

# 多重子结构法在非线性 控制系统中的应用<sup>1)</sup>

邓子辰

(西北工业大学五系 504 教研室, 西安 710072)

**提要** 多重子结构法是计算结构力学程序系统采用的最广泛的方法之一。由于计算结构力学与最优控制存在模拟关系, 本文同样基于此法对非线性控制系统进行计算, 并编制了相应的程序系统。本文工作进一步说明了计算结构力学与最优控制理论存在模拟关系。

**关键词** 多重子结构法, 非线性, 时段, 凝聚

## 1. 引言

计算结构力学与最优控制的模拟关系已在多篇文献中论述过<sup>[1,2]</sup>, 这就启发我们在处理控制问题时能否从结构力学中找到借鉴。多重子结构法是结构力学中处理大型复杂结构采用的最有力的方法之一, 特别是结构力学中的程序系统, 大多数更是依赖于此法。文献 [3] 在这方面有专门论述。

以往在处理控制系统问题时, 由于一直作为动力问题来考虑, 因此无法引入多重子结构法。建立了计算结构力学与最优控制的模拟关系后, 会发现控制中的时间坐标与结构力学中的长度坐标存在对应关系。相应地, 控制中的时段对应于结构力学中的子结构。自然原来的动力问题可化为静力问题来解决, 这就为多重子结构法引入控制理论奠定了基础。

## 2. 多重子结构法原理

对于多重子结构分析中的任意子结构模式的有限元方程, 可由下式给出

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{io} \\ K_{oi} & K_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_o \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

其中, 下标  $i, o$  分别代表子结构的内部与出口之意。  $x_i, x_o$  分别为内部位移自由度和出口位移自由度;  $F_i, F_o$  分别为  $x_i, x_o$  对应的外力向量。

式 (2.1) 的凝聚公式可表示为

$$K_{oo}^* x_o = F_o^* \quad (2.2)$$

<sup>1)</sup> 航空科学青年基金资助项目 (编号为 Q93B5304)。

本文于 1992 年 12 月 27 日收到第一稿, 1993 年 7 月 14 日收到修改稿。

$$K_{oo}^* = K_{oo} - K_{oi} K_{ii}^{-1} K_{io} \quad (2.3)$$

$$F_o^* = F_o - K_{oi} K_{ii}^{-1} F_i \quad (2.4)$$

一般多重子结构法是利用 (2.2)–(2.4) 对各级子结构模式逐级进行凝聚, 最终构成最高级模式 (结构自身) 的刚度阵与外力向量. 如此则可由最高级子结构模式通过结构树周游逐渐向下进行求解. 其中主要利用

$$x_i = K_{ii}^{-1}(F_i - K_{io}x_o) \quad (2.5)$$

进行由出口自由度向内部自由度的传递计算. 最终解得整个结构的位移场与内力场.

以上就是一般多重子结构法求解问题的特点.

### 3. 非线性控制中的消元过程

非线性控制系统的动力方程一般为<sup>[4]</sup>

$$\dot{x}_* = f(x_*, u_*, t) \quad (3.1)$$

价值函数本文定义为

$$J = \int_0^{t_f} [X(x_*) + U(u_*)] dt + P(x_{f*}) \quad (3.2)$$

$x \in R^n$ , 为状态向量;  $u \in R^m$ , 为控制向量. 下标 \* 表示该量为问题的真实解; 而下标  $f$  表示该量为末态值. 设已求得问题的近似解  $x_a, u_a$ , 这样下一步的解可表示为

$$x_* = x_a + q, \quad u_* = u_a + u \quad (3.3)$$

向量  $q, u$  分别为  $x_a, u_a$  的扰动量. 式 (3.3) 分别代入 (3.1) 和 (3.2), 并进行 Taylor 近似展开, 这时动力方程和价值函数分别为

$$\dot{q} = F_a q + \Gamma_a u + r_a \quad (3.4)$$

$$J = J_a + \int_0^{t_f} \left[ \frac{1}{2} q^T X_{,aa} q + \frac{1}{2} u^T U_{,aa} u + X_{,a}^T q + U_{,a}^T u \right] dt + P_{,a}^T q_f + \frac{1}{2} q_f^T P_{,aa} q_f \quad (3.5)$$

