非对称的非局部塑性理论

高 键
(山东工业大学材料工程系，济南 250014)
陈至达
(中国矿业大学北京研究生部，北京 100083)

摘要 从非局部连续场论出发，假定形变与局部转动均属微小，当存在体力矩出现非对称应力场时，设对称应力的能量函数和非对称应力的能量函数可以独立计算．基于热力学原理和屈服面的概念，建立了一种新的非对称 - 非局部弹塑性力学理论．

关键词 非对称应力，非局部理论，局部转动，体力矩，弹塑性力学

引 言

在经典的连续体力学中，一直采用 Cauchy 应力对称的概念．但在客观世界中，存在着大量的非对称应力的力学问题．从材料力学最基本的圆柱体的压缩实验，就会发现角点处的应力是非对称的．这类非对称应力对材料的变形和强度产生非常重要的作用．例如，有效应力的对称性一直是损伤力学研究的基本课题之一；旋错对材料强度的弱化作用；裂纹尖端区的应力状态等等，都涉及到非对称应力的概念．

许多先驱者建立了一系列的非对称理论．最突出的是微极理论．由于微极理论中，引入众多的物性参数，至今，还无法找到一个合适的实验方法确定本构关系中的物性参数，从而限制了它的应用范围．

陈至达曾指出："转动不协调是产生裂纹的条件之一；这种转动不是微极转角，而是局部转动角．"[1] 高键和戴天民、陈至达基于非局部场论的公理系统，研究了非局部弹性体力矩是由局部转动的非局部效应产生的，并引起了应力的非对称 [2-4]．王冲和陈至达从实验中观察裂纹尖端的局部转动场，提出了与非局部体力矩相关的"微转韧度"[5,6]，研究了转动引起的裂纹的扩展等现象．几乎同时，苏联学者 Romanov 也发现这一现象 [7]．

日本学者 Kunio Miyauchi 在研究简单剪切和纯剪切之间的差别，发现它们之间的屈服点和强化规律是不同的，原因是简单剪切存在有局部转动 [8]．即简单剪切的平均整旋角不为零．在材料内部可能出现非对称应力状态．

在建立的非对称 - 非局部弹性理论 [2-4] 中，已证明了在非局部弹性固体中存在着非局部体力矩，引起非局部体力矩的几何原因是局部转动，非局部体力矩引起了

1991-11-20 收到第一稿， 1993-11-08 收到修改稿．

应力的非对称．而纯剪切和简单剪切之间相差一非对称应力．因此在金属材料形变过程中，有必要研究与转动有关的塑性流动和非对称应力的塑性流动规律．针对这些问题，本文建立了具有非局部体力矩作用的非局部塑性理论．

1 非局部连续体的守恒定律与本构关系

非局部连续体力学基于原子之间的长程效应为特征的非局部守恒定律，采用物体的总体运动所遵循的积分形式的守恒定律．通过 Gauss 定理进行局部化处理，得到局部化形式的守恒定律．不计变形体中的化学反应，即非局部质量剩余 $\hat{\rho}=0$. 当小变形时，守恒定律是[2,3]

$$\dot{\rho}+\rho V^m|_m=0 \tag{1}$$

$$\rho\dot{\boldsymbol{V}}-\rho\boldsymbol{f}-\boldsymbol{t}^k|_k=\rho\widehat{\boldsymbol{F}} \qquad \int_V \rho\widehat{\boldsymbol{F}}\mathrm{d}v=0 \tag{2}$$

$$\rho\boldsymbol{r}\times\widehat{\boldsymbol{F}}-\boldsymbol{g}_k\times\boldsymbol{t}^k=\rho\widehat{\boldsymbol{L}}\ , \qquad \int_V \rho\widehat{\boldsymbol{L}}\mathrm{d}v=0 \tag{3}$$

$$\rho\dot{U}=\boldsymbol{t}^k\cdot\boldsymbol{V}_{,k}-\rho\widehat{\boldsymbol{F}}\cdot\dot{\boldsymbol{V}}+\rho\widehat{h}\ , \qquad \int_V \rho\widehat{h}\mathrm{d}v=0 \tag{4}$$

其中：ρ 是质量密度，$\boldsymbol{V}$ 是速度矢量，$\boldsymbol{f}$ 是体力矢量，$\boldsymbol{t}^k$ 是应力矢量，$\boldsymbol{g}_k$ 是曲线坐标基矢，$\boldsymbol{r}$ 是变形构形中的物质点的位置矢量，U 是内能；$\widehat{\boldsymbol{F}}$, $\widehat{\boldsymbol{L}}$ 和 $\widehat{h}$ 分别是非局部体力，体力矩和能量剩余；上记圆点“·”表示对时间微商，下标逗点“,”表示对空间坐标微商，竖线表示协变微商，积分域 V 指物体的体积．塑性耗散材料必须满足热力学第二定律，局部形式的热力学第二定律为

$$\rho\dot{\eta}-(q_k/T)_{,k}-\rho h/T-\rho\widehat{b}\geq 0\ , \qquad \int_V \rho\widehat{b}\mathrm{d}v=0 \tag{5}$$

其中：η 是熵密度，$\boldsymbol{q}$ 是热流矢量，h 是热源密度，$\widehat{b}$ 是非局部熵密度，T 是温度．

不计热源和热传导，将 (4) 式减去 T 乘 (5) 式

$$\rho\dot{U}-\rho T\dot{\eta}\leq\boldsymbol{t}^k\cdot\boldsymbol{V}_{,k}-\rho\widehat{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{V}+\rho\widehat{h}-\rho T\widehat{b} \tag{6}$$

