第 26 卷 第 5 期　　力 学 学 报　　Vol. 26, No.5
1994 年 9 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Sept., 1994

半无限弹性空间域内点加振格林函数的计算 [1)]

林 皋　　李炳奇　　申爱国
(大连理工大学土木工程系，大连 116024)

摘要　本文给出了满足全部自由面边界条件的半无限弹性空间域内点加振的 Green 函数. 利用变形的 Hankel 函数，在复数域内进行无限积分的有限化，从而使 Green 函数的计算变得比较简单和方便.

关键词　Green 函数，弹性半空间，域内加振

引 言

在分析结构与地基动力相互作用问题时，经常将地基视为弹性波的传播媒体，而在进行波动分析时，非常重要的是求解半无限弹性地基中内部点加振的格林 (Green) 函数. 尤其是近年来，被经常采用的分析方法之一的边界元法的广泛应用，点加振的基本解作为边界元法的基础，其重要性更为突出. 但是，由于格林函数表达式的复杂性，给计算工作带来很大的困难. 有的作者采用全空间的格林函数，在自由面进行离散来研究拱坝的动力相互作用问题 [1]; 有的作者则利用 Kelvin 解进行迭加来代替格林函数进行埋置基础的研究，但在自由面上部分边界条件不能得到满足 [2]. 本文推导了满足全部边界条件的半无限弹性空间域内加振的格林函数，该解在 Kelvin 解迭加的基础上增加一个积分项. 积分域的无限性和被积函数的尖锐性、振荡性使计算具有一定的困难. 本文在复数域中，将无限积分有限化，很好地解决了这一问题.

1 弹性半空间域内点加振格林函数的求解

以正交坐标系表示的弹性体波动方程的基本形式如下：

位移和应变关系式　$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$　(1)

本构关系式　$\sigma_{ij} = [E\nu/(1+\nu)(1-2\nu)] \cdot \varepsilon_{ij}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}$　(2)

平衡方程式　$Gu_{i,jj} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot u_{i,ji} + X_i'(x,y,z,t) = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$　(3)

式中 i,j 为坐标分量，取 1 、 2 、 3; "," 表示偏导数； u_i 为 i 方向位移； X_i' 为 i 方向外力； E 、 G 为弹性模量和剪切模量； ν 为泊桑比； ρ 为密度.

1) 高校博士点基金资助课题.
1992-12-29 收到第一稿， 1994-01-25 收到修改稿.

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

令 (3) 式中的 X_i' 为零给出齐次解，并将其表示为

$$[L_{ij}]\{u_j\}=0 \tag{4}$$

式中的系数行列式为

$$\det(L_{ij})=G^2\Big\{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Big\}\Delta_2^2\cdot\Delta_1 \tag{5}$$

其中：$\Delta_1=\Delta-\dfrac{1}{c_1^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$，$\Delta_2=\Delta-\dfrac{1}{c_2^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$，$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$，

$c_1=\sqrt{E(1-\nu)/(1+\nu)(1-2\nu)/\rho}$，$c_2=\sqrt{G/\rho}$.

c_1 和 c_2 为纵波和横波波速.

求解 (4) 式得

$$\left.\begin{aligned}
u_1&=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial}{\partial x}X_1+\frac{\partial}{\partial y}Y_1+\frac{\partial}{\partial z}Z_1\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial X_2}{\partial y}-\frac{\partial Y_2}{\partial x}\Big)-\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial Z_2}{\partial x}-\frac{\partial X_2}{\partial z}\Big)\\
u_2&=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial}{\partial x}X_1+\frac{\partial}{\partial y}Y_1+\frac{\partial}{\partial z}Z_1\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial Y_1}{\partial x}-\frac{\partial Z_2}{\partial y}\Big)-\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial X_2}{\partial y}-\frac{\partial Y_2}{\partial x}\Big)\\
u_3&=\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial}{\partial x}X_1+\frac{\partial}{\partial y}Y_1+\frac{\partial}{\partial z}Z_1\Big)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial Z_2}{\partial x}-\frac{\partial X_2}{\partial z}\Big)-\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial Y_2}{\partial z}-\frac{\partial Z_2}{\partial y}\Big)
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式中 X_1 、Y_1 、Z_1 和 X_2 、Y_2 、Z_2 分别为满足纵波和横波波动方程的势函数，即

