

# 周期性加筋板中的波传播特性<sup>1)</sup>

程 伟 诸德超

(北京航空航天大学固体力学研究所, 北京 100083)

**摘要** 本文利用周期性结构的交互变分原理分析加筋板的波传播特性, 并引进升阶谱有限元以提高计算精度, 验证了该方法在高频区域的有效性. 最后, 分析了加筋板的长宽比, 加筋状态及边界条件对结构波传播的影响.

**关键词** 周期加筋板, 波传播, 交互变分原理

## 一、引 言

周期性结构在航空及民用建筑中应用非常普遍, 加筋板更是机身及机翼的重要结构形式. 波传播问题很早就引起了人们的兴趣, 文 [1] 用传递矩阵和模态法研究周期性梁中的波传播及同向声场引起的振动问题. 文 [2] 把二维周期性结构平面波传播理论与升阶谱有限元技术相结合, 从而提高了计算效率, 改进了计算程序. 文 [3] 指出利用周期性结构中的一个典型子结构进行整个结构的波传播分析, 在数学上属非自伴随问题, 并建立了相应的交互变分原理, 从而为数值分析提供了更严密的理论基础并便于深入阐述问题的数学物理性质.

本文给出加筋板的波传播问题交互变分原理的具体形式, 结合升阶谱有限元技术作出数值分析, 讨论升阶谱元阶次对计算结果的影响, 分析结构形式, 加筋状态及边界条件对结构波传播的影响.

## 二、周期性加筋板波传播的交互变分原理

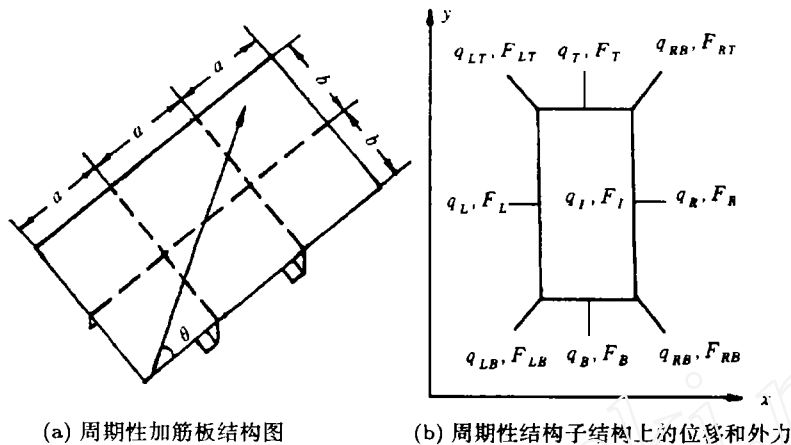
周期性加筋板结构 (图 1a) 可看作由一些基本加筋板 (子结构) 组成, 图 (1b) 表示某一块典型的加筋板单元,  $q_{LB}$ ,  $q_{RB}$ ,  $q_{RT}$ ,  $q_{LT}$ ,  $q_L$ ,  $q_R$ ,  $q_B$ ,  $q_T$  和  $q_i$  分别代表板左下角, 右下角, 右上角, 左上角, 左边, 右边, 底边, 上边和内部的自由度, 关于板的自由振动问题, 其频率可由如下的瑞利商形式给出

$$\omega^2 = \text{St} \frac{U(w)}{T(w)} \quad (1)$$

其中  $U(w)$  和  $T(w)$  分别为板的势能和动能系数表达式,  $w$  为横向位移函数. 对于波传播问题, 当板上某点受到激励时, 如果产生一个波  $w$  沿  $\theta$  的正方向 (图 1a) 行进, 同时也将产生一个波  $w^*$  向  $\theta$  的反方向行进.

<sup>1)</sup> 国家教委博士点基金资助.

本文于 1993 年 3 月 28 日收到第一稿.



