

基于虚功原理的弹性接触问题的线性互补方法¹⁾

朱昌铭

(上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

摘要 在将接触条件表为具有惩罚因子的线性互补形式后, 本文详细推导了适用于弹性接触问题的虚功方程. 在此基础上, 结合有限元离散技术, 简捷地导出了一种求解有摩擦弹性接触问题的线性互补方法. 这种方法不必迭代, 在无卸载时, 只要一个增量步即可求得解答, 计算效率较高. 文末通过实例, 说明了方法的正确性及有效性.

关键词 摩擦接触, 线性互补方法, 有限元

引 言

在用有限元法进行接触问题的求解时, 有两类基本解法. 一是增量迭代法^[1-3], 通过不断地加载或迭代, 最终获得满足精度要求的解答; 另一类是数学规划法^[4,5], 通过将接触问题转化为规划问题, 用线性规划或二次规划(线性互补)技术求解. 对于有摩擦的接触问题, 增量迭代法的迭代过程极为复杂, 而且不能保证收敛到正确解^[4]. 相比之下, 数学规划法具有在有限步内稳定地收敛, 概念直观明确等优点, 近年来得到了越来越多的研究. 其中, 最具代表性的当属 Klarbring^[4]及钟万勰、孙苏明^[5]的工作. 他们均成功地用数学规划法求解了有摩擦的接触问题. 但也有不足之处. 文[4]得到的是一种较复杂的含有导数的参数线性互补方法, 而且对接触条件的处理也颇为繁琐. 文[5]的理论基础是参变量变分原理^[6], 该原理由于需借助现代控制论的思想来引进不参加变分的参变量, 概念较复杂, 与传统的变分原理很不相同, 不便于推广应用.

在文[4,5]的启发下, 本文通过仿照塑性力学, 将有摩擦的接触条件表为具有惩罚因子的线性互补形式, 然后详细推导了适于摩擦接触问题的虚功方程. 在此基础上, 结合有限元技术, 给出了一种求解该类问题的线性互补方法. 本文方法的显著特点是理论推导简便, 概念清晰, 极易推广应用. 而且由于求解时无迭代, 因而计算精度高, 计算量少, 在无卸载时, 只要一个增量步即可求得解答.

1 接触条件的线性互补表述

考虑二维问题. 设接触体系由两个物体组成, 记为 $\Omega^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$), 如图 1. 物体边界 $S^{(\alpha)}$ 由给定位移边界 $S_u^{(\alpha)}$, 给定外力边界 $S_p^{(\alpha)}$ 和接触边界 $S_c^{(\alpha)}$ 组成. 假设: 1)

¹⁾ 国家自然科学基金资助项目.

1993-09-28 收到.

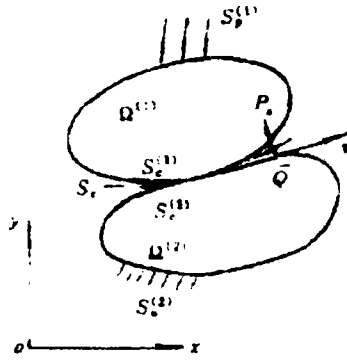


图 1 两接触物体
Fig.1 Two contact objects

接触体是弹性的, 且为小变形; 2) 接触表面的摩擦力遵守库伦定律; 3) 两个物体的可能接触边界非常接近, 对于 $S_c^{(1)}$ 上的点 P , 总存在 $S_c^{(2)}$ 上的点 Q 组成接触点对, 且 P, Q 连线近似平行于 $S_c^{(1)}$ 及 $S_c^{(2)}$ 上 P, Q 点的法线方向.

由假设 1) 及 3) 知, 两个物体的接触边界可公用 S_c 来表征, 此 S_c 定义为 $S_c^{(1)}$ 及 $S_c^{(2)}$ 上所有接触点对连线中点的连线. 根据 S_c 与 $S_c^{(\alpha)}$ 上点的对应关系, 可以沿 S_c 来定义 $S_c^{(\alpha)}$ 上点的位移.