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_1\{X_1,Y_1,Z_1\}^{\mathrm{T}}=0\\
\Delta_2\{X_2,Y_2,Z_2\}^{\mathrm{T}}=0
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

当在原点处作用点荷载 x_i' 时，加振荷载及位移的表达式如下

$$\left.\begin{aligned}
x_i'&=x_i'\delta(x,y,z)e^{i\omega t}\\
u_i&=u_i(x,y,z)e^{i\omega t}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

对 (8) 式进行 Fourier 变换得

$$\left.\begin{aligned}
X_i'&=\int\int\int_{-\infty}^{\infty}x_i'\delta(x,y,z)e^{i(k_1x+k_2y+k_3z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
U_i&=\int\int\int_{-\infty}^{\infty}u_i(x,y,z)e^{i(k_1x+k_2y+k_3z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

对平衡方程 (3) 式两边进行 Fourier 变换用 U_i 表示如下 (省略 $e^{i\omega t}$)

$$\left.\begin{aligned}
(GK^2+Ak_1^2-\rho\omega^2)U_1+A(k_1k_2U_2+k_1k_3U_3)&=X_1'\\
(GK^2+Ak_2^2-\rho\omega^2)U_2+A(k_1k_2U_1+k_2k_3U_3)&=X_2'\\
(GK^2+Ak_3^2-\rho\omega^2)U_3+A(k_1k_3U_1+k_1k_3U_2)&=X_3'
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式中： $K^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$ ，　　$A = E/2(1+\nu)(1-2\nu)$.

求解 (10) 式并进行逆变换得特解如下

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{e^{i\omega t}}{4\pi G}\left\{\frac{e^{-i\beta_2 R}}{R}X_1' + \frac{1}{\beta_2^2}X'\cdot\nabla\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R}\left(e^{-i\beta_2 R} - e^{-i\beta_1 R}\right)\right\} \\ u_2 &= \frac{e^{i\omega t}}{4\pi G}\left\{\frac{e^{-i\beta_2 R}}{R}X_2' + \frac{1}{\beta_2^2}X'\cdot\nabla\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{R}\left(e^{-i\beta_2 R} - e^{-i\beta_1 R}\right)\right\} \\ u_3 &= \frac{e^{i\omega t}}{4\pi G}\left\{\frac{e^{-i\beta_2 R}}{R}X_3' + \frac{1}{\beta_2^2}X'\cdot\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{R}\left(e^{-i\beta_2 R} - e^{-i\beta_1 R}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中： $X'\cdot\nabla = X_1'\dfrac{\partial}{\partial x} + X_2'\dfrac{\partial}{\partial y} + X_3'\dfrac{\partial}{\partial z}$, $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\beta_1^2 = \omega^2/c_1^2$, $\beta_2^2 = \omega^2/c_2^2$.

以上的 (6) 式和 (11) 式给出了波动方程全域内的齐次解和特解. 下面以半无限弹性体内部点竖向加振为例给出半空间的格林函数及其求解方法. 如图 1 所示，在半无限弹性体 ($z \geq 0$) 内某点作用有竖向单位激振力 $\delta(r, z-c)e^{i\omega t}$, 由于具有轴对称性，选取柱坐标系如图. 假定在 z 轴上与原点对称的像点上作用有同样的假想力 $\delta(r, z+c)e^{i\omega t}$. 利用 (11) 式迭加后可得

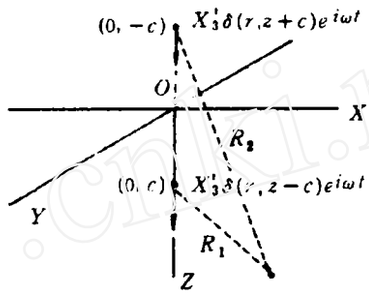

图 1
Fig.1

$$_TU_r = \frac{1}{4\pi G}\cdot\frac{1}{\beta_2^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left\{\frac{1}{R_1}\left(e^{-i\beta_2 R_1} - e^{-i\beta_1 R_1}\right)X_3' + \frac{1}{R_2}\left(e^{-i\beta_2 R_2} - e^{-i\beta_1 R_2}\right)X_3''\right\}e^{i\omega t}$$

$$\begin{aligned} _TU_z = \frac{1}{4\pi G}\Bigg[&\left\{\frac{1}{R_1}e^{-i\beta_2 R_1} + \frac{1}{\beta_2^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\frac{1}{R_1}\left(e^{-i\beta_2 R_1} - e^{-i\beta_1 R_1}\right)\right\}\right\}X_3' + \left\{\frac{1}{R_2}e^{-i\beta_2 R_2}\right. \\ &\left.+\frac{1}{\beta_2^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\frac{1}{R_2}\left(e^{-i\beta_2 R_2} - e^{-i\beta_1 R_2}\right)\right\}\right\}X_3''\Bigg]e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{12}$$

