A, n 为常数.



(a) 受损梁的矩形横截面 (b) 受损梁的直法线假设

(a) The rectangular cross section (b) The assumption of Euler-Bernauli

图 1 梁的纯弯曲损伤变形模型

Fig.1 A damage deformation model of beams under pure bending loads

2 梁的弯曲损伤模型

对于承受纯弯矩静载作用的情形，由合力平衡得

$$\xi = \frac{y_0}{h_0} = \frac{1}{2h_0^2}\int_{-h_0}^{h_0} \omega(y + y_0)\mathrm{d}y \tag{5}$$

上式表明受损梁中性轴移动的无量纲坐标 ξ 为材料损伤 (对损伤中性轴 $y = -y_0$ 处) 的一次矩. 由弯矩平衡得

$$M = \int_{-h_0}^{h_0} \sigma b y \mathrm{d}y = E\bar{k}\int_{-h_0}^{h_0} b(1-\omega)(y + y_0)y\mathrm{d}y = E\bar{k}\bar{I} \tag{6}$$

式中，M 为表观弯矩，$\bar{I}$ 为有效惯性矩.

如果将弯曲损伤变量 β 定义为弯曲刚度 (惯性矩) 的劣化. 即有

$$\beta = 1 - \frac{\bar{I}}{I} \tag{7}$$

可得与 (3) 式相类似的广义 (弯曲) 应变等效原理.

$$\overline{M} = EI\bar{k} \tag{8}$$

式中，$\overline{M}$, $\bar{k}$ 分别为与 Kachanov 拉伸损伤模型的等效概念相类似的有效弯矩和有效曲率.

3 纯弯曲梁蠕变脆性损伤开裂实例分析

假设有一各向同性混凝土梁，受弯矩 M 作用发生蠕变脆性损伤. 现在分两个阶段进行讨论：

1) 损伤最严重 ($y = h_0$) 处发生开裂之前的情形

微分 (7) 式，并将 (4) 式代入积分得弯曲损伤发展方程

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{3(1+\xi)^{n+3}}{2(n+1)(n+3)t_0(1-\beta)^n} \tag{9}$$

上式中 t_0 为单向拉伸应力与 $y = h_0$ 处应力相同时的 Kachanov 蠕变断裂寿命. 即有

$$t_0 = [A(n+1)(Ekh_0)^n]^{-1} \tag{10}$$

由 (5) 式微分两次并积分得无量纲中性轴坐标 ξ 的变化规律为

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \frac{(1+\xi)^{\frac{(n+2)^2}{n+1}}}{2(n+1)(n+2)t_0(1-\beta)^n} \tag{11}$$

假设在梁损伤最严重 ($y = h_0$) 处开始开裂 ($\omega = 1$) 的时间为 t_1, 则此时的无量纲中性轴坐标为

$$\xi_0 = \left[1 - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right]^{-\frac{n+1}{2n+3}} - 1 \tag{12}$$

弯曲损伤变量为

$$\beta_0 = \frac{3(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\left[\left(1 - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right)^{-\frac{n}{2n+3}} - 1\right] \tag{13}$$

初始开裂时间 t_1 为

$$\frac{t_1}{t_0} = 2(n+1)(n+2)\int_0^{\xi_0} \frac{\left[1 + \dfrac{3(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\left(1 - (1+\xi)^{\frac{n}{n+1}}\right)\right]^n}{(1+\xi)^{\frac{(n+2)^2}{n+1}}}\mathrm{d}\xi \tag{14}$$

2) $y = h_0$ 处发生开裂后的情形

假设 $t \geq t_1$ 时，梁的开裂前沿 ($\omega = 1$) 位于 $y = h(t)$ 处 [4]. 此时弯曲损伤变量 β, 无量纲中性轴坐标 ξ 和无量纲开裂点高度 $H(h/h_0)$ 的发展变化规律为

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{3(H+\xi)^{n+3}}{2(n+1)(n+3)t_0(1-\beta)^n} \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\frac{(1+\xi_0)^{\frac{(n+2)}{n+1}}(H+\xi)^{n+2}}{2(n+1)(n+2)t_0(1-\beta)^n}\exp\left(\frac{n+2}{n+1}\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{H+\xi}\right) \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=-\frac{\left(\dfrac{H+\xi}{1-\beta}\right)^n}{n\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{[H(t)+\xi(\tau)]^{n-1}}{(1-\beta(\tau))^n}\mathrm{d}\tau} \tag{17}$$

由 (15)—(17) 式，并利用 $t=t_1$ 时的初始条件，可解得弯曲损伤变量 β、无量纲中性轴坐标 ξ 和无量纲开裂点高度 H 随时间 t 的变化规律.