建立图 1 所示局部坐标系 (n, τ) . 设对应接触点对的位移为 $u_c^{(1)}, u_c^{(2)}$, 面力为 $P_c^{(1)}, P_c^{(2)}$, 可定义切向及法向相对位移为

$$u_{c\tau} = u_{c\tau}^{(1)} - u_{c\tau}^{(2)} \quad (1.1)$$

$$u_{cn} = u_{cn}^{(1)} - u_{cn}^{(2)} + \delta_n \quad (1.2)$$

式中 δ_n 为接触点对的初始间隙.

对于法向相对位移, 应满足非穿透条件

$$u_{cn} \geq 0 \quad (2)$$

根据作用与反作用原理, 可定义相应的切向及法向接触力为

$$P_{c\tau} = -P_{c\tau}^{(1)} = P_{c\tau}^{(2)} \quad (3.1)$$

$$P_{cn} = -P_{cn}^{(1)} = P_{cn}^{(2)} \quad (3.2)$$

由库伦定律, 应有

$$|P_{c\tau}| \leq \mu |P_{cn}| \quad (4)$$

式中 μ 为物体间的摩擦系数. 同时, 法向接触力还应满足不受拉条件

$$P_{cn} \leq 0 \quad (5)$$

由上面定义的相对位移及接触力, 可如下建立接触条件的线性互补表述:

1.1 切向接触力和切向相对位移的关系

对于已接触的表面, 若 $|P_{c\tau}| < \mu |P_{cn}|$, 表示在此接触点对两物体间无滑动, $u_{c\tau} = 0$; 若 $|P_{c\tau}| = \mu |P_{cn}|$, 则表示可能滑移, $|u_{c\tau}| \geq 0$. 考虑到 $P_{c\tau}$ 与 $u_{c\tau}$ 的方向, 则 $P_{c\tau}$ 与 $u_{c\tau}$ 的关系可用图 2(a) 表示.

显然, $P_{c\tau}$ 与 $u_{c\tau}$ 的关系同塑性力学中理想刚塑性体单向应力应变关系相似. 屈服函数相当于

$$f_1 = P_{c\tau} + \mu P_{cn} \quad (6.1)$$

$$f_2 = -P_{c\tau} + \mu P_{cn} \quad (6.2)$$

将图 2(a) 变形为图 2(b), 仿塑性力学, 认为 $u_{c\tau}$ 可分解为弹性部分 $u_{c\tau}^{(e)}$ 及非弹性部分 $u_{c\tau}^{(s)}$, 即

$$u_{c\tau} = u_{c\tau}^{(e)} + u_{c\tau}^{(s)} \quad (7)$$

其中 $u_{c\tau}^{(e)}$ 与 $P_{c\tau}$ 有关系

$$u_{c\tau}^{(e)} = P_{c\tau} / E_\tau \quad (8)$$

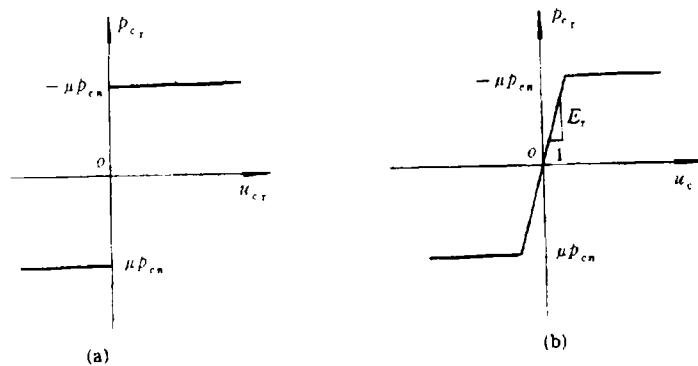


图 2 $P_{c\tau}$ 与 $u_{c\tau}$ 的关系
Fig.2 The relation between $P_{c\tau}$ and $U_{c\tau}$

而 $u_{c\tau}^{(s)}$ 按下式计算

$$u_{c\tau}^{(s)} = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial P_{c\tau}} \quad (9)$$