式中： $R_1^2 = r^2 + (z-c)^2$, $R_2^2 = r^2 + (z+c)^2$, $X_3' = X_3'' = 1$.

由 (12) 式可以求得应力 $_T\sigma_{zz}$ 和 $_T\sigma_{zr}$, 且在自由表面有

$$(_T\sigma_{zz})_{z=0} = 0\ ,\qquad (_T\sigma_{zr})_{z=0} \neq 0 \tag{13}$$

由于不完全满足自由面的边界条件，我们补充取势函数 Z_1 和 Z_2, 由 (6) 式可得补充位移

$$\left.\begin{aligned} _hU_r &= \frac{\partial^2}{\partial r\partial z}(Z_1 - Z_2) \\ _hU_z &= \frac{\partial^2}{\partial z^2}Z_1 + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)Z_2 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

与 (14) 式相对应的应力为

$$\left.\begin{aligned}
{}_h\sigma_{zr} &= G\frac{\partial}{\partial r}\Big\{2\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z_1+\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)Z_2\Big\}\\
{}_h\sigma_{zz} &= E/(1+\nu)(1-2\nu)\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Big[(1-2\nu)\Big\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z_1+\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big)Z_2\Big\}\\
&\quad+\nu\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)Z_1\Big]
\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

将 Z_1 、 Z_2 对 x 、 y 进行 Fourier 变换得

$$\left.\begin{aligned}
\overline{Z}_1 &= \int\int_{-\infty}^{\infty} Z_1 e^{i(k_1x+k_2y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
\overline{Z}_2 &= \int\int_{-\infty}^{\infty} Z_2 e^{i(k_1x+k_2y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

$\overline{Z}_1$ 和 $\overline{Z}_2$ 分别满足纵波和横波的波动方程

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\overline{z}_1}{\mathrm{d}z^2}-(k_1^2+k_2^2-\beta_1^2)\overline{Z}_1=0\\
\frac{\mathrm{d}^2\overline{z}_2}{\mathrm{d}z^2}-(k_1^2+k_2^2-\beta_2^2)\overline{Z}_2=0
\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

求解 (17) 式可得

$$\overline{Z}_1=Ae^{-r_1z},\qquad \overline{Z}_2=Be^{-r_2z}\tag{18}$$

其中： $\xi^2=k_1^2+k_2^2$； $r_1=\sqrt{\xi^2-\beta_1^2}$； $r_2=\sqrt{\xi^2-\beta_2^2}$.
由 (13) 及 (15) 式，并考虑到自由表面的边界条件，应有

$$\left.\begin{aligned}
&({}_h\sigma_{zz})_{z=0}=0\\
&({}_h\sigma_{zr})_{z=0}+({}_T\sigma_{zr})_{z=0}=0
\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

据此，可以求得系数 A 、 B, 并得位移表达式如下

$$\left.\begin{aligned}
U_z &= \frac{X_3'}{2\pi G}e^{i\omega t}\int_0^\infty\Big[\frac{2\xi^2r_1\cdot{}_s\sigma_{zr}'e^{-r_1z}}{(c_\beta^2-4r_1r_2\xi^2)}+\frac{\xi^2c_\beta\cdot{}_s\sigma_{zr}'e^{-r_2z}}{r_2(c_\beta^2-4r_1r_2\xi^2)}\Big]\xi J_0(r\xi)\mathrm{d}\xi\\
&\quad+\frac{X_3'}{4\pi G}e^{i\omega t}\Big[\frac{1}{R_1}e^{-i\beta_2R_1}+\frac{1}{R_2}e^{-i\beta_2R_2}+\frac{1}{\beta_2^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}c_R\Big]\\
U_r &= -\frac{X_3'}{2\pi G}e^{i\omega t}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^\infty\Big[\frac{{}_s\sigma_{zr}'(2\xi^2e^{-r_1z}+c_\beta e^{-r_2z})}{(c_\beta^2-4r_1r_2\xi^2)}\Big]\xi J_0(r\xi)\mathrm{d}\xi\\
&\quad+\frac{X_3'}{4\pi G}e^{i\omega t}\cdot\frac{1}{\beta_2^2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}c_R
\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

