平均函数与有限元基函数的平均修正 [1)]

齐朝晖 陆佑方 冯冠民
(吉林工业大学力学系，长春 130025)

摘要 首次提出了有限元基函数的平均修正法. 经过平均修正的有限元基函数，一方面保留了修正前的许多特性，另一方面又使修正后的基函数具有任意阶的导数. 从而使单元间包括导数在内的任何不协调性消除. 并对引入平均修正后所引起的单元形成，单元组装等过程的改变进行了讨论.

关键词 有限元，基函数，协调性

引 言

有限元法的精度与单元间场变量的连续性有很大的关系. 许多工程技术人员把单元间的应力跳跃大小作为精度估计的一种粗略度量 [1]. 计算和实测间的比较也证明了二者之间的确有很大的关系. 因此，在用有限元法进行结构分析时，人们总是选用那些单元间场变量连续性好的单元. 用传统的 Ritz 法虽然能使场变量用一组连续函数逼近，但为保证方法的收敛性， Ritz 基的个数必须足够大. 原因在于用少数几个简单的解析函数是难以给出复杂的场变量的较好近似. 位移法有限元通过分片连续函数去近似描述场变量，极大地增强了其表示复杂函数的能力，但同时也使其光滑性大大降低，所得的应力、应变解往往带有不连续性. 杂交混合元以及能通过分片检验的非协调元，虽在一定程度上克服了位移法的缺点，但仍未完全克服单元间的不协调性. 并且这些方法也有其内在的不足之处. 如非协调元的可靠性不高，杂交混合元的变量太多. 这给那些通过有限元法进行结构应力分析的工程技术人员带来了许多不便之处.

那么，是否可以通过对有限元基函数进行恰当的修正，使修正后的有限元基函数一方面保留其表示复杂函数的能力，同时又消除单元间的不协调性呢？我们首先注意到，所谓消除单元间的不协调性，数学上等价于对有限元基函数进行光滑化，即通过对基函数作适当的映射改善其连续性. 能做到这一点的映射叫光滑因子. 如果我们能够找到一个光滑因子，一方面能在数学意义上光滑有限元基函数，另一方面又在物理意义上是合理的，那么，我们可以期望经过光滑因子修正后的有限元基函数，能够使解的精度有所提高.

这样的光滑因子的确存在.

1) 国家自然科学基金资助项目.
1993-12-10 收到.

1 平均函数

我们首先看一下定义于 n 维实空间的函数

$$w_\rho(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} C_0 \exp\left(\dfrac{\rho^2}{||\boldsymbol{x}||^2 - \rho^2}\right) & \text{当} ||x|| < \rho \text{ 时} \\ 0 & \text{当} ||x|| \geq \rho \text{ 时} \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 为 R^n 空间中的向量；它的模 $||\boldsymbol{x}|| = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. C_0 为一实常数，它的选取应使

$$\int_{R^n} w_\rho(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1 \tag{2}$$

不难证明：$w_\rho(\boldsymbol{x})$ 具有任意阶导数，并且它们的非零区域只限于 $||\boldsymbol{x}|| < \rho$ 的球域内.

对任意局部可积的函数 $u(\boldsymbol{x})$, 作积分变换

$$u_\rho(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega u(\boldsymbol{y}) w_\rho(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{y} = J_\rho(u) \tag{3}$$

其中 Ω 为 $u(\boldsymbol{x})$ 的可积区域. 对某一固定的 $\boldsymbol{x}_0$, 上式中的被积函数只在 $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| \leq \rho$ 内不为零. 注意到 $w_\rho(\boldsymbol{x}) \geq 0$ 以及 (2) 式所述的性质，函数 $u_\rho(\boldsymbol{x}_0)$ 实质上是 $u(\boldsymbol{x})$ 在以 $\boldsymbol{x}_0$ 为中心，半径为 ρ 的区域内的值的平均修正. 其中 $\boldsymbol{x}_0$ 处的权系数最高，随着 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}_0$ 间距离的加大，加权系数迅速减小. 而当 ρ 趋于零时，$w_\rho(\boldsymbol{x})$ 趋于 δ 函数，此时 $u_\rho(\boldsymbol{x})$ 与 $u(\boldsymbol{x})$ 相同. 因此，当 ρ 是个小量时，$u_\rho(\boldsymbol{x})$ 与 $u(\boldsymbol{x})$ 值之间的差别也是个小量. 但只要 $\rho > 0$, 无论 ρ 有多么小，$u_\rho(\boldsymbol{x})$ 的函数性质与 $u(\boldsymbol{x})$ 间都可能存在很大的差别. 主要是 $u_\rho(\boldsymbol{x})$ 的可导性得到了极大的改善. 事实上 $u_\rho(\boldsymbol{x})$ 具有任意阶连续的偏导数. 这一结论可由文献 [2,3] 所述的理论证明.