式中

$$g_1 = P_{c\tau} \quad (10.1)$$

$$g_2 = -P_{c\tau} \quad (10.2)$$

相当于塑性力学中的塑性势函数. λ_1, λ_2 相当于流动因子, 它们满足

$$\lambda_i \begin{cases} = 0 & \text{当 } f_i < 0 \\ \geq 0 & \text{当 } f_i = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (11)$$

这样, 从 (7), (8) 及 (9) 式, $P_{c\tau}$ 与 $u_{c\tau}$ 的关系最终可写为

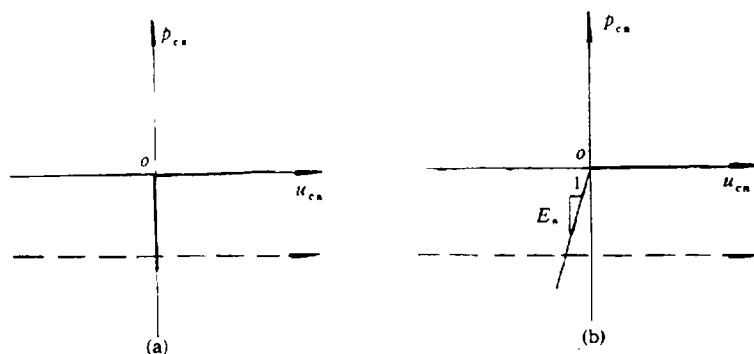
$$P_{c\tau} = E_\tau (u_{c\tau} - u_{c\tau}^{(s)}) = E_\tau (u_{c\tau} - \lambda_1 + \lambda_2) \quad (12)$$

在上式中, 令 $E_\tau \rightarrow \infty$, 则 $P_{c\tau}$ 与 $u_{c\tau}$ 的关系即成为图 2(a) 所示实际的接触条件.

1.2 法向接触力和法向相对位移的关系

当 $P_{cn} = 0$, 即两物体在该接触点对未接触时, $u_{cn} \geq 0$; 而当 $P_{cn} < 0$, 即两物体在该接触点对已接触时, $u_{cn} = 0$. P_{cn} 与 u_{cn} 的关系可由图 3(a) 表示. 这种关系也类似理想刚塑性体的应力应变关系, 其屈服函数为

$$f_3 = P_{cn} \quad (13)$$

图 3 P_{cn} 与 u_{cn} 的关系Fig.3 The relation between P_{cn} and U_{un}

同样, 将图 3(a) 变形为图 3(b), 并将 u_{cn} 分解为弹性部分 $u_{cn}^{(e)}$ 及非弹性部分 $u_{cn}^{(s)}$

$$u_{cn} = u_{cn}^{(e)} + u_{cn}^{(s)} \quad (14)$$

这里有

$$u_{cn}^{(e)} = P_{cn}/E_n \quad (15)$$

$$u_{cn}^{(s)} = \lambda_3 \frac{\partial g_3}{\partial P_{cn}} \quad (16)$$

式中, 塑性势函数 $g_3 = P_{cn}$, 流动因子 λ_3 满足

$$\lambda_3 \begin{cases} = 0 & \text{当 } f_3 < 0 \\ \geq 0, & \text{当 } f_3 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

利用 (14), (15) 及 (16) 式, P_{cn} 与 u_{cn} 的关系最终可写为

$$P_{cn} = E_n(u_{cn} - u_{cn}^{(s)}) = E_n(u_{cn} - \lambda_3) \quad (18)$$

同样, 当 $E_n \rightarrow \infty$ 时, (18) 式描述了图 3(a) 所示 P_{cn} 与 u_{cn} 的关系. (12), (18) 式可合并写为

$$\begin{cases} P_{ci} = D_{cij}(u_{cj} - C_{jk\lambda k}) \\ f_k + \nu_k = 0 \\ \nu_k \cdot \lambda_k = 0, \quad \nu_k, \lambda_k \geq 0 \end{cases} \quad (19.1)$$

$$(i, j = 1, 2; k = 1, 2, 3) \quad (19.2)$$

$$(19.3)$$

式中 $i = 1, 2$ 分别表示切向及法向, ν_k 为松弛变量, D_{cij}, C_{jk} 为

$$[D_{cij}] = \begin{bmatrix} E_\tau & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix}, \quad [C_{jk}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