其中： ${}_s\sigma_{zr}'=e^{-r_2c}+2(r_2^2e^{-r_2c}-r_1r_2e^{-r_1c})/\beta_2^2$， $c_\beta=-2\xi^2+\beta_2^2$ ，
$c_R=\frac{1}{R_1}\Big(e^{-i\beta_2R_1}-e^{-i\beta_1R_1}\Big)+\frac{1}{R_2}\Big(e^{-i\beta_2R_2}-e^{-i\beta_1R_2}\Big)$.
由式 (20) 可以求得应力表达式.

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

依照类似方法，可以求得半无限弹性体内部点水平加振时的基本解，此时采用正交坐标系 (图 2). 位移表达式如下

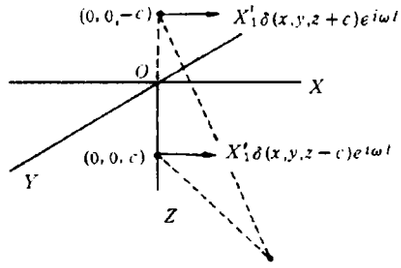

图 2
Fig.2

$$
\begin{aligned}
U_x = {} & \frac{X_1'}{4\pi G}e^{i\omega t} \\
& \cdot\frac{1}{\beta_2^2}\int_0^\infty \frac{-{}_s\sigma_{33}'(-c_\beta e^{-r_1 z} - 2r_1 r_2 e^{-r_2 z})}{r_1(c_\beta^2 - 4r_1 r_2 \xi^2)} \\
& \cdot\xi^3\{-J_0(r\xi) + (2\cos^2\theta - 1)J_2(r\xi)\}\mathrm{d}\xi \\
& + \frac{X_1'}{4\pi G}e^{i\omega t}\left[\frac{1}{R_1}e^{-i\beta_2 R_1} + \frac{1}{R_2}e^{-i\beta_2 R_2} + \frac{1}{\beta_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}c_R\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_y = {} & \frac{X_1'}{2\pi G}e^{i\omega t}\cdot\frac{1}{\beta_2^2}\cdot\frac{xy}{r^2}\int_0^\infty \frac{{}_s\sigma_{33}'(-c_\beta e^{-r_1 z} - 2r_1 r_2 e^{-r_2 z})}{r_1(c_\beta^2 - 4r_1 r_2 \xi^2)}\cdot\xi^3 J_2(r\xi)\mathrm{d}\xi \\
& + \frac{X_1'}{4\pi G}e^{i\omega t}\cdot\frac{1}{\beta_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}c_R \\
U_z = {} & \frac{X_1'}{2\pi G}e^{i\omega t}\cdot\frac{1}{\beta_2^2}\cos\theta\int_0^\infty \frac{{}_s\sigma_{33}'(c_\beta e^{-r_1 z} + 2\xi^2 e^{-r_2 z})}{(c_\beta^2 - 4r_1 r_2 \xi^2)}\cdot\xi^2 J_1(r\xi)\mathrm{d}\xi \\
& + \frac{X_1'}{4\pi G}e^{i\omega t}\cdot\frac{1}{\beta_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}c_R
\end{aligned}
\tag{21}
$$

其中： ${}_s\sigma_{33}' = (2\xi^2 - \beta_2^2)e^{-r_1 c} - 2r_1 r_2 e^{-r_2 c}$， $x = r\cos\theta$， $y = r\sin\theta$.