(a) 周期性加筋板结构图

(b) 周期性结构子结构上的位移和外力

图 1  
Fig.1

(a) Periodically stiffened plate, (b) The displacements and forces of periodic sub-structure

因为微分算子  $\nabla^2[D\nabla^2(\bullet)]$  的伴随算子仍为  $\nabla^2[D\nabla^2(\bullet)]$ ,  $w$  与其伴随函数  $v$  满足下列格林恒等式 [4]

$$\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \{ \bar{v}[\nabla^2(D\nabla^2 w) - \omega^2 m w] - \bar{w}[\nabla^2(D\nabla^2 v) - \omega^2 m v] \} dx dy = 0 \quad (2)$$

其中  $D$  是弯曲刚度,  $\nabla^2$  是拉普拉斯算子,  $m$  为板单位面积质量, 函数上的符号“ $\bar{\cdot}$ ”表示取其共轭, 分部积分后有

$$\begin{aligned} & (U_p - \bar{U}_p) - (T_p - \bar{T}_p) - \int_0^a \left\{ \left( \bar{M}_x^v \frac{\partial w}{\partial x} - \bar{M}_x^w \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_0^a - \left( \bar{Q}_x^v w - \bar{Q}_x^w v \right) \Big|_0^a \right\} dx \\ & - \int_0^a \left\{ \left( \bar{M}_y^v \frac{\partial w}{\partial y} - \bar{M}_y^w \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_0^b - \left( \bar{Q}_y^v w - \bar{Q}_y^w v \right) \Big|_0^b \right\} dy \\ & - 2 \left( \bar{M}_{xy}^v w - \bar{M}_{xy}^w v \right) \Big|_0^a \Big|_0^b = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 中  $M_x^{(\bullet)}$ ,  $M_y^{(\bullet)}$ ,  $M_{xy}^{(\bullet)}$ ,  $Q_x^{(\bullet)}$ ,  $Q_y^{(\bullet)}$  分别为板弯矩和剪力, 上标  $(\bullet)$  代表  $w$  或  $v$ , 且

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2v \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-v) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} dx dy \\ T_p &= \frac{\omega^2 m}{2} \int_0^a \int_0^b \bar{v} w dx dy \end{aligned}$$

对于自由波传播问题, 在相邻子结构的边界上, 正向波  $w$  满足如下的周期性关系

$$\left. \begin{aligned} & w(a, y) = e^{\mu_x} w(0, y), \quad w(x, b) = e^{\mu_y} w(x, 0), \quad w(a, b) = e^{\mu_x + \mu_y} w(0, 0) \\ & \frac{\partial w}{\partial x}(a, y) = e^{\mu_x} \frac{\partial w}{\partial x}(0, y), \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x, b) = e^{\mu_y} \frac{\partial w}{\partial y}(x, 0) \\ & \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y}(a, b) = e^{\mu_x + \mu_y} \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y}(0, 0), \quad M_{xy}^w(a, b) = e^{\mu_x + \mu_y} M_{xy}^w(0, 0) \\ & M_x^w(a, y) = e^{\mu_x} M_x^w(0, y), \quad M_y^w(x, b) = e^{\mu_y} M_y^w(x, 0) \\ & Q_x^w(a, y) = e^{\mu_x} Q_x^w(0, y), \quad Q_y^w(x, b) = e^{\mu_y} Q_y^w(x, 0) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中  $\mu_x$  和  $\mu_y$  分别为波沿  $x$  和  $y$  方向传过一个子结构跨度的传播常数. 将 (4) 代入 (3) 得到伴随函数  $v$  的边界条件

$$v(a, y) = e^{-\bar{\mu}_x} v(0, y), \quad v(x, b) = e^{-\bar{\mu}_y} v(x, 0), \quad \dots \quad (5)$$

即 (4) 式中的  $\mu_x$  换为  $-\bar{\mu}_x$ 、 $\mu_y$  换为  $-\bar{\mu}_y$  便可得到 (5) 式. 反向波  $w^*$  也同样满足微分算子  $\nabla^2[D\nabla^2(\bullet)]$  和边界条件 (4), 但需将 (4) 中的  $\mu_x$  换为  $-\mu_x$ 、 $\mu_y$  换为  $-\mu_y$ . 可见  $w^*$  与  $v$  互为共轭, 由于  $w$  与  $v$  边界条件不同, 所以波传播为非自伴随问题. 其瑞利商形式为<sup>[3]</sup>

$$\omega^2 = \text{St} \frac{\text{Re}U_p(w, \bar{w}, v, \bar{v})}{\text{Re}T_p(w, \bar{w}, v, \bar{v})} \quad (6)$$

