

复合结构剪切板的屈曲与后屈曲研究

张建武

(上海交通大学机械工程系, 上海 200030)

提要 基于 Reissner 剪切板理论, 本文将现有理论模型推进了一步, 导出了控制复合材料和构造矩形板平衡的广义 Karman 大挠度方程. 此外, 运用摄动技术, 构造了一个单向压缩简支剪切矩形板的后屈曲渐近解, 适用于面板和夹心材料都具正交各向异性的夹层板以及计及横向剪切变形对称铺设的层合板. 文中给出了典型算例, 并将当前结果与其它理论或数值解作了比较, 显示出相当好的一致性.

关键词 复合结构, 剪切板理论, 后屈曲, 摄动技术

一、引言

随着航空、汽车和机械工业的发展, 愈来愈多地采用新型复合材料和构造制成轻捷的工程薄壁结构. 其中, 应用最广泛的仍是各种板结构. 由于本构关系的复杂化, 板的屈曲与后屈曲相应地变得敏感, 材料某方向特性的微小变化可能导致临界力与屈曲波形的大变化, 极大地影响后屈曲性态.

在过去的三十多年间, 研究注意力大多集中在采用各种高阶剪切板理论求出精确的屈曲荷载^[2,3,7,8], 但对复合结构板后屈曲非线性问题, 一般多用数值方法如有限元法^[6]进行分析计算. 综观现状, 对计及横向剪切变形复合材料和构造矩形板大挠度弯曲和后屈曲等问题, 文献中还无详尽的研究以资参考. 尤其是缺乏显式表达、反映客观要求的剪切板后屈曲平衡路径理论公式, 以便就横向剪切效应对上述矩形板的屈曲与后屈曲性态的影响, 进行定性定量分析.

本文简单扼要地给出了基于 Reissner 模型的广义 Karman 大挠度方程组, 并用来研究复合结构剪切矩形板的屈曲与后屈曲性态. 为求解这组含有多种偶合效应的非线性偏微分方程, 采用了文献 [10—12] 中发展的摄动方法, 构造出一个单向压缩简支复合结构剪切矩形板的后屈曲渐近级数解. 所获摄动解具有分析性、精度要求可控、以及信息包容量大等优点.

二、广义 Karman 大挠度方程

推导中采用经典 Reissner 模型的一些基本假定. 总体归纳为两种复合结构:

1. 对计及横向剪切复合材料对称铺设层合板

- 1) 横向剪切应力近似处理为线性分布;
- 2) 大挠度 Karman 应变 - 位移公式仍有效;

本文于 1992 年 11 月 17 日收到第一稿, 1993 年 3 月 28 日收到修改稿.

3) 沿厚度方向弹性法向变形忽略不计.

2. 对面板和夹心均为正交各向异性夹层板

1) 面板很薄, 不计局部弯曲, 主要承受面力;

2) 间隔面板的夹心仅承受和传递横向剪力;

3) 面板局部无皱曲, 忽略夹心与面板间弹性相互作用.

对称层合板和夹层板弹性常数总体表现具有共性, 但其复合结构物理特性的不同, 在于薄膜和弯曲刚度系数的计算公式有所区别. 由以上任一组假定出发, 都可导出适用于这两类剪切板的 Karman 大挠度方程.

按 Reissner 模型给出的基本平衡、几何和协调公式^[4,5], 并采用 Libove 和 Batdorf 的线代方法^[9]解耦板的横向挠度 W 和两个剪切力分量 Q_x 和 Q_y , 可获得控制复合结构剪切板平衡的广义 Karman 大挠度方程

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{D_{xy}}{S_y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{D_{xy}}{S_x} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left[D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^2} 2(2D_{xy} + \nu_x D_y) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right] \\ & - D_p^2 \left(\frac{1}{S_y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{S_x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} \\ = & \left\{ 1 - \left(\frac{D_x}{S_x} + \frac{D_{xy}}{S_y} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{D_y}{S_y} + \frac{D_{xy}}{S_x} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{D_p^2}{S_x S_y} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \\ & \left. + \frac{D_{xy}}{S_x S_y} \left[D_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(2D_{xy} + \nu_x D_y) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] \right\} \\ & \left(q + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