式 (3.4) 和 (3.5) 中

$$F_a = (\partial f / \partial x)_a, \quad \Gamma_a = (\partial f / \partial u)_a, \quad r_a = f(x_a, u_a) - \dot{x}_a \quad (3.6)$$

$$X_{,a} = (dX/dx)_a, \quad U_{,a} = (dU/du)_a, \quad X_{,aa} = (d^2 X/dx^2)_a, \quad U_{,aa} = (d^2 U/du^2)_a \quad (3.7)$$

式 (3.5) 对于式 (3.4) 引入 Lagrange 乘子向量  $p$ , 这时扩展的价值泛函为

$$J_e = \int_0^{t_f} \left[ -p^T \dot{q} + p^T (F_a q + \Gamma_a u + r_a) + \frac{1}{2} q^T X_{,aa} q + \frac{1}{2} u^T U_{,aa} u + X_{,a}^T q + U_{,a}^T u \right] dt + P_{,a}^T q_f + \frac{1}{2} q_f^T P_{,aa} q_f \quad (3.8)$$

根据极大值原理, 得

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}_a^{-1}(\mathbf{F}_a^T \mathbf{p} + \mathbf{U}_{,a}) \quad (3.9)$$

代入式 (3.8)

$$J_e = \int_0^{t_f} \left[ -\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p}^T \mathbf{F}_a \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{Q}_a \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{G}_a \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \mathbf{r}_q - \mathbf{q}^T \mathbf{r}_p \right] dt \\ + \mathbf{p}_{,a}^T \mathbf{q}_f + \frac{1}{2} \mathbf{q}_f^T \mathbf{P}_{,aa} \mathbf{q}_f + \text{常数项} \quad (3.10)$$

其中

$$\mathbf{Q}_a = \mathbf{X}_{,aa}, \quad \mathbf{R}_a = \mathbf{U}_{,aa}, \quad \mathbf{r}_q = \mathbf{r}_a - \mathbf{F}_a \mathbf{R}_a^{-1} \mathbf{U}_{,a}, \quad \mathbf{r}_p = -\mathbf{X}_{,a}, \quad \mathbf{G}_a = \mathbf{F}_a \mathbf{R}_a^{-1} \mathbf{F}_a^T \quad (3.11)$$

$J_e$  对  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  分别取极值, 可得线性化方程组

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{F}_a \mathbf{q} - \mathbf{G}_a \mathbf{p} + \mathbf{r}_q \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\mathbf{Q}_a \mathbf{q} - \mathbf{F}_a^T \mathbf{p} + \mathbf{r}_p \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

及自然边界条件

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{P}_{,aa} \mathbf{q}_f + \mathbf{P}_{,a} \quad (3.13)$$

(3.12) 就是控制中的对偶方程. 由结构力学与最优控制的模拟关系可知,  $\mathbf{q}$  相当于结构力学中的位移向量;  $\mathbf{p}$  则相当于内力向量<sup>[2]</sup>. 而控制中的时间坐标对应于结构力学中的长度坐标. 这样, 时段的凝聚消元就可用子结构的消元法来完成.

现在考虑两个连续时段  $(t_a, t_b)$ ,  $(t_b, t_c)$  的凝聚, 这两个时段的混合能分别为<sup>[1,2]</sup>

$$V(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_b) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_b^T \mathbf{G}_1 \mathbf{p}_b - \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{q}_a - \mathbf{p}_b^T \mathbf{F}_1 \mathbf{q}_a - \mathbf{p}_b^T \mathbf{r}_{q1} + \mathbf{q}_a^T \mathbf{r}_{p1} \quad (3.14)$$

$$V(\mathbf{q}_b, \mathbf{p}_c) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_c^T \mathbf{G}_2 \mathbf{p}_c - \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{q}_b - \mathbf{p}_c^T \mathbf{F}_2 \mathbf{q}_b - \mathbf{p}_c^T \mathbf{r}_{q2} + \mathbf{q}_b^T \mathbf{r}_{p2} \quad (3.15)$$

其中后两项是非线性因素造成的. 由于是线性化问题, 故时段  $(t_a, t_c)$  的混合能应具有下列形式

$$V(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_c) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_c^T \mathbf{G}_c \mathbf{p}_c - \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^T \mathbf{Q}_c \mathbf{q}_a - \mathbf{p}_c^T \mathbf{F}_c \mathbf{q}_a - \mathbf{p}_c^T \mathbf{r}_{qc} + \mathbf{q}_a^T \mathbf{r}_{pc} \quad (3.16)$$