利用 (19.1) 式, 可将 $f_k (k = 1, 2, 3)$ 用 u_{ci} 及 λ_k 表出

$$f_k = U_{ki}u_{ci} + V_{kl}\lambda_l \quad (i = 1, 2; k, l = 1, 2, 3) \quad (21)$$

这里

$$[U_{ki}] = \begin{bmatrix} E_\tau & \mu E_n \\ -E_\tau & \mu E_n \\ 0 & E_n \end{bmatrix}, \quad [V_{kl}] = \begin{bmatrix} -E_\tau & E_\tau & -\mu E_\tau \\ E_\tau & -E_\tau & -\mu E_\tau \\ 0 & 0 & -E_\tau \end{bmatrix} \quad (22)$$

2 接触问题的提法及虚功方程

对于图 1 所示接触物体, 静力平衡边值问题在区域 $\Omega = \Omega^{(1)} + \Omega^{(2)}$ 内应当满足

$$1. \text{ 平衡方程 } \sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (23)$$

$$2. \text{ 几何方程 } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (24)$$

$$3. \text{ 物理方程 } \sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (25)$$

在边界 $S = S_c + S_p + S_u$ 上应当满足

$$4. S_p \text{ 上的力边界条件 } \sigma_{ij}n_j = \bar{p}_i \quad (26)$$

$$5. S_u \text{ 上的位移边界条件 } u_i = \bar{u}_i \quad (27)$$

6. S_c 上的接触条件

$$P_{ci} = D_{cij}(u_{cj} - C_{jm}\lambda_m) \quad (28.1)$$

$$f_m + \nu_m = 0 \quad (28.2)$$

$$\nu_m \cdot \lambda_m = 0, \quad \nu_m, \lambda_m \geq 0 \quad (28.3)$$

以上诸式中, $i, j, k, l = 1, 2; m = 1, 2, 3$.

接触问题的虚功方程推导如下:

设有虚位移 δu_i , 在 S_u 上满足 $\delta u_i = 0$, 将 δu_i 乘 (23) 式, 并在区域内积分, 有

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\delta u_{i,j}d\Omega + \int_{\Omega} b_i\delta u_id\Omega = 0 \quad (29)$$

利用分部积分并注意到 (26) 式及 S_u 上 $\delta u_i = 0$, 上式成为

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\delta u_{i,j}d\Omega - \int_{S_c} \sigma_{ij}n_j\delta u_id\Omega = \int_{\Omega} b_i\delta u_id\Omega + \int_{S_p} \bar{p}_i\delta u_id\Omega \quad (30)$$

上式左端第二项可化为

$$\begin{aligned}
 \int_{S_c} \sigma_{ij} n_j \delta u_i ds &= \int_{S_c^{(1)}} \sigma_{ij} n_j \delta u_i ds + \int_{S_c^{(2)}} \sigma_{ij} n_j \delta u_i ds \\
 &= \int_{S_c^{(1)}} (-P_{ci}) \delta u_{ci}^{(1)} ds + \int_{S_c^{(2)}} P_{ci} \delta u_{ci}^{(2)} ds \\
 &= - \int_{S_c} P_{ci} \delta (u_{ci}^{(1)} - u_{ci}^{(2)} + \delta_i) ds \\
 &= - \int_{S_c} P_{ci} \delta u_{ci} ds
 \end{aligned} \quad (31)$$

式中 $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = \delta_n$.

