

关于复合材料弹塑性的一个理论描述¹⁾

南策文

(武汉工业大学新材料研究所, 武汉 430070)

摘要 根据格林函数理论和微扰方法, 提出了描述复合材料弹塑性 (非线性应力 - 应变关系) 行为的简单理论. 对陶瓷颗粒增强金属基复合材料, 给出了两个不同的解. SiC/Al 复合材料的计算实例表明, 理论结果与实验结果是相符合的.

关键词 复合材料, 弹塑性, 微观力学

前 言

复合材料线弹性问题在近 30 年来已广泛被研究了^[1]. 在力学界, 通常使用的研究方法是微观力学模型和变分原理. 前者的基础是 Eshelby-Hill-Mori-Tanaka(EHMT) 理论^[2-4], 后者则以 Hashin-Strikman 变分原理^[5] 的奠基. 近来, 人们的注意力已开始转向复合材料的非线性力学问题, 但由于其难度大, 致使研究受到了相当的限制.

对塑性基 (如金属基、树脂基) 复合材料, 非线性弹塑行为是极为重要的实际问题. 对各向同性复合材料弹塑性行为, 最近, Weng 等人^[6,7] 根据改进的 EHMT 模型进行了有意义的研究工作. 他们提出了一个用于描述两相复合材料在单向加载条件下弹塑性行为的近似理论, 它只适用于在塑性基体中的包裹相含量很低的两相复合材料.

在本文中, 根据格林函数理论及微扰方法^[8], 提出了用于描述和预示复合材料在简单 (非循环) 加载条件下弹塑性行为的理论. 在低浓度条件下, 本文结果蜕变到 Weng 的结果. 在下面的分析中, 将采用通常符号记法, 用黑体表示张量, 且张量的乘积写成直接形式, 如 $\sigma = C\varepsilon$.

1 理论描述

在单调加载条件下, 材料应力 - 应变关系可用形变理论来描述^[6,7], 控制复合材料弹塑性行为的场方程在表现形式上类似于线弹问题, 即

$$\sigma = C^*(\varepsilon)\varepsilon \quad (1a)$$

$$\nabla \sigma = 0 \quad (1b)$$

但此时, 这些方程都是非线性的. 这里 σ 、 ε 分别是应力、应变张量; $C^*(\varepsilon)$ 是“割线”模量, 它是应变场的函数. 这些张量都是取决于空间位置 $\mathbf{r}$ 的局部量. 复合材料

¹⁾ 国家“863”计划资助课题.

1993-04-26 收到第一稿, 1993-12-27 收到修改稿.

的有效割线模量 $\mathbf{C}^{**}$ 可根据平均应力 $\langle \sigma \rangle$ 和应变 $\langle \epsilon \rangle$ 来定义

$$\langle \sigma \rangle = \mathbf{C}^{**} \langle \epsilon \rangle \quad (2)$$

这里引入一个只取决于均匀参考介质均匀应变场 ϵ^0 的任意量 $\mathbf{C}_0^*$, 它不依赖于 $\mathbf{r}$. 因此, 可把局部模量 $\mathbf{C}^*(\epsilon)$ 写成

$$\mathbf{C}^*(\epsilon) = \mathbf{C}_0^* + \delta \mathbf{C}^*(\epsilon) \quad (3)$$

其 $\delta \mathbf{C}^*(\epsilon)$ 是相对于 $\mathbf{C}_0^*$ 的起伏.