对应对 (3.14)~(3.16), 依次应有下列全变分方程<sup>[1,2]</sup>

$$\mathbf{p}_a^T \delta \mathbf{q}_a + \mathbf{q}_b^T \delta \mathbf{p}_b = -\delta V(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_b) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{p}_b^T \delta \mathbf{q}_b + \mathbf{q}_c^T \delta \mathbf{p}_c = -\delta V(\mathbf{q}_b, \mathbf{p}_c) \quad (3.18)$$

$$\mathbf{p}_a^T \delta \mathbf{q}_a + \mathbf{q}_c^T \delta \mathbf{p}_c = -\delta V(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_c) \quad (3.19)$$

式 (3.17) 和 (3.18) 相加, 并注意到  $\mathbf{q}_b^T \delta \mathbf{p}_b + \mathbf{p}_b^T \delta \mathbf{q}_b = \delta(\mathbf{p}_b^T \mathbf{q}_b)$ , 由此可得

$$(\mathbf{p}_a^T \delta \mathbf{q}_a + \mathbf{q}_c^T \delta \mathbf{p}_c) = -\delta[V(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_b) + V(\mathbf{q}_b, \mathbf{p}_c) + \mathbf{p}_b^T \mathbf{q}_b] \quad (3.20)$$

$q_b, p_b$  不在左边出现, 故可作为内部向量进行凝聚, 完成对  $q_b, p_b$  的变分, 得

$$\left. \begin{aligned} p_b &= Q_2 q_b + F_2^T p_c + r_{p2} \\ q_b &= -G_1 p_b + F_1 q_a + r_{q1} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

求解 (3.21), 可得

$$\begin{aligned} q_b &= (I + G_1 Q_2)^{-1} F_1 q_a - (I + G_1 Q_2)^{-1} G_1 F_2^T p_c \\ &\quad - (I + G_1 Q_2)^{-1} G_1 r_{p2} + (I + G_1 Q_2)^{-1} r_{q1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} p_b &= (I + G_1 Q_2)^{-T} Q_2 F_1 q_a + (I + G_1 Q_2)^{-T} F_2^T p_c \\ &\quad + (I + G_1 Q_2)^{-T} r_{p2} + (I + G_1 Q_2)^{-T} Q_2 r_{q1} \end{aligned} \quad (3.23)$$

式 (3.22) 和 (3.23) 代入式 (3.20), 并参考式 (3.16) 和 (3.19), 可得下列凝聚公式

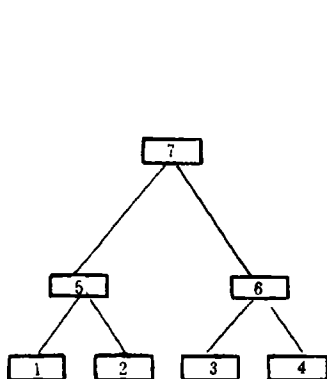
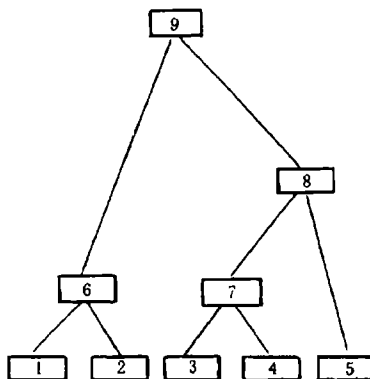
$$\left. \begin{aligned} Q_c &= Q_1 + F_1^T (I + G_1 Q_2)^{-T} Q_2 F_1, \quad G_c = G_2 + F_2 (I + G_1 Q_2)^{-1} G_1 F_2^T \\ F_c &= F_2 (I + G_1 Q_2)^{-1} F_1 \\ r_{qc} &= r_{q2} + F_2 (I + G_1 Q_2)^{-1} (r_{q1} - G_1 r_{p2}) \\ r_{pc} &= r_{p1} + F_1^T (I + G_1 Q_2)^{-T} (Q_2 r_{q1} - r_{p2}) \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

对于有限时间问题, 对自然边界条件 (3.13) 应作相应的处理. 求得时段  $(0, t_f)$  的混合能后, 再凝聚一个虚拟的时段  $(t_f, \infty)$ , 其  $Q_2 = P_{aa}, F_2 = 0, G_2 = 0$ . 这样就等价于边界条件 (3.13) 的作用<sup>[5]</sup>.

有了上述凝聚公式, 为下一步的计算打下了理论基础.