对于有加筋和子结构边界上有弹性支持的板, 其推导过程完全相同. 只需将 (6) 式的分子  $U_p$  和分母  $T_p$  加上有关的能量项, 即为

$$\begin{aligned} U &= U_p + \frac{(EI)_x}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx + \frac{(EI)_y}{2} \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dy \\ &\quad + \frac{(GJ)_x}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx + \frac{k_x}{2} \int_0^a (\bar{v}w) dx + \frac{k_y}{2} \int_0^b (\bar{v}w) dy \\ &\quad + \frac{(GJ)_y}{2} \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dy + \frac{k_{cx}}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx + \frac{k_{cy}}{2} \int_0^b \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \\ T &= T_p + \frac{(\rho A)_x}{2} \int_0^a (\bar{v}w) dx + \frac{(\rho A)_y}{2} \int_0^b (\bar{v}w) dy + \frac{(\rho I_p)_x}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \\ &\quad + \frac{(\rho I_p)_y}{2} \int_0^b \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \end{aligned}$$

其中的  $EI$ ,  $GJ$ ,  $\rho$ ,  $A$ ,  $I_p$ ,  $k$  和  $k_c$  分别为加筋梁的弯曲刚度, 扭转刚度, 质量密度, 横截面积, 转动惯量, 弹性支持线刚度和弹性支持扭转刚度.

### 三、升阶谱有限元与波传播控制方程

板位移  $w(\xi, \eta)$  和  $v(\xi, \eta)$  可用升阶谱有限元法表达为

$$\left. \begin{aligned} w(\xi, \eta) &= \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p c_{r,s}^w f_r(\xi) f_s(\eta) \\ v(\xi, \eta) &= \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p c_{r,s}^v f_r(\xi) f_s(\eta) \\ f_1(\xi) &= f_3(-\xi) = \frac{1}{4}(2 + \xi)(1 - \xi)^2 \\ f_2(\xi) &= -f_4(-\xi) = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \xi)^2 \\ f_m(\xi) &= \sum_{n=0}^{\frac{m-1}{2}} \frac{(-1)^n (2m - 2n - 7)!!}{2^n n! (m - 2n - 1)!} \xi^{m-2n-1}, \quad (m > 4) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中  $\xi = 2\frac{x}{a} - 1$ ,  $\eta = 2\frac{y}{b} - 1$ ,  $f_i(\eta)$  的表达式和  $f_i(\xi)$  相同. 将 (7) 代入 (6), 并利用

(4) 和 (5) 所示  $w$  和  $v$  的周期性边界条件得波传播方程

$$[K'(\mu_X, \mu_Y) - \Omega^2 M'(\mu_X, \mu_Y)] \begin{bmatrix} q_{LB} \\ q_L \\ q_B \\ q_t \end{bmatrix} = 0 \quad (8)$$

(8) 式中  $\Omega$  为无因次频率,  $K'$  和  $M'$  分别为波传播刚度和质量矩阵, 可由常规的刚度和质量矩阵经过变换和缩聚得到, 其具体表达式参见文 [2], 给定  $\mu_X$  和  $\mu_Y$ , 方程 (4) 可作为关于  $\Omega$  的特征值问题求解. 可以证明 [3], 无论  $\mu_X$  和  $\mu_Y$  为任何复数,  $\Omega^2$  均为实数.

上述条件正好满足频率为  $\Omega$  的平面波在加筋板上沿着与  $x$  轴成  $\theta$  角的方向传播的条件, 波传播在  $x, y$  和  $\theta$  方向的波数分别为

$$k_x = \frac{\mu_x}{a}, k_y = \frac{\mu_y}{b}, k_\theta = \sqrt{\left(\frac{\mu_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_y}{b}\right)^2}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a\mu_y}{b\mu_x}\right) \quad (9)$$

#### 四、结果分析

表 1 给出了图 (2a) 到图 (2f) 所对应结构的结构参数.