将应力张量 $\boldsymbol{t}$ 和速度梯度张量作和分解

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}_s+\boldsymbol{t}_a\ , \qquad \boldsymbol{\nabla V}=\dot{\boldsymbol{e}}+\dot{\boldsymbol{\omega}}$$

其中：$\boldsymbol{t}_s=\frac{1}{2}(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{t}_a=\frac{1}{2}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}})$; $\dot{\boldsymbol{e}}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{\nabla V}+\boldsymbol{\nabla V}^{\mathrm{T}}]$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{\nabla V}-\boldsymbol{\nabla V}^{\mathrm{T}}]$

因此

$$\boldsymbol{t}^k \cdot \boldsymbol{V}_{,k} = \boldsymbol{t}_s : \dot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{t}_a : \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} : \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

$$\boldsymbol{g}_k \times \boldsymbol{t}^k = 2\boldsymbol{t}_a = \rho(\boldsymbol{r} \times \widehat{\boldsymbol{F}} - \widehat{\boldsymbol{L}})$$

其中：$\dot{\boldsymbol{\omega}}$ 是旋转速率张量，$\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 是旋转速率矢量；$\boldsymbol{\epsilon}$ 是 Eddington 张量.

如果我们记：$\widehat{\boldsymbol{J}} = \rho(\boldsymbol{r} \times \widehat{\boldsymbol{F}} - \widehat{\boldsymbol{L}})$，(6) 式成为

$$\rho\dot{U} - \rho T\dot{\eta} \leq \boldsymbol{t}_s : \dot{\boldsymbol{e}} + \widehat{\boldsymbol{J}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} - \rho\widehat{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{V} + \rho\widehat{h} - \rho T\widehat{b} \tag{7}$$

上式说明：应变和转动都对能量有贡献. 我们仅考虑小变形. 当弹塑性变形时，变形梯度可以分解为弹性部分和塑性部分. 相应的应变张量 $\boldsymbol{e}$ 和旋转张量 $\boldsymbol{\omega}$ 也可以分解为弹性部分和塑性部分.

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^e + \boldsymbol{e}^p, \qquad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^e + \boldsymbol{\theta}^p$$

因此可取原因有序集

$$\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}^p; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^p; \boldsymbol{r}\}, \qquad \boldsymbol{F}' = \{\boldsymbol{e}', \boldsymbol{e}^{p'}; \boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\theta}^{p'}; \boldsymbol{r}'\} \tag{8}$$

其中：$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}^e(\boldsymbol{r}', t)$，$\boldsymbol{e}^{p'} = \boldsymbol{e}^p(\boldsymbol{r}', t)$，$\boldsymbol{\theta}' = \boldsymbol{\theta}^e(\boldsymbol{r}', t)$，$\boldsymbol{\theta}^{p'} = \boldsymbol{\theta}^p(\boldsymbol{r}', t)$. $\boldsymbol{\theta}$ 表示局部旋转矢量，$\boldsymbol{e}$ 表示应变张量. $\boldsymbol{r}'$ 代表物体中除 $\boldsymbol{r}$ 之外的所有物质点的空间位置矢量，上标 “p” 表示塑性分量.

假定自由能的泛函为

$$\Psi = \Psi(T, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}') \tag{9}$$

由同一性公理，应力张量 $\boldsymbol{t}_s$，非局部体力矩 $\widehat{\boldsymbol{J}}$ 和非局部体力 $\widehat{\boldsymbol{F}}$ 也具有同样形式的本构泛函. 根据文献 [2] 中引入的 Hilbert 空间 $\boldsymbol{H}$ 和 Fréchet 可微的性质，我们可以求出自由能 Ψ 的时间导数

$$\begin{aligned}\rho\dot{\Psi} &= \rho\frac{\partial\Psi}{\partial T}\dot{T} + \int_V \rho\frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{f}'} \cdot \dot{\boldsymbol{F}}'\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}') + \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{F}} \cdot \dot{\boldsymbol{F}} \\ &= \frac{\partial\Psi}{\partial T}\dot{T} + \int_V \left[\rho\frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{F}'}\right]^* \cdot \dot{\boldsymbol{F}}\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}') + \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{F}} \cdot \dot{\boldsymbol{F}} + Q\end{aligned} \tag{10}$$

其中：$Q = \int_V \left[\left(\rho\frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{F}'}\right) \cdot \dot{\boldsymbol{F}}' - \left(\rho\frac{\Delta\Psi}{\Delta\boldsymbol{F}'}\right)^* \cdot \dot{\boldsymbol{F}}\right]\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')$

“ * ” 表示斜逆，即交换两个对等自变量的位置；例如：$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')^* = G(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$. 详细定义参见文献 [2,3].

$\int_V \frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{F}'} \cdot \dot{\boldsymbol{F}}'\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')$ 表示定义在 Hilbert 空间 $\boldsymbol{H}$ 中的映射：$\boldsymbol{H} \to R$ 的 Fréchet 时间导数.