根据式 (1a) 和 (3), 可把非线性平衡方程 (1b) 写成

$$\mathbf{C}_0^* \nabla \epsilon + \nabla [\delta \mathbf{C}^*(\epsilon) \epsilon] = 0 \quad (4)$$

进一步, 按位移变量 $\mathbf{u}$ 写成

$$\mathbf{C}_0^* \nabla \nabla \mathbf{u} + \nabla [\delta \mathbf{C}^*(\epsilon) \nabla \mathbf{u}] = 0 \quad (5)$$

根据格林函数方法^[8], 得到

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^0 + \int \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla [\delta \mathbf{C}^*(\epsilon, \mathbf{r}') \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}' \quad (6)$$

其中 $\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 是位移格林函数, 它满足

$$\mathbf{C}_0^* \nabla \nabla \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \delta \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0 \quad (7)$$

通过对式 (6) 先微分, 后分部积分, 即可得到复合材料中的应变场

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon^0 + \int \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta \mathbf{C}^*(\epsilon, \mathbf{r}') \epsilon(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (8)$$

其中 $\mathbf{G}$ 是调整格林函数^[9]

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla \nabla' \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (9)$$

上标 “'” 表示对 $\mathbf{r}'$ 微分. 式 (8) 可按算符表示式写成

$$\epsilon = \epsilon^0 + \mathbf{G} \delta \mathbf{C} \epsilon \quad (10)$$

此方程有迭代解

$$\epsilon = \epsilon^0 + \mathbf{G} \mathbf{T}(\epsilon) \epsilon^0 \quad (11)$$

$$\mathbf{T}(\epsilon) = \delta \mathbf{C}^*(\epsilon) [\mathbf{I} - \mathbf{G} \delta \mathbf{C}^*(\epsilon)]^{-1} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{I}$ 是单位张量.

比较 (10) 式和 (11) 式, 有

$$\delta \mathbf{C}^*(\epsilon) \epsilon = \mathbf{T}(\epsilon) \epsilon^0 \quad (13)$$

把式 (3) 代入 (1a) 中, 并取平均

$$\langle \sigma \rangle = \mathbf{C}_0^s \langle \epsilon \rangle + \langle \delta \mathbf{C}^s(\epsilon) \epsilon \rangle = \mathbf{C}_0^s \langle \epsilon \rangle + \langle \mathbf{T}(\epsilon) \rangle \epsilon^0 \quad (14)$$

进一步, 利用式 (11), 可得到 $\mathbf{C}^{s*}$ 为精确解

$$\mathbf{C}^{s*} = \mathbf{C}_0^s + \langle \mathbf{T}(\epsilon) \rangle (\mathbf{I} + \mathbf{G} \mathbf{T}(\epsilon))^{-1} \quad (15)$$

这个表达式与用于确定线弹模量的表达式^[8]具有相同的表观形式. 这暗示了一个线弹模量与弹塑性割线模量之间的对应原理^[9].

根据 $\mathbf{C}_0^s$ 的选择, 从式 (15) 中可得到二种好的近似解^[8]: (1) 取 $\mathbf{C}_0^s = \mathbf{C}_1^s$ (下标 1 表示基体相), 这称之为平均 t -矩阵近似 (ATA), 它只适用于低浓度极限情况; (2) 取 $\mathbf{C}_0^s = \mathbf{C}^{s*}$, 这称之为耦合势近似 (CPA), 它通过近似处理颗粒间相互作用, 把低浓度下的 ATA 结果扩展到较高浓度范围. ATA 给出基体相和包裹相中的平均应力 (这是确定屈服判据的核心) 为

$$\sigma^{(1)} = \mathbf{C}_1^s \langle (\mathbf{I} + \mathbf{G} \mathbf{T}) \mathbf{C}^{s*} \rangle^{-1} \langle \sigma \rangle \quad (16a)$$

$$\sigma^{(2)} = \mathbf{C}_2^s \langle (\mathbf{I} + \mathbf{G} \mathbf{T}^{(2)}) \rangle \langle (\mathbf{I} + \mathbf{G} \mathbf{T}) \mathbf{C}^{s*} \rangle^{-1} \langle \sigma \rangle \quad (16b)$$

CPA 则给出

$$\langle \mathbf{T} \rangle = 0 \quad (17a)$$

$$\sigma^{(i)} = \mathbf{C}_i^s \langle (\mathbf{I} + \mathbf{G} \mathbf{T}^{(i)}) \rangle \langle (\mathbf{I} + \mathbf{G} \mathbf{T}) \mathbf{C}^{s*} \rangle^{-1} \langle \sigma \rangle \quad (17b)$$

其中上、下标 i 表示第 i 相.