在式 (20) 和 (21) 中，基本解均含如下形式的积分项

$$
I = \int_0^\infty f(\xi)\cdot J_n(r\xi)\mathrm{d}\xi
$$

此积分在运算上存在困难是因为它具有下面特点：①奇异性；②振荡性；③积分区间的无限性. 我们采用如下的方法使计算简化. 现以 U_z 为例加以说明，其无量纲表达式为

$$
I_z = \int_0^\infty {}_z f(\zeta)\cdot J_0(a\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{22}
$$

式中：
$$
\begin{aligned}
& {}_z f(\zeta) = [\zeta^3\cdot g_1(\zeta)\cdot g_2(\zeta)]/F(\zeta), \\
& g_1(\zeta) = (2\zeta^2 - 1)e^{-f\sqrt{\zeta^2-1}} - 2\sqrt{\zeta^2-1}\cdot\sqrt{\zeta^2-r^2}e^{-f\sqrt{\zeta^2-r^2}}, \\
& g_2(\zeta) = 2\sqrt{\zeta^2-r^2}\cdot\sqrt{\zeta^2-1}\cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2-r^2}} - (-2\zeta^2+1)e^{-b\sqrt{\zeta^2-1}}, \\
& F(\zeta) = \sqrt{\zeta^2-1}\cdot F_t(\zeta), \\
& F_t(\zeta) = (-2\zeta^2+1)^2 - 4\zeta^2\sqrt{\zeta^2-1}\cdot\sqrt{\zeta^2-r^2}, \\
& a = \beta_2 r,\ b = \beta_2 z,\ f = \beta_2 c,\ \gamma^2 = \beta_1^2/\beta_2^2,\ r^2 = x^2 + y^2.
\end{aligned}
$$

引入变形的 Hankel 函数，即将第一类和第二类的 Hankel 函数的积分路线限定

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

在区间 0—$-\pi$ 、 π—0 之内，其表达式如下

$$
\begin{aligned}
H_n^{(1)}(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}\exp[i(nt-z\sin t)]\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nt-z\sin t)\mathrm{d}t+\frac{i}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nt-z\sin t)\mathrm{d}t \\
&= J_n(z)+iN_n(z) \\
H_n^{(2)}(z) &= J_n(z)-iN_n(z)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

其中 $J_n(z)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(nt-z\sin nt)\mathrm{d}t$ 为 Bessel 函数， $N_n(z)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(nt-z\sin nt)\mathrm{d}t$ 为变形的 Neumann 函数. 由 (23) 式可有

$$
2J_n(z)=H_n^{(1)}(z)+H_n^{(2)}(z) \tag{24}
$$

利用 (24) 式可将 (22) 式改写为

$$
I_z=\frac{1}{2}\Big[\int_0^{\infty}{}_zf(\zeta)H_0^{(1)}(a\zeta)\mathrm{d}\zeta+\int_0^{\infty}{}_zf(\zeta)H_0^{(2)}(a\zeta)\mathrm{d}\zeta\Big] \tag{25}
$$

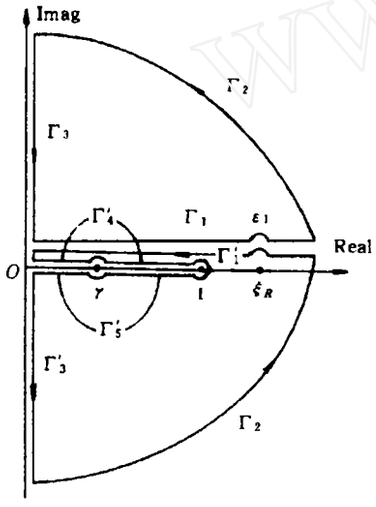

图 3
Fig.3

由于 (25) 式的积分存在奇点，因此将 ζ 扩充至复数域内进行积分，积分路线如图 3. 含 $H_0^{(1)}(az)$ 的积分在第一象限内进行，而含 $H_0^{(2)}(az)$ 的积分在第四象限内进行. 可以证明，在 Γ_2 和 Γ_2' 上的积分，当半径 $\rho\to\infty$ 时，其积分值趋于零. 而在 Γ_3 和 Γ_3' 上的积分，利用 $H_0^{(1)}(-z)=-H_0^{(2)}(z)$ 的性质，可以互相抵消. 因此， I_z 最终可写为

$$
\begin{aligned}
2I_z = &-\int_{\varepsilon_1}{}_zf(z)H_0^{(1)}(az)\mathrm{d}z \\
&+\int_{\Gamma_4'+\Gamma_5'+\varepsilon_1'}{}_zf(z)H_0^{(2)}(az)\mathrm{d}z \\
&-2\pi i\mathrm{Res}[{}_zf(z)H_0^{(2)}(az),\xi_R]
\end{aligned}
\tag{26}
$$