根据内能和自由能的关系：$\Psi = U - T\eta$. 将 (10) 式代入 (7) 式，整理可得

$$
\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}+\eta\right)\dot{T}-\left\{\boldsymbol{t}_s-\left[\rho\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{e}}+\int_V\left(\rho\frac{\delta \Psi}{\delta \boldsymbol{e}'}\right)^* \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')\right]\right\}:\dot{\boldsymbol{e}} \\
&+\left\{\rho\widehat{\boldsymbol{F}}+\rho\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{r}}+\int_V\left(\rho\frac{\delta \Psi}{\delta \boldsymbol{r}'}\right)^* \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')\right\}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}+\left\{-\widehat{\boldsymbol{J}}+\rho\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\theta}}+\int_V\left(\rho\frac{\delta \Psi}{\delta \boldsymbol{\theta}'}\right)^* \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')\right\}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}} \\
&+\left\{\rho\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{e}^p}+\int_V\left(\rho\frac{\delta \Psi}{\delta \boldsymbol{e}^{p\prime}}\right)^* \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')\right\}:\dot{\boldsymbol{e}^p}+\int_V\left\{\rho\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\theta}^p}+\left(\rho\frac{\partial \Psi}{\delta \boldsymbol{\theta}^{p\prime}}\right)^* \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')\right\}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}^p \\
&+Q-\rho\widehat{h}\leq-\rho T\widehat{b}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

对于所有容许运动都使上述不等式成立，当且仅当

$$
\left.
\begin{aligned}
&\eta=-\frac{\partial \Psi}{\partial T} \\
&\boldsymbol{t}_s=\rho\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{e}}+\int_V\left(\rho\frac{\delta \Psi}{\delta \boldsymbol{e}'}\right)^* \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}') \\
&-\rho\widehat{\boldsymbol{F}}=\rho\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{r}}+\int_V\left(\rho\frac{\delta \Psi}{\delta \boldsymbol{r}'}\right)^* \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}') \\
&\widehat{\boldsymbol{J}}=\rho\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\theta}}+\int_V\left(\rho\frac{\delta \Psi}{\delta \boldsymbol{e}'}\right)^* \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')
\end{aligned}
\right\}
\tag{12}
$$

和

$$
\left\{\rho\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{e}^p}+\int_V\left(\rho\frac{\delta \Psi}{\delta \boldsymbol{e}^{p\prime}}\right)^* \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')\right\}:\dot{\boldsymbol{e}^p}+\left\{\rho\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\theta}^p}+\int_V\left(\rho\frac{\delta \Psi}{\delta \boldsymbol{\theta}^{p\prime}}\right)^* \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')\right\}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}^p}+Q-\rho\widehat{h}\leq-\rho T\widehat{b} \tag{13}
$$

假设应变和转动不耦合，在 V 中积分上式，并注意到 $(4)_2$ 和 $(5)_2$ 式中 $\widehat{h}$ 和 $\widehat{b}$ 满足的条件和 Q 的反对称性，则有

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int_V\left\{\rho\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{e}^p}+\int_V\left(\rho\frac{\delta \Psi}{\delta \boldsymbol{e}^{p\prime}}\right)^* \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')\right\}:\dot{\boldsymbol{e}^p}\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')\leq 0 \\
&\int_V\left\{\rho\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\theta}^p}+\int_V\left(\rho\frac{\delta \Psi}{\delta \boldsymbol{\theta}^{p\prime}}\right)^* \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')\right\}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}^p}\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')\leq 0
\end{aligned}
\right\}
\tag{14}
$$

众所周知，本构方程 (12) 必须满足 Galileo 不变性. 自由能 Ψ 及其变化率 $\dot{\Psi}$ 都是标量，则在物体变形运动中叠加一刚体运动时， Ψ 及 $\dot{\Psi}$ 都具有不变的形式.

首先，叠加一个刚性平移

$$
\boldsymbol{r}_*=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{V}_0 t \qquad (\boldsymbol{V}_0\text{是一个常矢量}) \tag{15}
$$

根据 Galileo 不变性，得到

$$
\left.
\begin{aligned}
\Psi(T,\boldsymbol{F}_*,\boldsymbol{F}'_*)&=\Psi(T,\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}') \\
\dot{\Psi}(T,\boldsymbol{F}_*,\boldsymbol{F}'_*)&=\dot{\Psi}(T,\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')
\end{aligned}
\right\}
\tag{16}
$$

其中： $\boldsymbol{F}_* = \{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}^p; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^p; \boldsymbol{r}_*\}$， $\boldsymbol{F}'_* = \{\boldsymbol{e}', \boldsymbol{e}^{p'}; \boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\theta}^{p'}; \boldsymbol{r}'_*\}$ 类似于 (10) 式，直接展开 $(16)_2$ 两端，并注意到 $(16)_1$ 式，得到

$$\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{r}} + \int_V \rho\frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}') = 0 \tag{17}$$

其次，叠加一刚性小转动

$$\boldsymbol{r}_* = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}\ , \qquad \frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\phi}_0 \tag{18}$$

$\boldsymbol{\phi}_0$ 为微小刚性转动角矢量，在整个运动体内为常量，又有

$$\boldsymbol{\theta}_* = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\phi}_0\ , \qquad \dot{\boldsymbol{\theta}}_* = \dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\omega}_0$$

$\boldsymbol{\omega}_0$ 为常转动角速度，当微小刚性转动时，在运动体中处处一致． $\dot{\boldsymbol{\theta}}_*$ 可分解为弹性与塑性成份

$$\boldsymbol{\theta}_* = \boldsymbol{\theta}^e_* + \boldsymbol{\theta}^p_*$$

此时

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}_* = \{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}^p; \boldsymbol{\theta}_*, \boldsymbol{\theta}^p_*; \boldsymbol{r}_*\} \\ &\boldsymbol{F}'_* = \{\boldsymbol{e}', \boldsymbol{e}^{p'}; \boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\theta}^{p'}; \boldsymbol{r}'_*\} \end{aligned} \tag{19}$$