#### 4. 时段凝聚的特点

时段凝聚时  $2^N$  类算法已多次被证明计算效率是很高的<sup>[6]</sup>. 整个凝聚过程是个标准的二叉树结构. 就象结构力学中定义子结构模式一样, 这里可对子时段进行定义. 一个时段的生成, 就是通过调用各种子时段模式来完成的. 例如对于图 1 所示的 4 个时段的情形, 经过  $N = 2$  级消元, 就可得到最高一级时段 (根时段). 对于图 2 出现奇数个时段的情形, 对前面成偶的时段先进行凝聚, 最后一个如图另做处理. 在更高一级的凝聚中再按上述方法进行, 以此类推. 对非线性控制系统的计算, 需要知道每个时段的特征, 就象多重子结构法那样, 最后要求得到每个子结构的位移和内力. 在完成凝聚后得到一个根时段, 对每个子时段进行计算时, 需要周游时段的构成树, 这就要求首先要弄清楚其周游的规则. 由于计算机的运算是顺序的, 而树的构造却不是顺序的, 所以必须给树的周游建立一个顺序的规则. 仿照结构力学中求子结构内力的周游法, 采用前序周游规则是合适的, 即知道了根时段, 按前序周游规则确定其左支树和右支树, 以此类推. 这样不仅需要知道两个时段的凝聚过

图 1  
Fig.1图 2  
Fig.2

程, 即两个子时段如何成为其母时段, 更重要的是知道母时段后如何找到构成它的两个子时段, 并进行计算. 例如图 1, 知道了时段 5 的特性, 如何寻找其子时段 1, 子时段 2, 并按式 (3.22) 和 (3.23) 进行求解. 本文在计算时, 对此进行了有效的处理.

### 5. 例题

给定一控制系统. 已知  $m = 4$ ,  $n = 4$

$$f(x, u, t) = \begin{Bmatrix} f_1(x, u, t) \\ f_2(x, u, t) \\ f_3(x, u, t) \\ f_4(x, u, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + x_2 + u_1 + u_1^2 \\ x_2 + u_1 + u_2 + x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 + x_3 + x_1^2 + u_3^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + u_4 + u_4^2 \end{Bmatrix}$$

$$P(x) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3, \quad X(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad U(u) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

已知初始状态  $x_0 = \begin{Bmatrix} 0.9 \\ 0.9 \\ 0.9 \\ 0.9 \end{Bmatrix}$

由第三节各式可得

$$Q_k = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad R_k = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_k &= \begin{bmatrix} 2u_1 + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2u_4 + 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2x_1 & 2x_2 + 1 & 0 & 0 \\ 2x_1 + 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{G}_k &= \begin{bmatrix} 2u_1^2 + 2u_1 + 0.5 & u_1 + 0.5 & 0 & 0 \\ u_1 + 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2u_4^2 + 2u_4 + 0.5 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{r}_{qk} &= - \begin{bmatrix} 2u_1^2 + u_1 \\ u_1 + u_2 \\ 2u_3^2 \\ 2u_4^2 + u_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{pic} = - \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \\ 2x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_{,a} = \begin{bmatrix} 2u_1 \\ 2u_2 \\ 2u_3 \\ 2u_4 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{P}_{,a} &= \begin{bmatrix} 3x_1^2 \\ 3x_2^2 \\ 3x_3^2 \\ 3x_4^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{,aa} = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6x_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

初始迭代值选为 (上标为迭代步, 下标为时间步)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_0^0 &= \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.9 \\ 0.9 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1^0 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2^0 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \\ 0.7 \\ 0.7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3^0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \\ 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_4^0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{x}_5^0 &= \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_6^0 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_7^0 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_8^0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_9^0 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$u_k^0 = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 9)$$