将 (31) 式代入 (30) 式, 有

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega + \int_{S_c} P_{ci} \delta u_{ci} ds = \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega + \int_{S_p} \bar{p}_i \delta u_i ds \quad (32)$$

将 (24)、(25) 及 (28.1) 代入 (32) 式, 有

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \varepsilon_{ij} D_{ijkl} \delta \varepsilon_{kl} d\Omega + \int_{S_c} u_{ci} D_{cij} \delta u_{cj} ds \\
 &= \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega + \int_{S_p} \bar{p}_i \delta u_i ds + \int_{S_c} D_{cij} C_{jm} \lambda_m \delta u_{ci} ds
 \end{aligned} \quad (33)$$

(33) 式即为下面进行接触有限元分析的基础.

从虚功方程的推导可知, (32) 式隐含区域 Ω 上的平衡方程, S_p 上的边界条件及接触边界 S_c 上的平衡条件. (33) 式进一步利用了 (25) 及 (28.1) 式, 若认为进行有限元离散后, (24)、(27) 式强制性满足, 则还剩下 (28.2)、(28.3) 式. 因此, 接触问题的完整变分提法应该是在 (28.2)、(28.3) 式约束下求解 (33) 式.

3 有限元离散及线性互补方法

按通常方法离散结构. 要注意的是, 在接触边界 $S_c^{(1)}$ 及 $S_c^{(2)}$ 上节点应成对划分. 由于在 (33) 式中, 除沿 S_c 积分的两项外, 其余各项均与通常的虚功方程相同, 下面仅对沿 S_c 积分的两项作一点说明.

设区域 Ω 用三角形常单元或四节点等参元划分, 则可构造图 4 所示的接触单元, 该接触单元是由相邻的两对接触点对组成的. 设在接触单元内, 相对位移 u_{ci}



图 4 接触单元
Fig.4 The contact element

及流动因子 λ_k 按线性插值. 为保证解的稳定性, 在接触单元内的积分采用梯形法则 [7]. 经过这样处理并进行坐标转换后, 接触单元可与别的单元一样进行组装. 最后, (33) 式可化为

$$[K]\{\varphi\} = \{f\} + [\Phi]\{\lambda\} \quad (34)$$

式中, $[K]$ 为包含接触单元刚阵的总体刚阵, $\{\varphi\}$ 为节点位移向量, $\{f\}$ 为节点力向量, $\{\lambda\}$ 为流动因子向量, $[\Phi]$ 为常数矩阵, 其元素可方便地由 (33) 式最后一项获得.

(34) 式中, $\{\varphi\}, \{\lambda\}$ 都是未知量, 必须建立补充方程方可求解. 补充方程可由 (28.2), (28.3) 式的离散形式获得. 由于 u_{ci} 及 λ_k 在接触单元内均按线性插值, 故从 (21) 式可知, 只要在所有接触单元的节点处满足 (28.2), (28.3) 式即可. 这样, 进行坐标转换后, 可将 (28.2), (28.3) 式用下述离散形式表示

$$[E_\varphi]\{\varphi\} + [E_\lambda]\{\lambda\} + \{\nu\} = 0 \quad (35.1)$$

$$\{\lambda\}^T \{\nu\} = 0, \quad \{\lambda\} \geq 0, \quad \{\nu\} \geq 0 \quad (35.2)$$

式中 $[E_\varphi], [E_\lambda]$ 均为常数矩阵.

(35) 式即为补充方程. 求解时, 先从 (34) 式解出 $\{\varphi\}$

$$\{\varphi\} = [K]^{-1}(\{f\} + [\Phi]\{\lambda\}) \quad (36)$$

再将 (36) 式代入 (35) 式, 并记 $[M] = -[E_\lambda] - [E_\varphi][K]^{-1}[\Phi]$, $\{q\} = -[E_\varphi][K]^{-1}\{f\}$, 最终可得

$$\{\nu\} - [M]\{\lambda\} = \{q\} \quad (37.1)$$

$$\{\lambda\}^T \{\nu\} = 0, \quad \{\lambda\} \geq 0, \quad \{\nu\} \geq 0 \quad (37.2)$$

(37) 式是一个标准的线性互补问题^[8], 可采用 Lemke 等算法求解. 当从 (37) 式求得 $\{\lambda\}$ 后, 代入 (36) 式可求得 $\{\varphi\}$, 接触问题获解.