根据上述 Galileo 不变性，自由能 Ψ 及其变化率 $\dot{\Psi}$ 应满足 (16) 式，所不同的是自变量 $\boldsymbol{F}_*$ 和 $\boldsymbol{F}'_*$ 由 (19) 式给出．然后将自由能变化率 $\dot{\Psi}$ 展开，并消去等式两端的相同项，整理可得

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r}\times\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{r}} + \int_V \boldsymbol{r}'\times\frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}') + \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\theta}} + \int_V \rho\frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{\theta}'}\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}') \\ &\qquad + \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\theta}^p} + \int_V \rho\frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{\theta}^{p'}}\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}') = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

我们得到：本构泛函 Ψ 满足 Galileo 不变性的充分与必要条件是满足 (17) 式和 (20) 式．

由 (17) 式和 $(12)_3$ 式，可求得

$$\rho\widehat{\boldsymbol{F}} = \int_V \left[\rho\frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{r}'} - \left(\rho\frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{r}'}\right)^*\right]\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}') \tag{21}$$

由于上式中被积函数关于 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 的反对称性，非局部守恒定律

$$\int_V \rho\widehat{\boldsymbol{F}}\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{22}$$

恒成立．

因弹塑性变形是从纯弹性状态到弹塑性状态的一个连续过程，在纯弹性阶段，我们在式 (20) 要求

$$\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\theta}^p}+\int_V\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\theta}^{p'}}\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')=0 \tag{23}$$

原式成为

$$\boldsymbol{r}\times\rho\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\int_V\boldsymbol{r}'\times\frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')+\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\theta}}+\int_V\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\theta}}\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')=0 \tag{24}$$

由 (21)，(12) 和 (24) 式，得到

$$\begin{aligned}\rho\widehat{\boldsymbol{L}}&=\rho\boldsymbol{r}\times\widehat{\boldsymbol{F}}-\widehat{\boldsymbol{J}}\\&=-\boldsymbol{r}\times\left[\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{r}}+\int_V\left(\rho\frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{r}'}\right)^*\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')\right]-\left[\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\theta}^e}+\int_V\left(\rho\frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{\theta}^{e'}}\right)^*\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')\right]\\&=\int_V\left[\boldsymbol{r}'\times\left(\rho\frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{r}'}\right)-\boldsymbol{r}\times\left(\rho\frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{r}'}\right)^*\right]\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')\\&\quad+\int_V\left[\rho\frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{\theta}^{e'}}-\left(\rho\frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{\theta}^{e'}}\right)^*\right]\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')\end{aligned} \tag{25}$$

由于被积函数的反对称性，非局部守恒律

$$\int_V\rho\widehat{\boldsymbol{L}}\mathrm{d}v=0 \tag{26}$$

恒成立.

根据以上证明得到下列结论：

假定物体的形变与局部转动均为微小，非局部本构泛函 Ψ 满足非局部守恒律的充分条件是泛函满足方程式 (17) 与 (20)，具有 Galileo 不变性.

2 线性理论

根据 Friedman 和 Katz 的表示定理 [9] 和高键等的讨论 [2]，我们可以采用一加性泛函描述非局部物体的力学行为．加性泛函可以用一积分来描述．亦即，自由能 Ψ 可以表示为

$$\rho\Psi=\int_V U(T,\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}') \tag{27}$$

这里， U 是一自由能的势函数.

相应的 Fréchet 导数由下式给出

$$\int_V\rho\frac{\delta\Psi}{\delta\boldsymbol{F}'}\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')=\int_V\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}') \tag{28}$$

将 (27) 式代入 (17) 式，得约束条件

$$\int_V\left[\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}'}\right]\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')=0 \tag{29}$$

当物体是均匀的， (29) 式成立的充分条件是

$$U(T,\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')=U(T,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|;\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}^p;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}^p;\boldsymbol{e}',\boldsymbol{e}^{p'};\boldsymbol{\theta}',\boldsymbol{\theta}^{p'}) \tag{30}$$

亦即得到： $\rho\widehat{\boldsymbol{F}}=0$. 非局部体力消失．约束条件 (23) 式和 (24) 式简化为

$$\int_V\left[\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\theta}}+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\theta}'}\right]\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')=0 \tag{31}$$

$$\int_V\left[\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\theta}^p}+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\theta}^{p'}}\right]\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')=0 \tag{32}$$

我们假定：应变和转动产生的自由能互不耦合．此时，自由能函数 U 可写为

$$\begin{aligned}&U(T,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|;\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}^p;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}^p;\boldsymbol{e}',\boldsymbol{e}^{p'};\boldsymbol{\theta}',\boldsymbol{\theta}^{p'})\\&=U_e(T,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|;\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}^p;\boldsymbol{e}',\boldsymbol{e}^{p'})+U_\theta(T,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}^p;\boldsymbol{\theta}',\boldsymbol{\theta}^{p'})\end{aligned} \tag{33}$$