图中 γ 和 1 为 ${}_zf(z)$ 的两个支点，亦即积分路线绕过 $z=\gamma$ 和 $z=1$ 时，函数 ${}_zf(z)$ 具有多值性，而 $z=\xi_R$ 则是 ${}_zf(z)$ 的一阶奇点，通称为 Rayleigh 奇点. 注意到

$$
\left.
\begin{aligned}
-\int_{\varepsilon_1}{}_zf(z)H_0^{(1)}(az)\mathrm{d}z &= \pi i\mathrm{Res}[{}_zf(z)H_0^{(1)}(az),\xi_R] \\
\int_{\varepsilon_1'}{}_zf(z)H_0^{(2)}(az)\mathrm{d}z &= \pi i\mathrm{Res}[{}_zf(z)H_0^{(2)}(az),\xi_R]
\end{aligned}
\right\}
\tag{27}
$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

将 (27) 式代入 (26) 式中并进一步化简后得到

$$I_z = -\pi N_0(a\xi_R)\mathrm{Res}[{}_zf(z),\xi_R] + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_4'+\Gamma_5'} {}_zf(z)H_0^{(2)}(az)\mathrm{d}z \tag{28}$$

考虑到 ${}_zf(z)$ 中所含 $(z^2-1)^{1/2}$ 及 $(z^2-\gamma^2)^{1/2}$ 的多值性，在路线 Γ_4' 和 Γ_5' 上积分时，其取值如下表 (参见图 4). (28) 式中的积分均在实轴上进行，其表达式经整理后成为

$$\begin{aligned} I_z = &-\pi N_0(a\xi_R)\mathrm{Res}[{}_zf(\xi_R)] \\ &+i\int_0^{\gamma}\frac{\zeta^3P_1(\zeta)}{P_2(\zeta)}H_0^{(2)}(a\zeta)\mathrm{d}\zeta \\ &+2i\int_{\gamma}^{1}\frac{\zeta^3P_3(\zeta)}{P_4(\zeta)}H_0^{(2)}(a\zeta)\mathrm{d}\zeta \end{aligned} \tag{29}$$

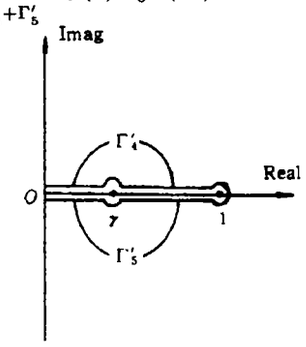

图 4
Fig.4

式中

$$\mathrm{Res}[{}_zf(\xi_R)] = \frac{\xi_R^3 g_1(\xi_R)g_2(\xi_R)}{\sqrt{\xi_R^2-1}\cdot F'(\xi_R)} \tag{30}$$

(29) 和 (30) 式中采用的符号含义为

$$g_1(\xi) = (2\xi^2-1)e^{-f\xi_a} - 2\xi_a\xi_b e^{-f\xi_b},$$

$$g_2(\xi) = 2\xi_b\xi_a e^{-b\xi_b} - (1-2\xi^2)e^{-b\xi_a},$$

$$F'(\xi) = -8\xi(1-2\xi^2) - 8\xi^2\xi_a\xi_b - 4\xi^3\left(\frac{\xi_a^2+\xi_b^2}{\xi_a\xi_b}\right),$$

$$\xi_a = \sqrt{\xi^2-1}\,;\quad \xi_b = \sqrt{\xi^2-\gamma^2},$$

$$\begin{aligned} p_1(\zeta) = &-2(2\zeta^2-1)\zeta_b\zeta_a\cos(f\zeta_a+b\zeta_b) - 4\zeta_a^2\zeta_b^2\cos((b+f)\zeta_b) \\ &+(2\zeta^2-1)^2\cos((b+f)\zeta_a) - 2\zeta_a\zeta_b(2\zeta^2-1)\cos(f\zeta_b+b\zeta_a), \end{aligned}$$