式中 D 和 ν 分别为板弯曲刚度和泊桑比, ϕ 为 Airy 应力函数. 由于考虑了复合结构板面内、弯曲和横向剪切的各向异性及其相互偶合作用, 方程 (1) 在形式上变得复杂许多. 其中主要特点之一是面内材料特性 ($E_x \neq E_y$) 可不必强行简化成各向同性, 使板的非线性弯曲和稳定性研究更加精确. 按照 Karman 应变-位移几何关系, 可推导出大挠度变形协调方程, 这是一个为求解方程 (1) 而必须建立的辅助方程

$$\frac{1}{A_x} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \left(\frac{1}{2A_{xy}} - \frac{\nu_x}{A_x} \right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{A_y} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

式中 A 为面内拉伸刚度. 方程 (1) 和 (2) 联立构成一组广义 Karman 大挠度方程. 显然, 面内和横向材料特性的综合影响, 在复合结构剪切板的屈曲与后屈曲中产生重要作用.

在应用广义 Karman 大挠度方程解决实际问题时, 组成板的材料和构造是给定的. 如果板厚与其它尺寸相比很小, 可略去横向剪切变形, 令 $S_x \rightarrow \infty$ 和 $S_y \rightarrow \infty$, 由 (1) 和 (2) 退化得正交异性薄板经典 Karman 方程^[13]. 对各向同性中厚板, 弹性常数分别取 $E_x = E_y = E$, $E_{xy} = G = E/2(1+\nu)$, $D_x = D_y = D$, $D_{xy} = (1-\nu)D/2$, $D_p \equiv 0$, 以及 $S_x = S_y = G$. 注意到弯剪各向异性偶合效应自然消失, 联立方程 (1) 和 (2) 直接退化为 Karman-Reissner 方程^[4]. 由两面板各向同性夹心正交异性材料构造而成夹层板, 面板弹性模量 $E_x = E_y = E$, $E_{xy} = E/2(1+\nu)$, 弯曲刚度 $D_x = D_y = D$, $D_{xy} = (1-\nu)D/2$,

故 $D_\rho \equiv 0$. 经简化方程 (1) 和 (2) 成为 Karman-Alwan 方程^[1]. 方程 (1) 中出现高阶导数交叉项, 这是由于复合结构板面内正交各向异性引起对横向剪切的耦合效应, 代表了一类更一般的情况.

三、边值问题与无因次化

考虑一四边简支复合结构容许横向剪切变形矩形板, 长为 a , 宽为 b , 承受面内均匀单向压缩. 控制该板非线性弯曲的广义 Karman 大挠度方程由 (1) 和 (2) 表出. 为便于摄动分析, 须对这组方程以及相应边界条件无因次化. 引入并定义如下参数变换关系

$$\begin{aligned} x &= \pi x/a, \quad y = \pi y/b, \quad \beta = a/b, \quad \varphi = \phi/\sqrt{D_x D_y}, \quad D_\rho^2 = D_x D_y - (D_{xy} + \nu_x D_y)^2, \\ \gamma_1^2 &= \nu_y + 2(1 - \nu_x \nu_y) \frac{G}{E_x}, \quad \gamma_2^2 = \sqrt{\frac{E_y}{E_x}}, \quad \gamma_3^2 = \frac{E_y}{2G} - \nu_y, \quad \rho = \frac{D_\rho^2}{D_x D_y}, \\ \eta_1 &= \frac{\pi^2 D_{xy}}{2G_{yz} h a^2}, \quad \eta_2 = \frac{\pi^2 D_{xy}}{2G_{zx} h a^2}, \quad \eta_3 = \frac{\pi^2 D_\rho^2}{D_x G_{yz} h a^2}, \quad \eta_4 = \frac{\pi^2 D_\rho^2}{D_x G_{zx} h a^2}, \\ \eta_5 &= \frac{\pi^2 D_x}{G_{zx} h a^2}, \quad \eta_6 = \frac{\pi^2 D_y}{G_{yz} h a^2}, \quad \eta_{15} = \eta_1 + \eta_5, \quad \eta_{26} = \eta_2 + \eta_6 \end{aligned}$$