将 U_e 和 U_θ 表示成相关内变量的二次式，并引入相关的物质系数 $\boldsymbol{B}_i$ 与 $\boldsymbol{C}_i(i=1,2,\cdots,10)$

$$\begin{aligned}&U_e(T,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|;\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}^p;\boldsymbol{e}',\boldsymbol{e}^{p'})\\&=\boldsymbol{B}_1\vdots\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}+\boldsymbol{B}_2\vdots\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}'+\boldsymbol{B}_3\vdots\boldsymbol{e}'\otimes\boldsymbol{e}'+\boldsymbol{B}_4\vdots\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}^p+\boldsymbol{B}_5\vdots\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}^{p'}\\&\quad+\boldsymbol{B}_6\vdots\boldsymbol{e}^p\otimes\boldsymbol{e}^p+\boldsymbol{B}_7\vdots\boldsymbol{e}^{p'}\otimes\boldsymbol{e}^{p'}+\boldsymbol{B}_8\vdots\boldsymbol{e}^p\otimes\boldsymbol{e}^{p'}+\boldsymbol{B}_9\vdots\boldsymbol{e}'\otimes\boldsymbol{e}^p+\boldsymbol{B}_{10}\vdots\boldsymbol{e}'\otimes\boldsymbol{e}^{p'}\end{aligned} \tag*{(34)$_1$}$$

$$\begin{aligned}&U_\theta(T,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}^p;\boldsymbol{\theta}',\boldsymbol{\theta}^{p'})\\&=\boldsymbol{C}_1:\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{C}_2:\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\theta}'+\boldsymbol{C}_3:\boldsymbol{\theta}'\otimes\boldsymbol{\theta}'+\boldsymbol{C}_4:\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\theta}^p+\boldsymbol{C}_5:\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\theta}^{p'}\\&\quad+\boldsymbol{C}_6:\boldsymbol{\theta}^p\otimes\boldsymbol{\theta}^p+\boldsymbol{C}_7:\boldsymbol{\theta}^{p'}\otimes\boldsymbol{\theta}^{p'}+\boldsymbol{C}_8:\boldsymbol{\theta}^p\otimes\boldsymbol{\theta}^{p'}+\boldsymbol{C}_9:\boldsymbol{\theta}'\otimes\boldsymbol{\theta}^p+\boldsymbol{C}_{10}:\boldsymbol{\theta}'\otimes\boldsymbol{\theta}^{p'}\end{aligned} \tag*{(34)$_2$}$$

其中 $\boldsymbol{B}_i$ 和 $\boldsymbol{C}_i(i=1,2,\cdots,10)$ 分别是四阶和二阶张量以及是 $(T,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ 的函数．

将 $(34)_1$ 和 $(34)_2$ 的表达式代入 (33) 式，并由 $(12)_2$ 式求出应力张量 $\boldsymbol{t}_s$

$$\boldsymbol{t}_s=\int_V[2(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2):\boldsymbol{e}+2\boldsymbol{B}_3:\boldsymbol{e}'+(\boldsymbol{B}_4+\boldsymbol{B}_{10}):\boldsymbol{e}^p+(\boldsymbol{B}_5+\boldsymbol{B}_9):\boldsymbol{e}^p]\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')$$

假设： $\boldsymbol{b}_1=2(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2)=-(\boldsymbol{B}_4+\boldsymbol{B}_{10})$, $\boldsymbol{b}_2=2\boldsymbol{B}_3=-(\boldsymbol{B}_5+\boldsymbol{B}_9)$; 得到

$$\boldsymbol{t}_s=\boldsymbol{C}:(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{e}^p)+\int_V\boldsymbol{b}_2:(\boldsymbol{e}'-\boldsymbol{e}^{p'})\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}') \tag{35}$$

其中： $\boldsymbol{C}=\int_V\boldsymbol{b}_1(T,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')$

考察：

$$\int_V \left[\frac{\partial U_e}{\partial \boldsymbol{e}^p}+\left(\frac{\partial U_e}{\partial \boldsymbol{e}^{p'}}\right)^*\right]\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')$$
$$=\int_V \{(\boldsymbol{B}_4+\boldsymbol{B}_{10}):\boldsymbol{e}+2(\boldsymbol{B}_6+\boldsymbol{B}_7):\boldsymbol{e}^p+2\boldsymbol{B}_8:\boldsymbol{e}^{p'}+(\boldsymbol{B}_5+\boldsymbol{B}_9):\boldsymbol{e}'\}\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')$$

假设

$$(\boldsymbol{B}_4+\boldsymbol{B}_{10})=-2(\boldsymbol{B}_6+\boldsymbol{B}_7)=-\boldsymbol{b}_1\ , \qquad \boldsymbol{B}_5+\boldsymbol{B}_9=-2\boldsymbol{B}_8=-\boldsymbol{b}_2$$

从上式可得到

$$-\boldsymbol{t}_s=\int_V \left[\frac{\partial U_e}{\partial \boldsymbol{e}^p}+\left(\frac{\partial U_e}{\partial \boldsymbol{e}^{p'}}\right)^*\right]\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')$$

热力学第二定律的约束条件 (14) 式成为

$$\int_V \boldsymbol{t}_s:\dot{\boldsymbol{e}}^p\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')\geq 0 \tag{36}$$

此不等式的物理意义：由对称应力引起的塑性耗散功是非负的．对于 $\boldsymbol{t}_s$ 的本构关系做进一步的讨论，请参见 Eringen 的工作 [10].