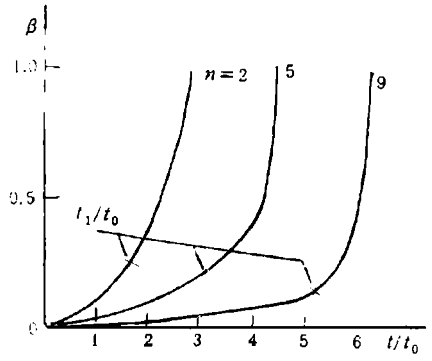


图 2 弯曲损伤变量随蠕变时间变化的规律
Fig.2 The relations between bending damage and creep time

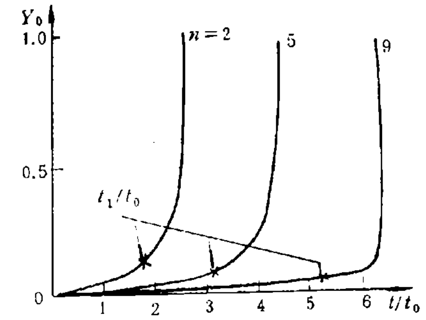


图 3 无量纲中性轴坐标随蠕变时间变化的规律
Fig.3 The relations between neutral axis and creep time

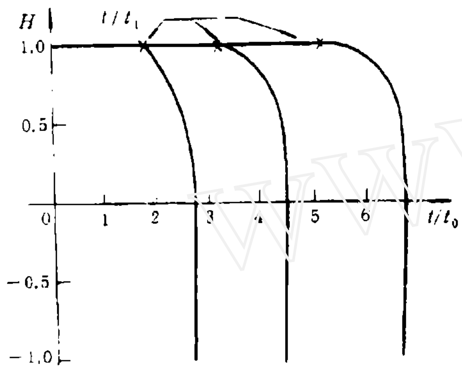


图 4 开裂点位置随蠕变时间变化的规律
Fig.4 The relations between cracked front and creep time

图 2，图 3 和图 4 分别给出了 $n=2,5,9$ 时梁的弯曲损伤变量、无量纲中性轴坐标和无量纲开裂点高度随时间的变化规律. 如图所示，弯曲损伤和中性轴移动距离随时间增加不断增大；开裂点高度在初始开裂之后随时间下降，到梁完全断裂时，变化最快；并且 n 越大，变化越平缓，开裂时间越长. 对不同 n 值的梁蠕变断裂时间计算结果示于表 1 中.

表 1 梁的蠕变弯曲损伤计算结果

Table 1 Calculating results of creep bending damage of the beam

n	2	4	6	8
ξ_0	0.1593	0.0964	0.0694	0.0543
β_0	0.3728	0.2456	0.1842	0.1476
t_1/t_0	1.8620	2.7419	3.6148	4.4845
t_2/t_0	2.6826	3.8240	4.9534	6.0919

4 简单结论

本文在梁的弯曲损伤基本假设条件下求得了梁的蠕变弯曲损伤分析 Kachanov 拉伸损伤模型精确解，在此基础上提出的简便弯曲损伤模型具有明显的物理意义．该弯曲损伤模型的计算分析简单可靠，适用于实际工程结构梁的损伤分析．但高宽比较大时，尚需进一步实验验证梁的平剖面假设的适用范围．

参 考 文 献

1 郝松林，陈铸增．损伤及损伤力学．国防科技大学学报， 1984, 6(2): 1–36

2 杨光松，周明　．玻璃纤维增强复合材料的损伤分析．国防科技大学学报， 1988, 10(3): 1–11

3 杨光松．微结构弹性损伤模型．固体力学学报， 1989, (2): 116–126

4 Kachanov LM. Introduction to Continuum Damage Mechanics. Martinus Nijhoff Publishers. 1986

AN ISOTROPIC DAMAGE ANALYSIS ON BEAMS UNDER CREEP PURE BENDING LOAD

Yang Guangsong　Jin Xing　Lu Yinchu

(Dept. of Aerospace Engineering & Mechanics, National University of Defense Technology, Hunan Changsha 410073, *China*)

Abstract　In this paper, based on the assumptions of pure bending damage of beams, the elementary equations on bending damage are developed. Similar to the tensile damage variable defined as reduction of loading area by L.M. Kachanov, the bending damage variable is defined as reduction of moment of inertia. For the simplicity of application in engineering, a simple bending damage model is proposed. At last, an exact creep pure bending damage analysis is made, based on which the materials' constants of the simple bending damage model are obtained in first approximation. Its calculating results are in good agreement with the results of exact solution.

Key words　pure bending beams, creep isotropic damage, tensile damage, bending damage