4 数值算例

按上述方法编制的程序已调试通过, 并进行了大量实例的考核. 限于篇幅, 下面仅举其中一具有代表性的例子.

如图 5, 考虑刚性基础上的弹性圆柱. 设为平面应变问题, 并近似用 1/4 圆柱进行分析. 有限元网格见图 5, 共划分为 76 个单元, 其中, 沿接触边界设置了 8 个接触单元.

取 $E_r = E_n = 100E$. 当 $\mu = 0$, 即无摩擦时, 结果见图 6, 图中还给出了 Hertz 理论解¹⁾ 由图可见, 计算结果与理论值符合得很好, 在接触单元节点处, 接触力的计算值与理论值的最大误差不超过 $|-3.9\%|$.

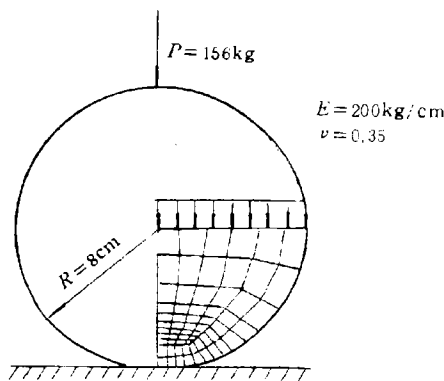


图 5 刚性基础上的弹性圆柱
Fig.5 An elastic cylinder on the rigid foundation

¹⁾ 文 [5] 中所给 Hertz 解接触宽度有误, 本文作了更正.

由图 6 还可看到, 在靠近接触区端点处误差较大. 该误差可望通过缩小该处的单元尺寸而减小.

我们还计算了 $\mu = 0.4$ 时的接触力分布, 结果见图 7. 图中还给出了文 [5] 的计算结果. 可见, 本文的结果是合理的, 图形的变化趋势与文 [5] 的结果也相似.

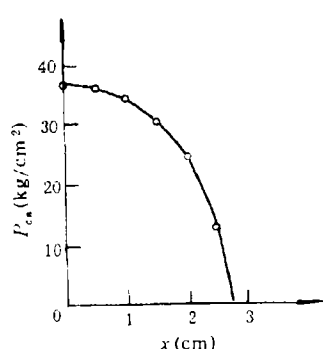


图 6 接触力沿接触面分布 ($\mu = 0$)
——Hertz 解, $\circ$ 本文

Fig.6 The distribution of contact force on the contact surface ($\mu = 0$)
——Hertz solution, $\circ$ This paper

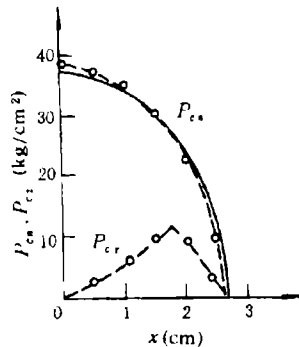


图 7 有摩擦时接触力分布
——Hertz 解 ($\mu = 0$), - - - 文 [5] ($\mu = 0.4$),
 $\circ$ 本文 ($\mu = 0.4$)

Fig.7 The distribution of contact force as the friction exists
——Hertz solution ($\mu = 0$), - - - Ref. [5] ($\mu = 0.4$),
 $\circ$ This paper ($\mu = 0.4$)

上面的计算均是以 $E_\tau = E_n = 100E$ 进行的. 我们知道, E_τ, E_n 是惩罚因子, 其值大小反映了接触条件得以满足的程度. 理论上, E_τ, E_n 应取为无穷大, 但在实际计算中, 只能将 E_τ, E_n 取为某有限的大数 (E_τ, E_n 可以不同), 以避免计算上的困难. 为考察 E_τ, E_n 对计算结果的影响, 我们针对 $\mu = 0$, 计算了 E_τ, E_n 取不同值时的接触力, 其结果见表 1. 从表中可见, 当 $E_\tau = E_n$ 在 $(10 \sim 10^{11})E$ 范围内, 结果均是合理的, 最大误差不超过 5.3%. 当 $E_\tau = E_n \leq E$ 时, 由于接触条件得不到较好的满足, 误差已变得相当大. 当 $E_\tau = E_n \geq 10^{12}E$ 时, 方程病态, 误差也很大, 有时甚至无解. 上述结论是针对本文算例而言的, 对于其它算例, 根据计算经验, 取 $E_\tau = E_n = (10^3 \sim 10^8)E_{\max}$ (这里 $E_{\max}$ 表示接触物体的最大弹性模量), 均可获得满意的结果.