利用各关系式, 并引入初始几何缺陷, 无因次化后方程 (1) 和 (2) 表出如下

$$G_1 L_1(w) - \beta^2 G_2 w_{,xxyy} = \gamma_2^2 \beta^2 G_3 [L_3(\varphi, w) + L_3(\varphi, w^*)] \quad (3)$$

$$L_2(\varphi) = \gamma_2^2 \beta^2 \left[-\frac{1}{2} L_3(w, w) - L_3(w, w^*) \right] \quad (4)$$

式中 w 为附加挠度、 w^* 为非理想情况造成的初始挠度、 φ 为熟知的应力函数; 各线性和非线性微分算子分别定义为

$$\begin{aligned} L_1(\cdot) &= (\cdot)_{,xxxx} + 2\gamma_1^2 \beta^2 (\cdot)_{,xxyy} + \gamma_2^4 \beta^4 (\cdot)_{,yyyy} \\ L_2(\cdot) &= (\cdot)_{,xxxx} + 2\gamma_3^2 \beta^2 (\cdot)_{,xxyy} + \gamma_2^4 \beta^4 (\cdot)_{,yyyy} \\ L_3(\cdot) &= (\cdot)_{,xx} (\cdot)_{,yy} - 2(\cdot)_{,xy} (\cdot)_{,xy} + (\cdot)_{,yy} (\cdot)_{,xx} \\ G_1(\cdot) &= 1 - \eta_1 (\cdot)_{,xx} - \eta_2 \beta^2 (\cdot)_{,yy} \\ G_2(\cdot) &= \eta_3 (\cdot)_{,xx} + \eta_4 \beta^2 (\cdot)_{,yy} \\ G_3(\cdot) &= 1 - \eta_{15} (\cdot)_{,xx} - \eta_{26} \beta^2 (\cdot)_{,yy} + \eta_1 \eta_2 L_1(\cdot) + \rho \eta_5 \eta_6 \beta^2 (\cdot)_{,xxyy} \end{aligned}$$

沿板 x 和 y 方向的端部轴向缩短公式亦可用无因次形式表出如下

$$\delta_x = \frac{1}{4\pi^2 \gamma_2^2 \beta^2} \int_0^\pi \int_0^\pi [(\gamma_2^4 \beta^2 \varphi_{,yy} - \nu_y \varphi_{,xx}) - \frac{1}{2} \gamma_2^2 w_{,x}^2 - \gamma_2^2 w_{,x} w_{,x}^*] dx dy \quad (5)$$

$$\delta_y = \frac{1}{4\pi^2 \gamma_2^2 \beta^2} \int_0^\pi \int_0^\pi [(\varphi_{,xx} - \nu_y \beta^2 \varphi_{,yy}) - \frac{1}{2} \gamma_2^2 \beta^2 w_{,y}^2 - \gamma_2^2 \beta^2 w_{,y} w_{,y}^*] dx dy \quad (6)$$

沿 $x=0$ 和 $x=\pi$ 边界

$$w = w_{,xx} = 0, \quad \varphi_{xy} = 0, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_{,yy} dy + 4\lambda_x = 0, \quad Q_x = 0 \quad (7)$$

沿 $y = 0$ 和 $y = \pi$ 边界

$$w = w_{,yy} = 0, \varphi_{,xy} = 0, \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_{,xx} dx = 0 (\text{中面无约束}), Q_y = 0 \quad (8a)$$

$$\text{或 } \varphi_{,xy} = 0, \delta_y = 0 (\text{中面有约束}), Q_y = 0 \quad (8b)$$

在无因次化过程中, 板的挠度 w 、轴向缩短 δ 、临界力 λ 和弯曲刚度系数 D 仅作为一般情况来处理, 但对具体的层合板或夹层板, 实际物理量将是不同的. 对板总厚度为 h 的对称铺设层合板, 因无拉弯耦合, 其叠层后材料特性一般视作正交各向异性, 这些物理量的变换关系定义为

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{12(1-\nu_x\nu_y)} \frac{W}{h}, & w^* &= \sqrt{12(1-\nu_x\nu_y)} \frac{W^*}{h}, & \delta_x &= \frac{\Delta_x}{h\delta_{xc}}, & \delta_y &= \frac{\Delta_y}{h\delta_{yc}}, \\ \delta_{xc} &= \frac{ah\pi^2}{3(1-\nu_x\nu_y)b^2}, & \delta_{yc} &= \frac{bh\pi^2}{3(1-\nu_x\nu_y)b^2}, & \lambda_x &= \frac{N_x}{h\sigma_{xc}}, & \sigma_{xc} &= \frac{4\pi^2\sqrt{D_xD_y}}{b^2h}, \\ D_x &= \frac{E_xh^3}{12(1-\nu_x\nu_y)}, & D_y &= \frac{E_yh^3}{12(1-\nu_x\nu_y)}, & D_{xy} &= \frac{1}{6}Gh^3 \end{aligned}$$