将 $(34)_2$ 式代入 (31) 和 (32) 式，得到

$$\left.\begin{array}{ll}2\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_2=0\ , & \boldsymbol{C}_4+\boldsymbol{C}_5=0\\ \boldsymbol{C}_2+2\boldsymbol{C}_3=0\ , & 2\boldsymbol{C}_6+\boldsymbol{C}_8=0\\ \boldsymbol{C}_4+\boldsymbol{C}_9=0\ , & \boldsymbol{C}_8+2\boldsymbol{C}_7=0\\ \boldsymbol{C}_5+\boldsymbol{C}_{10}=0\ , & \boldsymbol{C}_9+\boldsymbol{C}_{10}=0\end{array}\right\} \tag{37}$$

亦即

$$\begin{aligned}&U_\theta(T,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}^p;\boldsymbol{\theta}',\boldsymbol{\theta}^{p'})\\ &=\boldsymbol{C}_1:(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}')\otimes(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}')+\boldsymbol{C}_6:(\boldsymbol{\theta}^p-\boldsymbol{\theta}^{p'})\otimes(\boldsymbol{\theta}^p-\boldsymbol{\theta}^{p'})\\ &\quad+\boldsymbol{C}_9:(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}')\otimes(\boldsymbol{\theta}^p-\boldsymbol{\theta}^{p'})\end{aligned} \tag{38}$$

将 (38) 式代入 $(14)_2$ 式

$$\int_V\int_V[4\boldsymbol{C}_6\cdot(\boldsymbol{\theta}^p-\boldsymbol{\theta}^{p'})+2\boldsymbol{C}_9\cdot(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}')]\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}^p\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}v(\boldsymbol{r})\leq 0 \tag{39}$$

我们注意到

$$
\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{J}} = -\rho \widehat{\boldsymbol{L}} &= \int_V \left[\rho \frac{\delta \Psi}{\delta \boldsymbol{\theta}'} - \left(\rho \frac{\delta \Psi}{\delta \boldsymbol{\theta}'}\right)^*\right] \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}') \\
&= \int_V \left[\frac{\partial U_\theta}{\partial \boldsymbol{\theta}'} - \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \boldsymbol{\theta}'}\right)^*\right] \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}') \\
&= \int_V [4\boldsymbol{C}_1 \cdot (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') + 2\boldsymbol{C}_9 \cdot (\boldsymbol{\theta}^p - \boldsymbol{\theta}^{p'})] \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')
\end{aligned} \tag{40}
$$

当取 $\boldsymbol{C}_9 = -2\boldsymbol{C}_6 = -2\boldsymbol{C}_1$, 从 (39) 和 (40) 式得到热力学第二定律要求

$$
\int_V \widehat{\boldsymbol{J}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}^p \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}) \geq 0 \tag{41}
$$

此不等式的物理意义为：局部转动引起的塑性耗散功是非负的.

3 局部转动的屈服条件和加载条件

用应力描述的屈服函数的形式设为

$$
\varphi(\boldsymbol{t}) = \varphi(\boldsymbol{t}_s + \boldsymbol{t}_a) \tag{42}
$$

对于各向同性的物体，将屈服函数表示成对称应力 $\boldsymbol{t}_s$ 和反对称应力 $\boldsymbol{t}_a$ 的二次函数，得到

$$
\varphi(\boldsymbol{t}) = A\boldsymbol{t}_s : \boldsymbol{t}_s + B\boldsymbol{t}_a : \boldsymbol{t}_a = A\boldsymbol{t}_s : \boldsymbol{t}_s + \frac{1}{4} B \widehat{\boldsymbol{J}} \widehat{\boldsymbol{J}} \tag{43}
$$

其中 A 、 B 为决定于材料性质的系数.

强化参数

$$
\begin{aligned}
K &= \int \boldsymbol{t} : \mathrm{d}(\nabla \boldsymbol{U}^p) = \int \boldsymbol{t}_s : \mathrm{d}\boldsymbol{e}^p + \int \boldsymbol{t}_a : \mathrm{d}\boldsymbol{w}^p \\
&= \int \boldsymbol{t}_s : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p + \frac{1}{4} \int \widehat{\boldsymbol{J}} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}^p = \alpha_e + \alpha_\theta
\end{aligned} \tag{44}
$$

假设应变与局部转动互不耦合，则后继屈服面可由下式给出

$$
\left.
\begin{aligned}
f_s &= \varphi_s(\boldsymbol{t}_s) - H(\alpha_e) = 0 \\
f_\alpha &= \varphi_a(\widehat{\boldsymbol{J}}) - H(\alpha_\theta) = 0
\end{aligned}
\right\} \tag{45}
$$

加载条件：

$$
\frac{\partial \varphi_a}{\partial \widehat{\boldsymbol{J}}} \cdot \mathrm{d}\widehat{\boldsymbol{J}} = \begin{cases} < 0, & \text{卸载} \\ = 0, & \text{中性变载} \\ > 0, & \text{加载} \end{cases} \tag{46}
$$

$$
\frac{\partial \varphi_s}{\partial \boldsymbol{t}_s} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{t}_s = \begin{cases} < 0\,, & \text{卸载} \\ = 0\,, & \text{中性变载} \\ > 0\,, & \text{加载} \end{cases} \tag{47}
$$

在加载过程中，应有下述关系

$$
\left.\begin{aligned} \dot{f}_s &= \frac{\partial \varphi_s}{\partial \boldsymbol{t}_s} : \boldsymbol{t}_s - \frac{\partial H}{\partial \alpha_e} \boldsymbol{t}_s : \boldsymbol{e}^p = 0 \\ \dot{f}_a &= \frac{\partial \varphi_a}{\partial \boldsymbol{t}_a} : \boldsymbol{t}_a - \frac{\partial H}{\partial \alpha_\theta} \widehat{\boldsymbol{J}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}^p = 0 \end{aligned}\right\} \tag{48}
$$