表 1 E_τ, E_n 对数值计算的影响

Table 1 The influence of E_τ and E_n on the numerical calculation

$E_\tau = E_n$	x/cm						Errormax %
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	
Hertz	36.9348	36.2725	34.2663	30.6322	24.6603	13.5495	
E	33.0211	32.5452	30.9258	28.0681	23.7479	17.4832	29.0
$10E$	36.3058	35.8319	33.9157	30.3995	24.6304	14.2633	5.3
10^2E	36.6686	36.2107	34.2640	30.6823	24.6529	13.0239	-3.9
10^6E	36.7106	36.2551	34.3054	30.7180	24.6608	12.8706	-5.0
$10^{10}E$	36.7241	36.3233	34.2670	30.7243	24.6804	12.9674	-4.3
$10^{11}E$	36.8485	36.3740	34.4863	30.7843	24.8424	13.4048	-1.0
$10^{12}E$	37.5545	36.9316	35.5993	30.4867	25.8682	21.1386	56.0
$10^{13}E$	43.2423	41.6611	44.2979	22.2045	47.9616	7.1054	-47.5
$10^{14}E$	No results						

5 结 语

本文从虚功方程出发, 结合接触条件的线性互补表述及有限元离散技术, 给出了求解有摩擦弹性接触问题的一种线性互补方法. 从算例的计算结果看, 这种方法具有较好的精度, 而且由于避免了增量迭代法冗长繁复的迭代, 计算效率也是很高的. 对于无卸载问题, 只需一个增量步即可获得解答. 由于接触单元本质上是一种弹塑性单元, 本文方法可方便地推广至弹塑性接触问题. 我们正在进行这方面的研究.

参 考 文 献

- 1 Rahaman MU, Rowlanes RE, Cook RD, Wilkinson TL. An interactive procedure for finite element stress analysis of frictional contact problem. *Comput & Struct*, 1984, 18(6)
- 2 Bathe KJ, Chaudhary A. A solution method for planar and axisymmetric contact problems, *Int J Num Method Eng*, 1985, 21: 65-88
- 3 Torstinfelt BR. An automatic incrementation technique for contact problems with friction. *Comput & Struct*, 1984, 19: 393-400
- 4 Klarbring A. A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction, *Comput Meth Appl Mech Eng*, 1986, 58: 175-200
- 5 Zhong WX, Sun SM. A parametric quadratic programming approach to elastic contact problems with friction. *Comput & Struct*, 1989, 32(1): 37-43
- 6 Zhong WX, Zhang RL. The parametric variational principle for elastoplasticity, *ACTA Mechanica Sinica*, 1988, 4(2)
- 7 Klarbring A, Björkman G. The treatment of problems in mechanics by mathematical programming. *J Theoretical & Applied Mech*, Special issue, 1988
- 8 Reklaitis GV, Ravindran A, Mragdell K. Engineering optimization, Method & Application, John Wiley and Sons, NY 1983

A LINEAR COMPLEMENTARITY METHOD FOR ELASTIC CONTACT PROBLEMS BASED ON THE PRINCIPLE OF VIRTUAL WORK

Zhu Changming

(Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

Abstract In this paper, a linear complementary contact condition is first derived, and then, base on the principle of virtual work and FEM, a linear complementarity method for elastic problems with friction is proposed. This method can avoid the tiresome iteration procedure used in previous work, and if there is no unloading, only one incremental step is needed for a solution. An example is given to demonstrate the correctness and effectiveness of the method.

Key words frictional contact, linear complementarity method, FEM, penalty