我们把 $u_\rho(\boldsymbol{x})$ 称为 $u(\boldsymbol{x})$ 的平均函数.

2 有限元基函数的平均修正

在位移法有限元中，单元内的场变量通常用一组解析函数，如多项式，三角函数等的组合近似描述. 所用的解析函数序列，当其个数无穷多时，通常能够构成连续函数所在空间的基底. 这就是有限元法所要求的基函数的完备性. 当单元尺寸趋于零时，场变量也越来越易于用有限个基函数描述. 因此，有限元法可通过两种途径得到精确解：减小单元尺寸和增加单元基函数的个数. 后者的极端情形就是全域内的 Ritz 法 [1], 对复杂结构它的不适用性也是众所周知的. 理论上，这两种途径同时采用对提高收敛速度显然是较佳的，然而，具体实现时却是很困难的. 原因在于尽管有限元基函数在它所对应的单元内是连续的，但在单元所划分的区域外，它的函数值连同它的各阶导数值在内都为零，所以从全域上看，它是不连续的. 事实上，

由单元基函数 $B_i^{(e)}, i=1,n$ 的组合所表示的单元场变量可描述为

$$f^{(e)}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} f_i^{(e)} B_i^{(e)} & \boldsymbol{x} \in \Omega_e \\ 0 & \boldsymbol{x} \notin \Omega_e \end{cases} \tag{4}$$

其中 Ω_e 为单元的几何区域．从中我们可以看出：整个域内的场变量是由一系列具有紧支柱的不连续函数逼近的．然而，虽然许多文献将全域内的场变量 $f(\boldsymbol{x})$ 写作

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{e=1}^{Ne} f^{(e)}(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

但上式中的求和号并不能理解为普通意义上的相加．其实由于 $B_i^{(e)}$ 是不连续函数，场变量在单元交界处的值只能以极限的方式定义，即对某点 $\boldsymbol{x}_0 \in \sum_{i\in K} \cap \Omega_{e_i}$．K 为含 x_0 点的所有单元的序号集，$f(\boldsymbol{x}_0)$ 在某单元 Ω_{e_i} 的值

$$f(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{x \to x_0} f^{(e)}(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

这些极限值只有在 $f(x)$ 是连续函数才是彼此互等的．对 $f(x)$ 的导数值也有完全相同的结论．因此 $f(x)$ 在单元交界处的值并不等于在该边界处相交的单元的场变量在该处值的和．因而，如果我们增加某一单元基函数的个数，单元间的协调性极可能会被破坏．现有的解决方法通常是将所有单元的基函数个数共同增加．实际分析中常遇到这样的情况：结构的某一部分只用低阶单元分析就够了，但另一部分却需要使用高阶单元．这一切都是由有限元基函数的不光滑性引起的．

用上节所述的平均函数对单元的场变量进行平均修正，得到新的场变量表述

$$f_\rho^{(e)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(e)} J_\rho(B_i^{(e)}) \tag{7}$$

此时 $f_\rho^{(e)}(\boldsymbol{x})$ 已有任意阶连续导数．将全域内的场变量写作

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{e=1}^{Ne} f_\rho^{(e)}(\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

是完全可行的．其中的求和就是普通意义下的求和．当我们出于分析的需要，增加某单元基函数个数时，只要按 (7) 式进行平均修正，不会对单元的基函数的协调性有任何破坏．不仅如此，对原本存在一定不协调性的单元，修正后的单元将没有任何不协调性，因而数值解的应力跳跃现象也不存在了．

为保证修正后的单元能在单元尺寸趋于零时给出精确解，我们按下式选取 ρ，即

$$\rho = kh \tag{9}$$

其中 h 为所有单元中最小内径尺寸；k 为小于 1 的某个正常数．显然，当 $h \to 0$ 时，$\rho \to 0$, $f_\rho(\boldsymbol{x})$ 也趋于修正前的场变量．因此，如果修正前的基函数能使解收敛，修正后的也同样能．