根据 Drucker 公设，塑性流的增量本构关系

$$
\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{e}}^p &= \dot{\lambda}_e \frac{\partial \varphi_s}{\partial \boldsymbol{t}_s}\,, \qquad \dot{\lambda}_e > 0 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}^p &= \dot{\lambda}_\theta \frac{\partial \varphi_a}{\partial \widehat{\boldsymbol{J}}}\,, \qquad \dot{\lambda}_\theta > 0 \end{aligned}\right\} \tag{49}
$$

将 (49) 式代入 (48) 式，解出

$$
\left.\begin{aligned} \dot{\lambda}_e &= \frac{\partial \varphi_s}{\partial \boldsymbol{t}_s} : \boldsymbol{t}_s \Big/ \frac{\partial H}{\partial \alpha_e} \boldsymbol{t}_s : \frac{\partial \varphi_s}{\partial \boldsymbol{t}_s} > 0 \\ \dot{\lambda}_\theta &= \frac{\partial \varphi_a}{\partial \widehat{\boldsymbol{J}}} \cdot \widehat{\boldsymbol{J}} \Big/ \frac{\partial H}{\partial \alpha_\theta} \widehat{\boldsymbol{J}} \cdot \frac{\partial \varphi_a}{\partial \widehat{\boldsymbol{J}}} > 0 \end{aligned}\right\} \tag{50}
$$

将 (49) 式代入 (36) 式和 (41) 式

$$
\left.\begin{aligned} &\dot{\lambda}_e \int_V \boldsymbol{t}_s : \frac{\partial \varphi_s}{\partial \boldsymbol{t}_s} \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}) \geq 0 \\ &\dot{\lambda}_\theta \int_V \widehat{\boldsymbol{J}} \cdot \frac{\partial \varphi_a}{\partial \widehat{\boldsymbol{J}}} \mathrm{d}v(\boldsymbol{r}) \geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{51}
$$

为使上述不等式恒成立的充分条件

$$
\left.\begin{aligned} \varphi_s &= \varphi_s(\boldsymbol{t}_s : \boldsymbol{t}_s) \\ \varphi_a &= \varphi_a(\widehat{\boldsymbol{J}} \cdot \widehat{\boldsymbol{J}}) \end{aligned}\right\} \tag{52}
$$

其中： φ_s 和 φ_a 是一非负函数．根据 Mises 屈服函数的形式，可以选取

$$
\left.\begin{aligned} \varphi_s(\boldsymbol{t}_s : \boldsymbol{t}_s) &= K_s \boldsymbol{t}_s : \boldsymbol{t}_s\,, \quad K_s > 0 \\ \varphi_a(\widehat{\boldsymbol{J}} \cdot \widehat{\boldsymbol{J}}) &= K_a \widehat{\boldsymbol{J}} \cdot \widehat{\boldsymbol{J}}\,, \quad K_a > 0 \end{aligned}\right\} \tag{53}
$$

以及： $H(\alpha_e) = \alpha_e$，$H(\alpha_\theta) = \alpha_\theta$．即得到各向同性强化材料的非对称 - 非局部塑性本构关系．

4 结论和理论的应用

本文建立的非对称 - 非局部塑性力学的场方程

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\rho}+\rho V^m|_m=0\\&\rho\dot{\boldsymbol{V}}-\rho\boldsymbol{f}-\boldsymbol{t}^k|_k=0\\&\boldsymbol{g}_k\times\boldsymbol{t}^k-\widehat{\boldsymbol{J}}=0\end{aligned}\right\}\tag{54}$$

本构关系由下表给出

	Strain	Local rotation
Constitutive relation	$\boldsymbol{t}_s=\boldsymbol{C}:(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{e}^p)+\int_V\boldsymbol{b}_2:(\boldsymbol{e}'-\boldsymbol{e}^{p'})\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')$	$\widehat{\boldsymbol{J}}=\int_V\left\{4\boldsymbol{C}_1\cdot(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}')+2\boldsymbol{C}_9\cdot(\boldsymbol{\theta}^p-\boldsymbol{\theta}^{p'})\right\}\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}')$
Yield surface	$f_s=K_s\boldsymbol{t}_s:\boldsymbol{t}_s-\int\boldsymbol{t}_s\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{e}^p=0$	$f_a=K_a\widehat{\boldsymbol{J}}\cdot\widehat{\boldsymbol{J}}-\int\widehat{\boldsymbol{J}}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}^p=0$
Plasticity flow	$\dot{\boldsymbol{e}}^p=\dot{\lambda}_e\boldsymbol{t}_s,\quad\dot{\lambda}_e=\dfrac{\boldsymbol{t}_s:\boldsymbol{t}_s}{\alpha_e}$	$\dot{\boldsymbol{\theta}}^p=\dot{\lambda}_\theta\widehat{\boldsymbol{J}},\quad\dot{\lambda}_\theta=\widehat{\boldsymbol{J}}\cdot\widehat{\boldsymbol{J}}/\alpha_\theta$
Loading condition	$\boldsymbol{t}_s\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{t}_s>0$	$\widehat{\boldsymbol{J}}\cdot\mathrm{d}\widehat{\boldsymbol{J}}>0$

由于局部转动与应变互不耦合，从而产生了新的流动方式.

1) 应变屈服： $f_s=0,\ f_a<0$.

2) 局部转动的屈服： $f_s<0,\ f_a=0$.