表 1 结构参数

Table 1 Structural parameters

Structure	Length-width ratio $b/a$	$p$	$KB_x$	$CB_x$	$EB_x$	$GB_x$	$AT_x$	$JT_x$
Fig.2(a)	1	7	$\infty$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Fig.2(b)	2	7	$\infty$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Fig.2(c)	2	9	$\infty$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Fig.2(d)	1	7	$\infty$	10.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Fig.2(e)	1	7	0.0	0.0	400.0	0.0	0.0	0.0
Fig.2(f)	1	7	0.0	0.0	400.0	0.0	1.0	0.0

$$KB_x = \frac{k_x a^4}{2bD}, CB_x = \frac{k_{cx} a^4}{b^2 D}, EB_x = \frac{8(EI)_x}{bD}, GB_x = \frac{8(GJ)_x a^2}{b^3 D}, AT_x = \frac{A_x}{2hb}, JT_x = \frac{2I_{px}}{hb^3}.$$

$p$  为升阶谱元阶次, 总自由度数  $(p-2)^2$ ,  $y$  方向边界条件与  $x$  方向相同.

表 2 给出了升阶谱元阶次对计算结果的影响, 当  $p > 7$  时, 计算的波传播带边界频率在中频段已经相当精确. 另外, 由图 (2b,c) 看到,  $p = 9$  比  $p = 7$  在高频段多一个传播带. 经与理论值 [5] 比较说明, 只需足够高的形函数阶次, 本文方法不至遗漏某些高频模态.

比较图 2a 和 b 可以看出, 随着板长宽比的增加, 其波传播带越来越密, 即波传播能力加强. 由图 2a 和 d 可以看出, 增加边界的扭转刚度, 可明显的减弱板的波传

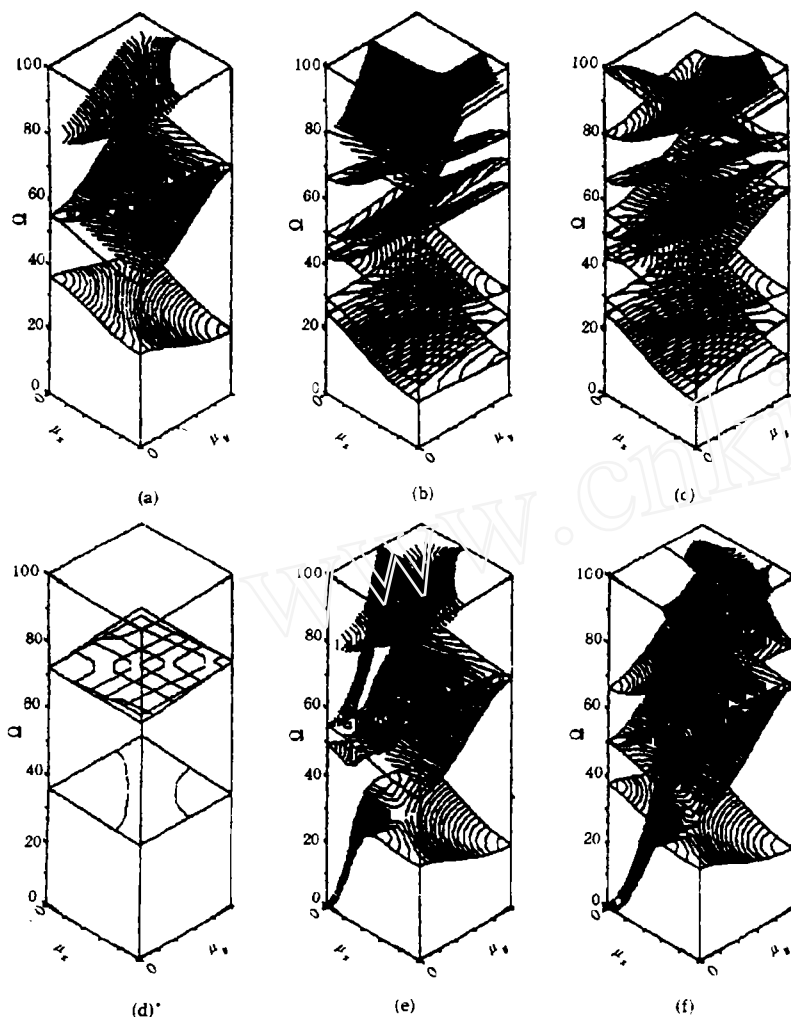


图 2 各种结构的波传播相常数面  
Fig.2 Propagation surfaces of structures

表 2 升阶谱元阶次  $p$  对边界频率  $\Omega$  的影响 (图 2b,c)