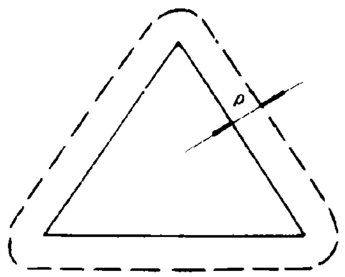

图 1 实线和虚线分别表示修正前后的单元基函数非零区域
Fig.1 ρ-nonzero domain of element basis function

从平均函数的性质可知：单元基函数经过平均修正后，它的非零区域也不再是单元的几何域，而是由一些与单元几何边界的最短距离等于 ρ 的点所围成，如图 1 所示. 单元场变量也不只和该单元的节点参数有关，而是与和该单元有共同点的所有单元的节点参数都相关. 如果还沿用传统位移法有限元中的方法去形成和组装有限单元，单元的列式过程将是非常复杂的. 传统有限元的单元形成和组装是基于

$$\int_{\Omega}(\ )\mathrm{d}\Omega=\sum_{e=1}^{N}\int_{\Omega_e}(\ )\mathrm{d}\Omega_e \tag{10}$$

的原理，并利用每个单元的基函数只在该单元几何域内非零的性质完成的. 这一性质对修正后的有限元基函数已不存在了. 由于修正后的有限元基函数在全域内是连续的，把它当作 Ritz 基函数是可行的，但同传统的 Ritz 法不同，这组 Ritz 基的非零域又是很小的. 因此，我们可以说通过对有限元基函数作平均修正，使有限元法具备了 Ritz 法和传统有限元法两方面的优点. 采用 Ritz 法列式原理，即通过

$$\int_{\Omega}(\mathrm{L}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{g})\cdot\varphi_i\mathrm{d}\Omega=0 \tag{11}$$

得到结构的平衡方程是比 (10) 式更好的选择. 式中 L 为某种算子；$\boldsymbol{u}$ 为待定的场变量；$\mathrm{L}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{g}=0$ 为场变量应满足的方程；$\boldsymbol{\varphi}_i$ 为通过对有限元基函数作平均修正所得到的 Ritz 基. 因 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 只在某单元的扩充域内非零，上式的积分域可换作单元扩充域 Ω_e'. 对上式通过数值积分求方程系数时，要用 (1) 式求积分函数的值，使计算量有所增加，这是该方法的不足之处.

基函数修正后带来的另一个问题是边界条件的处理. 对处于边界点的基函数值的计算要用到边界外点的值. 为使边界条件更好地满足，一方面应令边界单元的修正系数 ρ 取得很小，另一方面定义单元外法线上各点的值与它和边界交点处的值相等.

以上我们主要讨论了如何用修正后的有限元基函数进行列式. 实际上，我们还可以用平均修正函数对位移法有限元求出的结果进行修正，从而得到连续的应力场. 其中场函数的导数按下式计算

$$\frac{\partial f_\rho(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}=\int_{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\rho}u(\boldsymbol{y})\frac{\partial w_\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{y} \tag{12}$$

其证明参见文献 [3]. 虽然本文讨论的有限元基函数都是目前有限元法中所使用的，但这不是平均修正所必须的. 根据本文所述的原理构造新的单元是完全可能的.

3 结　语

采用平均修正函数修正有限元基函数，可以使数值解更多地保留场变量的定性性质．并使单元构造完全摆脱不协调性的困扰，为构造新单元提供了可行的工具．虽然它使单元形成及组装过程复杂一些，但它所带来的便利也是很明显的．

参　考　文　献

1 Zienkiewicz OC, Craig A. Adaptive Refinement, Error Estimates, Multigrid Solution and Hierarchic Finite Element Method Concepts, in 《Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations》, John Wiley & Sons Ltd. 1986

2 Schwartz L. Theorie des Distrubutions, Hermann, Paris, vol, I. 1950

3 Orden JT, Reddy JN. An Intruduction to the Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley & Sons Ltd. 1976

MEAN FUNCTIONS AND MEAN MODIFICATION OF FINITE ELEMENT BASIS FUNCTION

Qi Zhaohui　Lu Youfang　Feng Guanmin

(*Jilin University of Technology, Changchun* 130025, *China*)

Abstract　A method is proposed to mean-modify finite element basis functions. In many aspects the mean-modified functions behave much like the unmodified ones, but are much smoother, and the non-conformity between elements are completely eliminiated. Also disscussed are the change induced in the processes of element forming and assembling.

Key words　finite element, basis functions, conformity