$$p_2(\zeta) = \zeta_a[(-2\zeta^2+1)^2 + 4\zeta^2\zeta_a\zeta_b],$$

$$\begin{aligned} p_3(\zeta) = &\zeta_a\zeta_c e^{-b\zeta_c}\sin(f\zeta_a)(-2\zeta^2+1)^3 - 2\zeta_a^2\zeta_c^2(2\zeta^2-1)^2e^{-2b\zeta_c} \\ &+\frac{1}{2}(-2\zeta^2+1)^4\cos((b+f)\zeta_a) - (-2\zeta^2+1)^3\zeta_a\zeta_c e^{-f\zeta_c}\sin(b\zeta_a) \\ &+4\zeta^2\zeta_a^2\zeta_c^2(2\zeta^2-1)e^{-b\zeta_c}\cos(f\zeta_a) - 2\zeta^2\zeta_a^2\zeta_c^2(2\zeta^2-1)^2\sin((b+f)\zeta_a) \\ &+4\zeta^2\zeta_a^2\zeta_c^2(-2\zeta^2+1)e^{-f\zeta_c}\cos(b\zeta_a), \end{aligned}$$

$$p_4(\zeta) = \zeta_a[(-2\zeta^2+1)^4 + 16\zeta^4\zeta_a^2\zeta_c^2],$$

$$\zeta_a = \sqrt{1-\zeta^2}\,;\quad \zeta_b = \sqrt{\gamma^2-\zeta^2}\,;\quad \zeta_c = \sqrt{\zeta^2-\gamma^2}.$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

表 1 支点积分取值表

Table 1 Values at branch points

Integration path	Γ_4'		Γ_5'	
Branch	$0—\gamma$	$\gamma—1$	$1—\gamma$	$\gamma—0$
$(z^2-1)^{1/2}$	$i(1-\zeta^2)^{1/2}$	$i(1-\zeta^2)^{1/2}$	$-i(1-\zeta^2)^{1/2}$	$-i(1-\zeta^2)^{1/2}$
$(z^2-\gamma^2)^{1/2}$	$i(\gamma^2-\zeta^2)^{1/2}$	$(\zeta^2-\gamma^2)^{1/2}$	$(\zeta^2-\gamma^2)^{1/2}$	$-i(\gamma^2-\zeta^2)^{1/2}$

从以上各式可以看出，格林函数中的积分项是由 $\zeta=\xi_R$ 点的留数以及 $(0,\gamma)$ 、$(\gamma,1)$ 区段的有限积分组成，积分项中不存在无限积分和被积函数的奇点问题，变形的 Hankel 函数计算可以转化为 Bessel 函数的计算问题 [3], 因此问题的求解变得比较方便.

2 算 例

我们将计算结果与熟知的 Mindlin 静力解进行了比较，即当激励频率无限减小时，应当趋近于 Mindlin 的解. 在半无限空间的 $(0,0,c)$ 点 x 方向作用集中力 P 时，Mindlin 解给出的 (x,y,z) 点 x 方向位移表达式如下 [4]

$$u(x,y,z)=\frac{P(0,0,c)}{16\pi G(1-\nu)}\Big[\frac{3-4\nu}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{2cz}{R_2^3}+\Big(\frac{1}{R_1^3}+\frac{3-4\nu}{R_2^3}-\frac{6cz}{R_2^5}\Big)x^2 +\frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2+z+c}\Big(1-\frac{x_2}{R_2(R_2+z+c)}\Big)\Big] \tag{31}$$

式中

$$R_1=\left[x^2+y^2+(z-c)^2\right]^{1/2}, \qquad R_2=\left[x^2+y^2+(z+c)^2\right]^{1/2} \tag{32}$$

由于力的作用点存在奇异性，所以只能计算出相距力作用点一定距离处的位移.

假设一般土质条件, 取 $c_2=350\text{m/s}$; $\nu=0.35$; $\rho=1900\text{kg/m}^3$; 相应的 $G=233\text{Mpa}$; 作用力 $P=1\text{kN}$. 计算结果表示于图 5 中，位移以相对值给出，即与距离为 1m 处的 Mindlin 解 $0.68767\times10^{-6}\text{m}$ 的比值. 图中虚线表示 Mindlin 解，实线表示不同激励频率的振动解. 当 $f=1.00\text{Hz}$ 时，振动解与 Mindlin 解基本重合，但激励频率增大时，振动解随距离发生振荡，频率愈高，振荡愈明显.