3) 总体屈服： $f_s=0,\ f_a=0$.

这样，在一个力学过程中，应分为下述四个状态：1) 弹性变形状态；2) 应变塑性变形和局部转动的弹性变形状态；或者为：3) 应变弹性变形和局部转动的塑性变形状态； 4) 总体的塑性变形状态. 在以上各状态中，物体具有不同的力学性质.

由于篇幅所限，本文仅就应用本理论求解的几个问题做一个简单的介绍.

1) 关于简单剪切和纯剪切的差别.

剪切变形是最基本的变形之一. 经典连续体力学的剪应力互等定理使我们认为简单剪切和纯剪切是等价的，它们之间相差一刚体转动. 事实上，剪切流动只可能沿着两个等价方向中的一个产生. 例如薄壁圆筒的扭转实验中的滑移线产生在环向，而不可能产生于轴向，这个现象可以用非局部体力矩与应力非对称的理论来解释. 这是由于每个质点的局部转动与

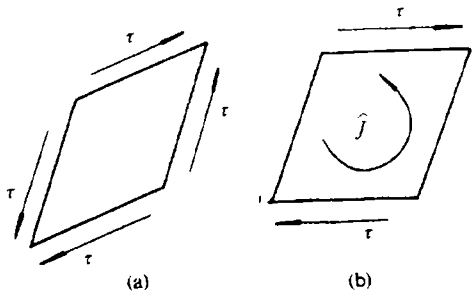

图 1
Fig.1

周围介质的局部转动的非一致性而引起的非局部体力矩，从而改变了剪应力的互等性质．正如图 1 所示．日本学者 Kunio Myauchi 设计了一个实验来研究简单剪切，发现简单剪切和纯剪切之间的屈服点和强化规律是不同的．这个差异可以用本文所建立的理论来解释．关于实验的详细情况请参照文献 [8].

2) 王冲和陈至达在金属断裂实验中发现，裂纹尖端的局部转动场对于裂纹的扩展、止裂起着十分重要的作用．但这个转动是非微极转动，而是局部转动．他们曾基于非局部 - 非对称弹性理论提出一种微转动韧度的概念．而在金属材料的裂纹尖端，变形已进入塑性阶段，本理论的建立对于合理解释裂纹尖端的局部转动作用奠定了理论基础 [5,6].

3) 金属材料的亚微观的局部失稳现象之一是材料的局部转动的非稳定性，因此产生了旋转失稳带 (或称之为： kink band, rotation band etc.)[12]．至今为止，人们还没有就此种旋转失稳带做出一个比较合理的力学机理的解释．最近，高键基于位错和旋错的连续分布理论和非对称连续场论，研究了 rotation band, 取得了很大进展 [13].高键又证明了偶应力理论即为非局部 - 非对称连续场论的特例，它可以克服偶应力理论的不足之处 [14].

我们认为，非对称 - 非局部连续场论在应用于涉及到微观的力学现象中具有广阔的应用前景．

参　考　文　献

1 陈至达．论连续体有限变形的位移协调条件．应用数学和力学． 1983, 4: 757–760

2 高键，戴天民．具有非局部体力矩的非局部弹性理论．力学学报， 1990, : 446–455

3 高键，陈至达．非局部 - 非对称弹性理论．应用数学和力学， 1992, 13(9): 793–804

4 高键．非局部 - 非对称拟连续统理论．固体力学学报， 1993, 6(2): 115–129

5 Wang C(王冲), Chen ZD(陈至达). *Eng Fract Mech*, 1991, 38(2, 3): 147–155

6 Wang C(王冲), Chen ZD(陈至达). *Int J Fracture*, 1992, 54: 359

7 Romanov AE, Vladimirov VI. Disclinations in crystalling solids. in Nobarro FRV ed. Dislocations in Solids. 1992, 9: 193–194

8 Kunio Miyauchi. Material behavior in simple shear deformation. ICCLEM, August(1989): Chong qing, China. 832–836

9 Friedman N, Katz. Arch Ratl Mech Anal, 1966, 21: 367

10 Eringen AC. On nonlocal plasticity. *Int J Engng Sci*, 1981, 19: 1461

11 Eringen AC. Theories of nonlocal plasticity. *Int J Engng Sci*, 1983, 21: 741–752

12 Kim MS etc. Orientation dependence of deformation and fracture behavior in Ni_3 (Al, Ti) single crystals at 973K. *Acta Metall*, 1988, 36: 2967–2978

13 Jian Gao(高键). On the Study of Physical Theory of Asymmetric Plasticity, Localization and Postlocation Bevavior of Rotational Plastic Deformation, MM Report 21 in ME-EM Dept. MTU May, 1993

14 Jian Gao(高键). On the study of stress asymmetry in nonlocal elosticity. *J of Elasticity*. (to be pressed)

THEORY OF NONLOCAL ASYMMETRIC PLASTICITY

Gao Jian
(*Shandong Polytechnics University, Jinan* 250014, *China*)
Chen Zhida
(*Beijing Graduate School, China University of Mining, Beijing* 100083, *China*)

Abstract By the nonlocal continuum theory, with small strain and small local rotation assumption, we consider the effect of body couple for asymmetric stress field by assuming that the energy functions of symmetric and the asymmetric part of stress can be formulated independently. By means of the principle of thermodynamics and the concept of yield surface, a new theory for nonlocal asymmetric elasto-plasticity is established.

Key words asymmetric stress, nonlocal theory, local rotation, body couple, elasto-plasticity