对两面板厚度分别为 t 夹心厚度为 h 的夹层板, 这些物理量的变换关系则定义为

$$\begin{aligned} w &= 2\sqrt{(1-\nu_x\nu_y)} \frac{W}{h+t}, & w^* &= 2\sqrt{(1-\nu_x\nu_y)} \frac{W^*}{h+t}, & \delta_x &= \frac{\Delta_x}{(h+t)\delta_{xc}}, \\ \delta_y &= \frac{\Delta_y}{(h+t)\delta_{yc}}, & \delta_{xc} &= \frac{a(h+t)\pi^2}{(1-\nu_x\nu_y)b^2}, & \delta_{yc} &= \frac{b(h+t)\pi^2}{(1-\nu_x\nu_y)b^2}, & \lambda_x &= \frac{N_x}{2t\delta_{xc}}, \\ \sigma_{xc} &= \frac{4\pi^2\sqrt{D_xD_y}}{2tb^2}, & D_x &= \frac{E_xt(h+t)^2}{2(1-\nu_x\nu_y)}, & D_y &= \frac{E_yt(h+t)^2}{2(1-\nu_x\nu_y)}, & D_{xy} &= Gt(h+t)^2 \end{aligned}$$

对其它类型复合结构板, 如密加筋板等, 物理量的变换关系可类似定义.

四、后屈曲平衡路径摄动渐近解

联合边界条件 (7) 和 (8), 运用摄动技术可以构造非线性方程 (3) 和 (4) 的渐近级数解. 先将板的附加挠度和应力函数展成摄动幂级数

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n w_n(x, y), \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (9a)$$

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_n(x, y), \quad n = 0, 2, 4, \dots \quad (10a)$$

式中摄动参数 ε 与挠度具有相同的物理和几何意义. 不失一般性, 假定几何缺陷与板的初始屈曲模式一致. 因缺陷是微小的, 故有

$$w^* = \varepsilon \mu w_1, \quad \mu = A_{11}^*/A_{11}^{(1)} \quad (11)$$

式中 A_{11}^* 和 $A_{11}^{(1)}$ 代表缺陷和初始屈曲模式的幅度. 将展开式 (9a) 和 (10a) 代入方程 (3) 和 (4), 按摄动递增阶次, 导出各阶摄动方程如下

$$(\varepsilon^0): L_2(\varphi_0) = 0 \quad (12)$$

$$(\varepsilon^1): G_1 L_1(w_1) - G_2 \beta^2 w_{1,xyyy} - \gamma_2^2 \beta^2 (1 + \mu) G_3 L_3(\varphi_0, w_1) = 0 \quad (13)$$

$$(\varepsilon^2): L_2(\varphi_2) = -\frac{1}{2}(1 + 2\mu)\gamma_2^2 \beta^2 L_3(w_1, w_1) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon^3): G_1 L_1(w_3) - G_2 \beta^2 w_{3,xyyy} - \gamma_2^2 \beta^2 G_3 L_3(\varphi_0, w_3) \\ = \gamma_2^2 \beta^2 (1 + \mu) G_3 L_3(\varphi_2, w_1) \end{aligned} \quad (15)$$

$$(\varepsilon^4): L_2(\varphi_4) = -\gamma_2^2 \beta^2 L_3(w_3, w_1) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon^5): G_1 L_1(w_5) - G_2 \beta^2 w_{5,xyyy} - \gamma_2^2 \beta^2 G_3 L_3(\varphi_0, w_5) \\ = \gamma_2^2 \beta^2 G_3 [L_3(\varphi_2, w_3) + (1 + \mu)L_3(\varphi_4, w_1)] \end{aligned} \quad (17)$$

$$(\varepsilon^6): L_2(\varphi_6) = -\gamma_2^2 \beta^2 \left[\frac{1}{2} L_3(w_1, w_3) + (1 + \mu)L_3(w_1, w_5) \right] \quad (18)$$

.....