3 结束语

本文给出了半无限弹性空间域内点加振的格林函数以及其数值实施的计算方法，为边界元法在三维土 - 结构动力相互作用问题中的应用创造了条件. 应用复变函数原理，引入变形的 Hankel 函数将无限积分有限化. 从而消除了计算中的截断误差，缩短了积分区间，提高了计算精度. 利用留数定理消除了区间内的积分奇点，使计算变得非常方便，本文成果不难推广于层状弹性半空间，其具体表达式详见文献 [3].

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

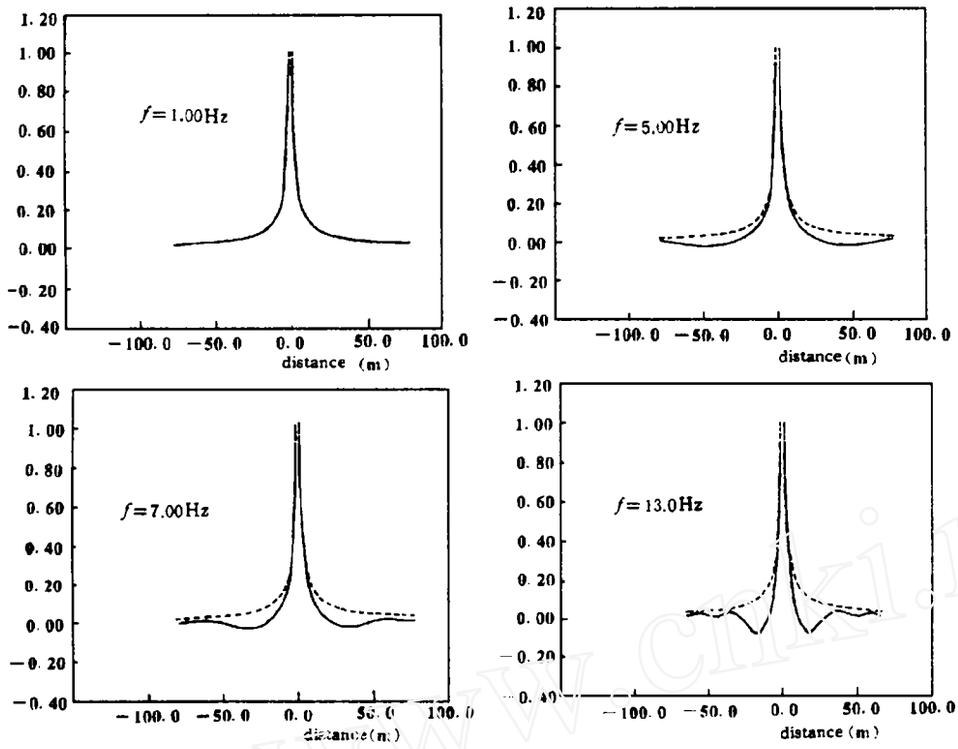

图 5　动力解与 Mindlin 静力解的比较

Fig.5　Comparison between present solution and Mindlin's static solution

参　考　文　献

1 Dominguez J and Maeso O. Model for the Seismic Analysis of Arch Dams Including Interaction Effects in Proc. Tenth World Conference on Earthquake Engineering. Madrid, Spain, 1992, 8: 4601–4606

2 Dominguez J and Rosset JM. Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations. Research Rep. R78–20, MIT, 1978

3 李炳奇. 三维弹性半空间 Green 函数的求解及其在土 - 结构相互作用中的应用. 大连理工大学博士论文, 1992

4 Penzien J. 土壤桩基的相互作用. 罗伯特 L. 威格尔主编. 地震工程学, 中国科学院工程力学研究所译, 科学出版社, 1978: 397–439

5 数学手册. 人民教育出版社, 1979: 627–639

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

EVALUATION OF GREEN'S FUNCTION FOR A POINT DYNAMIC LOAD IN THE INTERIOR OF AN ELASTIC HALF-SPACE

Lin Gao Li Bingqi Shen Aiguo
(*Dalian University of Technology, Dalian* 116024, *China*)

Abstract A solution of Green's function is presented for a point dynamic load in the interior of an elastic half-space which fully satisfies the boundary conditions on the free surface. By means of the modified Hankel functions, the infinite integral is transformed into finite ones in the complex domain, which makes the evaluation of Green's function easier and more conveniently. This solution serves the theorectical basis for the application of boundary element method in the analysis of dynamic soil-structure interaction problems.

Key words Green's function, elastic half-space, dynamic excitation inside the domain

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net