Table 2 The influence of the order  $p$  of hierarchial finite element on the boundary frequency  $\Omega$

$p$	$(\mu_x, \mu_y)$	Frequency-band number								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	(0,0)	24.581	28.970	42.761	45.631	49.507	66.718	80.287	101.47	129.78
	(0, $\pi$ )	23.816	31.867	39.350	42.106	51.854	62.031	129.45	136.36	136.72
	( $\pi$ ,0)	13.687	19.766	39.724	65.126	70.197	76.476	83.971	93.228	100.13
	( $\pi$ , $\pi$ )	12.337	23.707	32.383	64.678	71.941	80.225	92.780	101.86	112.54
9	(0,0)	24.578	28.951	42.588	44.808	49.349	56.120	66.341	80.183	98.959
	(0, $\pi$ )	23.816	31.833	39.093	41.947	51.694	61.688	67.399	80.379	88.689
	( $\pi$ ,0)	13.686	19.739	38.735	50.846	64.004	69.344	83.331	91.730	95.667
	( $\pi$ , $\pi$ )	12.337	23.651	32.080	63.063	63.554	71.116	76.295	79.543	91.315
Analytical solution	(0,0)	24.578	28.951	42.587	44.769	49.348	54.743	66.299	78.957	
	(0, $\pi$ )	23.816	31.826	39.089	41.946	51.674	61.685			
	( $\pi$ ,0)	13.686	19.739	39.694		63.981	69.327			
	( $\pi$ , $\pi$ )	12.337	23.646	32.076		63.535		71.555		91.294

播能力. 当然, 增加边界的线刚度, 也可起到同样的效果 (图 2e,f). 另外, 由图 2e 和 f 还可看到, 当板自由时, 它可传播零频的振动 (刚体运动), 这与实际情况也是相符合的.

综上所述, 在结构设计时, 如果要增强结构的波传播能力, 可通过增大长宽比、减小边界的扭转和线刚度及增加结构质量的办法.

### 参 考 文 献

- [1] Mead DJ. Vibration Response and Wave Propagation in Periodic Structures, *Journal of Engineering for Industry*, 1971 Aug
- [2] Mead DJ, Zhu DC(诸德超), and Bardell N S. Free Vibration of an Orthogonally Stiffened Flat Plate, *Journal of Sound and Vibration*, 1988, 127(1)
- [3] Zhu DC(诸德超), Cheng W(程伟). The Mutual Variational principle of Free Wave Propagation in Periodic Structures. *Acta Mechanica Sinica(english edition)*, 1993, 3(2)
- [4] Lanczos C. *Linear Differential Operators*, Chapter 4. D. Van Nostrand Company, Ltd. 1961
- [5] Leissa AW. *Vibration of Plates*, NASA SP-160, 1969

## THE CHARACTERISTICS OF WAVE PROPAGATION IN A PERIODIC ORTHOGONALLY STIFFENED FLAT PLATE

Cheng Wei      Zhu Dechao

(*Solids Mechanics Institute, Beijing University of  
Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China*)

**Abstract** The characteristics of wave propagation in a periodic plate reinforced by regular orthogonal stiffeners are analyzed using the mutual variational principle. The hierarchical finite element method is used to set up the matrix eigen-equation governing the wave propagation problem. The numerical results show that this method can guarantee a good accuracy even in high frequency field. Finally, the effect of the ratio of length to width, the parameters of the stiffeners and the boundary conditions are discussed.

**Key words** periodic stiffened plates, wave propagation, mutual variational principles