首先选取自动满足横向刚性边界条件的三角函数作为各阶摄动方程的通解. 根据摄动方程阶次相互交错的特点, 利用积化和差三角公式和长期项相容条件, 逐次对比求解, 最后获得大挠度渐近解的一般表达式

$$\begin{aligned} w &= \varepsilon w_1 + \varepsilon^3 w_3 + O(\varepsilon^5) \\ &= \varepsilon A_{11}^{(1)} \sin mx \sin ny + \varepsilon^3 (A_{13}^{(3)} \sin mx \sin 3ny + A_{31}^{(3)} \sin 3mx \sin ny) + O(\varepsilon^5) \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \varepsilon^4 \varphi_4 + O(\varepsilon^6) \\ &= \left(-B_{00}^{(0)} \frac{y^2}{2} - b_{00}^{(0)} \frac{x^2}{2} \right) + \varepsilon^2 \left(-B_{00}^{(2)} \frac{y^2}{2} - b_{00}^{(2)} \frac{x^2}{2} + B_{20}^{(2)} \cos 2mx + B_{02}^{(2)} \cos 2ny \right) \\ &\quad + \varepsilon^4 \left(-B_{00}^{(4)} \frac{y^2}{2} - b_{00}^{(4)} \frac{x^2}{2} + B_{20}^{(4)} \cos 2mx + B_{02}^{(4)} \cos 2ny + B_{40}^{(4)} \cos 4mx \right. \\ &\quad \left. + B_{04}^{(4)} \cos 4ny + B_{22}^{(4)} \cos 2mx \cos 2ny + B_{24}^{(4)} \cos 2mx \cos 4ny \right. \\ &\quad \left. + B_{42}^{(4)} \cos 4mx \cos 2ny \right) + O(\varepsilon^6) \end{aligned} \quad (10b)$$

式中各项系数相互间都有联系, 同时都包含横向剪切变形的影响, 表达式见附录.

将式 (9b) 和 (10b) 代入式 (7) 和 (8a) 中的面内边界条件, 导出非加载边中面无约束情况下的后屈曲平衡路径式

$$4\lambda_x = B_{00}^{(0)} + \varepsilon^2 B_{00}^{(2)} + \varepsilon^4 B_{00}^{(4)} + O(\varepsilon^6) \quad (19)$$

$$4\lambda_y = 0, \quad b_{00}^{(k)} = 0, \quad k = 0, 2, 4, \dots \quad (20)$$

类似地, 将 (9b) 和 (10b) 代入式 (7) 和 (8b) 中的面内边界条件, 则导出非加载边中面约束情况下的后屈曲平衡路径式

$$4\lambda_x = B_{00}^{(0)} + \varepsilon^2 B_{00}^{(2)} + \varepsilon^4 B_{00}^{(4)} + O(\varepsilon^6) \quad (21)$$

$$\delta_y = 0, \quad b_{00}^{(k)} = \nu_y \beta^2 B_{00}^{(k)}, \quad k = 0, 2, 4, \dots \quad (22)$$

为统一起见, 引入以下关系式

$$b_{00}^{(k)} = \alpha\beta^2 B_{00}^{(k)}, \quad k = 0, 2, 4, \dots \quad (23)$$

于是利用式 (7) 和 (8) 作线性组合并利用附录中的相应系数关系式, 以无因次最大挠度表出的后屈曲平衡路径如下

$$\begin{aligned} 4\lambda_x(m^2 + \alpha\beta^2 n^2) &= (B_{00}^{(0)} m^2 + b_{00}^{(0)} n^2) + \varepsilon^2 (B_{00}^{(2)} m^2 + b_{00}^{(2)} n^2) \\ &\quad + \varepsilon^4 (B_{00}^{(4)} m^2 + b_{00}^{(4)} n^2) + O(\varepsilon^6) \\ &= \frac{1}{(1+\mu)\gamma_2^2\beta^2} \left(\frac{f_{11}}{g_{11}} \right) + \frac{1+2\mu}{16\gamma_2^2\beta^2} (m^4 + \gamma_2^4\beta^4 n^4) w_m^2 \\ &\quad + \frac{3(1+2\mu)}{256\gamma_2^2\beta^2} \left[(2+6\mu+4\mu^2)(m^4 + \gamma_2^4\beta^4 n^4) \left(\frac{m^4 g_{13}}{h_{13}} + \frac{\gamma_2^4\beta^4 n^4 g_{31}}{h_{31}} \right) \right. \\ &\quad \left. - (3+6\mu+2\mu^2) \left(\frac{m^8 g_{13}}{h_{13}} + \frac{\gamma_2^8\beta^8 n^8 g_{31}}{h_{31}} \right) \right] w_m^4 + O(w_m^6) \end{aligned} \quad (24)$$