2 讨论与结论

为了更好地理解上述结果, 下面考虑一个简单例子, 如陶瓷颗粒增强金属基复合材料. 考虑金属相和陶瓷颗粒是各向同性的, 且陶瓷颗粒是球状的. 金属相的应力-塑性应变关系可用 Ludwik 方程表示为^[6]

$$\sigma^e = \sigma_y + h(\epsilon^{pe})^n \quad (18)$$

其中 σ^e 和 ϵ^{pe} 是 von Mises 有效应力和塑性应变; σ_y , h 和 n 依次是金属的初始屈服应力、强度系数和加工硬化指数. 各向同性金属的割线杨氏模量 E_1^s 为

$$E_1^s = 1 / \left\{ 1/E_1 + \epsilon^{pe} / [\sigma_y + h(\epsilon^{pe})^n] \right\} \quad (19)$$

其中 E_1 是线弹杨氏模量. 金属不可压缩性的假定导致

$$K_1^s = K_1, \quad \mu_1^s = E_1^s / (3 - E_1^s / 3K_1) \quad (20)$$

其中 K_1 是线弹性体模量, μ_1^s 为割线剪切模量.

从 (15) 和 (16) 式可直接得到这种复合材料有效模量 K^{s*} 和 μ^{s*} , 以及平均应力、屈服强度的 ATA 结果. 我们发现 ATA 结果同 Weng 等人^[6,7]导出的微观力学结果

是完全一致的,它适用于陶瓷体积分数 f_2 很小及陶瓷颗粒完全弥散于金属基体中的复合材料.

当陶瓷颗粒并非完全弥散在金属基体中时, CPA 比 ATA 更为合适. 复合材料有效模量的 CPA 结果可直接从式 (17a) 中得到

$$(1-f_2)\frac{K_1-K^{s*}}{3K_1+4\mu^{s*}}+f_2\frac{K_2-K^{s*}}{3K_2+4\mu^{s*}}=0 \quad (21a)$$

$$(1-f_2)\frac{\mu_1^s-\mu^{s*}}{\mu_1^s+y^{s*}}+f_2\frac{\mu_2-\mu^{s*}}{\mu_2+y^{s*}}=0 \quad (21b)$$

其中

$$y^{s*}=\mu^{s*}(9K^{s*}+8\mu^{s*})/(6K^{s*}+12\mu^{s*}) \quad (21c)$$

通过把应力分解成静水应力 (σ_{KK}) 和偏应力 (σ'_{ij}), 从式 (17b) 中可得到金属相中的平均应力为

$$\sigma_{KK}^{(1)}=[K_1(K_2-K^{s*})/(1-f_2)K^{s*}(K_2-K_1)]\langle\sigma_{KK}\rangle \quad (22a)$$

$$\sigma'_{ij}^{(1)}=[\mu_1^s(\mu_2-\mu^{s*})/(1-f_2)\mu^{s*}(\mu_2-\mu_1^s)]\langle\sigma'_{ij}\rangle \quad (22b)$$

进一步, 从式 (18) 和 (22b) 中, 可得到复合材料的初始屈服强度 σ_y^*

$$\sigma_y^*=\sigma_y(1-f_2)\mu^*(\mu_2-\mu_1)/\mu_1(\mu_2-\mu^*) \quad (23)$$

其中 μ_1 和 μ^* 均为对应的线弹问题的值. 这些 CPA 结果不同于 Weng 等人的微观力学结果, 是本文给出的新结果.