经过 12 步迭代, 可得最优控制向量及状态向量如下

$$\begin{aligned} u_0^{12} &= \begin{pmatrix} -1.2500 \\ 0.9684 \\ -1.4860 \\ 1.3260 \end{pmatrix}, & u_1^{12} &= \begin{pmatrix} -1.2112 \\ 0.8764 \\ -1.2680 \\ 1.5320 \end{pmatrix}, & u_2^{12} &= \begin{pmatrix} -1.0908 \\ 0.5842 \\ -1.2006 \\ 1.6380 \end{pmatrix}, & u_3^{12} &= \begin{pmatrix} -0.7860 \\ 0.4372 \\ -0.9368 \\ 1.2846 \end{pmatrix} \\ u_4^{12} &= \begin{pmatrix} -0.3842 \\ 0.1624 \\ -0.8640 \\ 0.9816 \end{pmatrix}, & u_5^{12} &= \begin{pmatrix} 0.2516 \\ -0.4321 \\ -0.5432 \\ 0.6742 \end{pmatrix}, & u_6^{12} &= \begin{pmatrix} 0.6218 \\ -0.4010 \\ -0.5008 \\ 0.4120 \end{pmatrix}, & u_7^{12} &= \begin{pmatrix} 0.7612 \\ -0.3812 \\ -0.4996 \\ -0.2120 \end{pmatrix} \\ u_8^{12} &= \begin{pmatrix} 0.7982 \\ -0.3321 \\ -0.3301 \\ -0.3001 \end{pmatrix}, & u_9^{12} &= \begin{pmatrix} 0.8010 \\ -0.3001 \\ -0.2100 \\ -0.3920 \end{pmatrix} \\ x_0^{12} &= \begin{pmatrix} 1.7280 \\ -0.6210 \\ 1.8062 \\ -1.2862 \end{pmatrix}, & x_1^{12} &= \begin{pmatrix} 1.6321 \\ -0.5312 \\ 1.6986 \\ -0.9321 \end{pmatrix}, & x_2^{12} &= \begin{pmatrix} 1.5321 \\ -0.5060 \\ 1.6084 \\ -0.7832 \end{pmatrix}, & x_3^{12} &= \begin{pmatrix} 0.8816 \\ -0.2816 \\ 0.8062 \\ -0.3286 \end{pmatrix} \\ x_4^{12} &= \begin{pmatrix} -0.1216 \\ -0.0801 \\ 0.1260 \\ 0.1210 \end{pmatrix}, & x_5^{12} &= \begin{pmatrix} -0.2846 \\ -0.2801 \\ 0.1090 \\ 0.1230 \end{pmatrix}, & x_6^{12} &= \begin{pmatrix} -0.5321 \\ 1.2180 \\ -0.1842 \\ 0.2101 \end{pmatrix}, & x_7^{12} &= \begin{pmatrix} -0.4321 \\ 1.3210 \\ -0.1640 \\ 0.2009 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$x_8^{12} = \begin{Bmatrix} -0.4008 \\ 1.3001 \\ -0.1600 \\ 0.1809 \end{Bmatrix}, \quad x_9^{12} = \begin{Bmatrix} -0.3908 \\ 1.1002 \\ -0.0909 \\ 0.0901 \end{Bmatrix}$$

## 6. 结束语

本文引用结构力学中的混合能概念, 采用多重子结构法, 有效地解决了非线性控制系统最优解的计算问题, 数值例题说明了本文算法的有效性. 本文工作为非线性控制问题的解决提供了新的途径.

衷心感谢大连理工大学钱令希教授、钟万勰教授的关心和帮助.

## 参 考 文 献

- [1] Zhong Wanxie and Zhong Xiangxiang. Computational Structural Mechanics Optimal Control and Semi-Analytical Method for PDE. *Computers and Structures*, 1990, 37(6):993-1004
- [2] 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 最优控制与计算结构力学的模拟理论. *力学进展*, 1993, 23(1):1-11
- [3] 钟万勰. 一个多用途的结构分析程序 JIGFEX. *大连工学院学报*, 1977, (3,4)
- [4] 高为炳. 非线性控制系统导论. 科学出版社, 1988
- [5] 钟万勰. 计算结构力学与最优控制的模拟论文集. 大连理工大学工程力学研究所, 1990, 7, 编号为 90-3005
- [6] 邓子辰. 计算结构力学与最优控制模拟理论的研究. 大连理工大学博士论文, 1992

## TO THE COMPUTATION OF NONLINEAR CONTROL SYSTEMS APPLICATION OF THE MULTI-LEVEL SUBSTRUCTURAL METHOD

Deng Zichen

(Department of Aircraft Engineering,  
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract** The multi-level substructural method is one of the most extensively used methods in the program system of computational structural mechanics. Based on similarities between computational structure mechanics and optimal control, the problem in nonlinear control system is computed by using the same method, and the corresponding program is given. The work in this paper further shows the close similarity between computational structure mechanics and optimal control.

**Key words** multi-level substructural method, nonlinear, time-interval, condensation