经整理, 式 (24) 可表成载荷 - 挠度关系的渐近展开式

$$\lambda_x = \lambda_x^c + \frac{1}{2} \lambda_x^{(2)c} w_m^2 + \frac{1}{24} \lambda_x^{(4)c} w_m^4 + \dots \quad (25)$$

式中各后屈曲系数详见附录. 相似地, 将 (9b) 和 (10b) 代入式 (5), 经整理得轴向载荷 - 端部缩短关系的渐近展开式

$$\delta_x = \delta_x^c + \frac{1}{2} \delta_x^{(2)c} w_m^2 + \frac{1}{24} \delta_x^{(4)c} w_m^4 + \dots \quad (26)$$

式中各后屈曲系数见附录. 式 (25) 和 (26) 分别适用于两种面内约束情况的四边简支复合结构剪切矩形板, 可以定性定量研究横向剪切效应对板屈曲与后屈曲的影响.

五、计算举例与比较

现举几个计算实例, 分别讨论临界屈曲应力、载荷 - 挠度以及载荷 - 端部缩短关系曲线, 并同其它结果作比较.

考虑面板和夹心均为正交各向异性的夹层板, 其屈曲应力 ($w_m = 0$) 随弯剪刚度比而变化, 计算结果见图 1. 同时表出的还有分别根据 Reissner 理论和 Mindlin 理论得到的结果. 比较显示, 当前理论所得结果与 Reissner 理论预测值很接近. 在板长宽比比较大时, Bert 和 Chang^[2] 所得临界应力非常靠近当前计算值; 但在长宽比小于 1 时, 按不同理论所得结果差别是明显的. 用当前模型预测屈曲应力偏于安全.

图 2 给出了计及横向剪切复合材料方板屈曲应力与厚宽比的关系曲线. 便于比较, 方板的材料特性与文献 [8] 中的一致. 图中看到, 当前理论值与其他相应结果吻合得很好; 同时亦观察到当厚宽比增加时, 薄板理论由于不能反映横向剪切效应的影响, 屈曲应力居高不下, 误差增大.