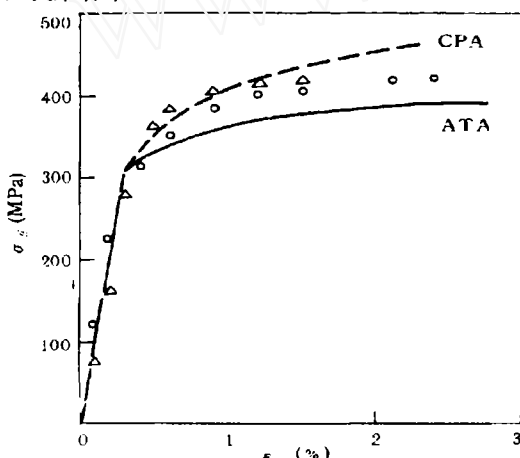


图 1 具有纵横比为 0.25、体积分数为 0.2 的片状增强剂的 SiC/Al 复合材料的理论预示和实验数据之间的比较 (Δ : 无挤压, T6 处理; $\circ$: 10% 挤压, T6 处理)

Fig.1 Comparison between the theoretical predictions and the experimental data (open triangles: 0% reduction and T6 heating; open circles; 10% reduction and T6 heating) of a SiC/Al composite, with platelet-type reinforcements at an aspect ratio of 0.25 and $f_2 = 0.2$

图 1 显示了对 SiC/Al 复合材料的一个算例, 由此图可看出, 理论结果与实验结果是一致的. ATA 结果 (相同于 Weng 等人的微观力学结果) 低估了塑性变形范围

的应力值, 而且仅给出了屈服强度与 f_2 之间简化线性依赖关系. CPA 则对 ATA 是一个改进^[8]. 最后, 需指出的是: (1) 这里仅考虑了球颗粒包裹相, 但对非球状颗粒(如晶须、纤维)增强复合材料, 也可类似地得到 ATA 和 CPA 结果^[9], 图 1 显示的就是片状增强相颗粒的结果; (2) 本文仅给出了精确解 (15) 式的一级 ATA 和 CPA 结果, 它们在 f_2 较低的范围是很好的近似, 当 f_2 较大时, 应考虑颗粒之间的相互作用, 这就要求进一步求解式 (15) 的高级近似解.

参 考 文 献

- 1 Hashin Z. Analysis of composite materials —— A survey. *J Appl Mech*, 1983, 50(3): 481-505
- 2 Eshelby JD. The determination of the elastic field of an ellipsoid inclusion, and related problems. *Proc. Roy. Soc. London, Ser A*, 1957, 241(3): 376-397
- 3 Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials, *J Mech Phys Solids*, 1965, 13(3): 213-222
- 4 Mori T and Tanaka K. Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall*, 1973, 21(4): 571-574
- 5 Hashin Z and Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. *J Mech Phys Solids*, 1963, 11(2): 127-140
- 6 Tandon GP and Weng GJ. A theory of particle-reinforced plasticity. *J Appl Mech*, 1988, 55(1): 126-135
- 7 Qiu YP and Weng GJ. The influence of inclusion shape on the overall elastoplastic behavior of a two-phase isotropic composite. *Int J Solid Struct*, 1991, 27(12): 1537-1550
- 8 Nan Ce-wen. Physics of inorganic inhomogeneous materials. *Prog Mater Sci*, 1993, 37(1): 1-116
- 9 Nan Ce-wen, Yuan Runzhang. Multiple-scattering solution to nonlinear mechanical properties of binary elastic-plastic composite media. *Phys Rev B*, 1993, 48(3): August

ON A THEORY FOR ELASTOPLASTICITY OF COMPOSITES

Nan Cewen

(Research Institute for Advanced Materials, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

Abstract A simple theory for describing elastoplastic behavior (nonlinear stress-strain relations) of composites has been developed in terms of Green's function theory and perturbation method. For the metal-matrix composites reinforced with ceramic particles, two different solutions, namely average t -matrix approximation (ATA) and coherent-potential approximation (CPA), have been given. A calculation example of SiC_p/Al composites indicates that the theoretical predictions are consistent with experimental results.

Key words composite, elastoplasticity, micromechanics