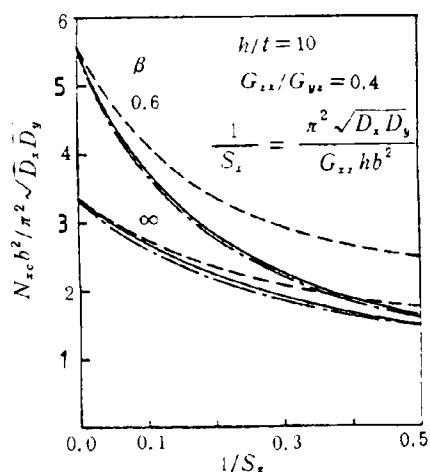


图 1
Fig.1

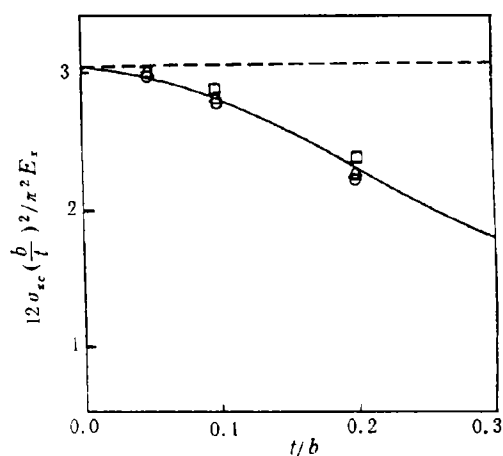


图 2
Fig.2

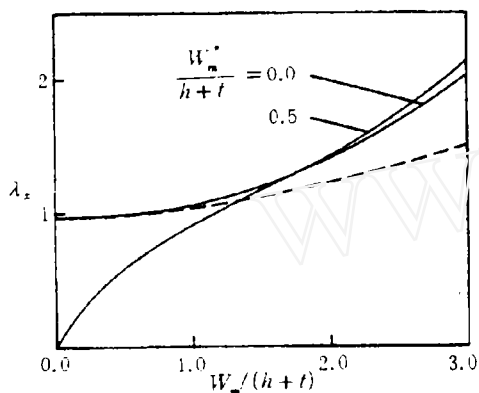


图 3(a)
Fig.3(a)

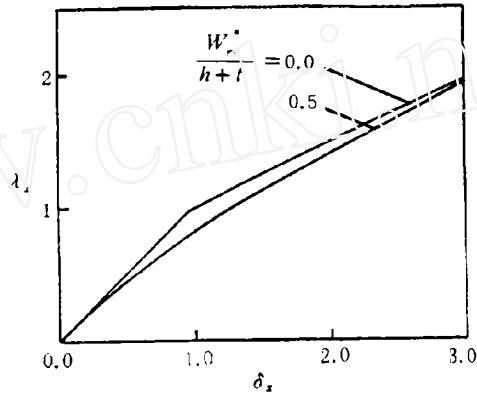


图 3(b)
Fig.3(b)

一夹层方板, 两面板厚度相同且各向同性, 夹心层为正交异性. 该板的载荷 - 挠度和载荷 - 端部缩短关系一组计算结果在图 3 中表出; 同时几何缺陷对后屈曲平衡路径的影响也在图中给出了具体数值. 从当前理论与有限元数值分析结果^[6]比较中注意到, 当屈曲挠度增大超过板厚, 理论值与有限元数值之间开始出现分离. 有限元数值偏低的主要原因有二. 其一, 前屈曲状态给定边界节点力或给定边界节点位移加载所得结果是一致的, 但后屈曲状态两者对应的平衡路径并不相同, 该文按给定位移沿边界加载, 实际边界节点力分布是非均匀的, 与平均加载之间产生一定误差. 其二, 该文采用位移型单元分析内力, 求导计算伴随连续性损失, 使非线性内力计算产生一定误差. 加密网格划分, 可减少后者误差, 但同时使计算成本大大提高. 这两种误差, 随挠度的增加而扩大. 一般位移型有限元数值解低于理论结果, 偏于保守, 这同数值分析经验相符.

图 4 给出了两组对称铺设层合方板的载荷 - 挠度曲线, 以便进一步了解横向剪切对复合材料板屈曲与后屈曲性态的影响. 板材特性取自文献 [8]. 这两组曲线分别

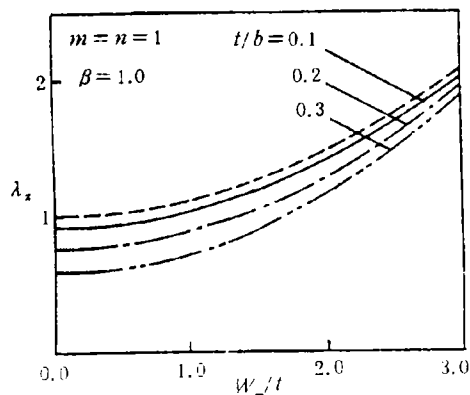


图 4(a) 非加载边可移动
Fig.4(a) movable side with no load

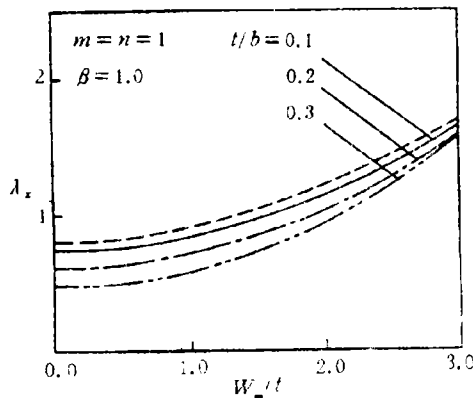


图 4(b) 非加载边不可移动
Fig.4(b) unmovable side with no load

由两种不同的面内边界条件计算而得, 即非加载边面内可移动或面内不可动。从图 4(a) 和 4(b) 观察到, 考虑横向剪切变形使板的屈曲载荷下降, 但后屈曲基本性态不变, 仍与薄板的情况类似。复合材料弹性模量沿纤维方向一般很大, 而垂直于纤维方向的则与剪切模量同是一个量级, 因此多数情况下横向剪切变形不能忽略。图中可以看到, 剪切效应对复合材料板的屈曲与后屈曲强度影响明显。

六、结 束 语

本文的目的在于给出复合结构剪切板的广义 Karman 大挠度方程; 并发展了一种位移类型摄动方法, 构造出单向压缩简支剪切矩形板屈曲与后屈曲的渐近展开式。主要特点归纳如下:

(1) 当前模型和摄动技术在精确预估复合结构剪切板的屈曲与后屈曲强度具有简洁易用等优点。

(2) 当前模型在应用中, 虽然讨论的实例里板截面几何尺寸为常数, 但可推广应用于变厚度的剪切板。方程无因次化同前类似, 所要注意的是其成为变系数方程。

(3) 讨论范围虽限于弹性, 但可扩展至板的屈曲与后屈曲非弹性分析。弹塑性研究中一般将单向受压板处理为一正交各向异性板^[14]。现有塑性流动、形变和滑移场理论, 因存片面性, 计算结果误差较大。采用本文摄动技术, 可区分弹塑性加载和卸载不同阶段, 分别构造渐近展开式, 十分灵活。

(4) 广义 Karman 大挠度方程中引入惯性力项, 可进而研究有薄膜压力作用的薄板或中厚板的非线性动态特性。

参 考 文 献

- [1] Alwan AM. Large deflection of sandwich plates with orthotropic cores. *AIAA J.*, 1964, 2(2):1820-1832
- [2] Bert CW and Chang S. Shear-flexible orthotropic plates loaded in plane. *ASCE J. Engrg. Mech.*, 1972, 98 EM6:1499-1509
- [3] Reddy JN and Phan ND. Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory. *J. Sound Vibr.*, 1985, 98(2):157-170
- [4] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *ASCE J. Appl. Mech.*, 1945, June, 12:A68-79

- [5] Reissner E. Finite deflection of sandwich plates. *J. of Aeron. Sci.*, 1948, July, 15:435-440
- [6] Schmit Jr LA and Monforton GR. Finite deflection discrete element analysis of sandwich plates and cylindrical shells with laminated faces. *AIAA J.*, 1970, 8(8):1454-1461
- [7] Senthilnathan NR, et al. Buckling of shear-deformable plates, *AIAA J.*, 1987, 25(9):1268-1271
- [8] Srinivas S and Rao AK. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates, *Int. J. Solid Struct.*, 1970, 6:1463-1481
- [9] Libove C and Batdorf S. A general small-deflection theory for flat sandwich plates. *NACA TN 1526*, 1948
- [10] Shen HS and Zhang JW. Perturbation analyses for the postbuckling of simply supported rectangular plates under uniaxial compression. *Appl. Math. & Mech.*, English ed., 1988, 9(8):793-804
- [11] Zhang JW. A simplified perturbation solution to the large deflection Karman equations of orthotropic composite plates in axial compression and lateral pressure. *Arch. of Appl. Mech.*, 1991, 61:174-182
- [12] Zhang JW and Shen HS. Postbuckling of orthotropic rectangular plates in biaxial compression. *ASCE J. Engng. Mech.*, 1991, 117 EM5:1158-1170
- [13] Timoshenko S and Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. 2nd ed., McGraw-Hill, 1959
- [14] Dawe JL and Grondin GY. Inelastic buckling of steel plates. *ASCE J. Struct. Engng.*, 1985, 111:95-107

附录

$$\begin{aligned}
 (1+\mu)\gamma_2^2\beta^2\left(B_{00}^{(0)}m^2+b_{00}^{(0)}n^2\right) &= \frac{f_{11}}{g_{11}} \\
 16\gamma_2^2\beta^2\left(B_{00}^{(2)}m^2+b_{00}^{(2)}n^2\right) &= (1+2\mu)(m^4+\gamma_2^4\beta^4n^4)A_{11}^{(1)2} \\
 256\gamma_2^2\beta^2\left(B_{00}^{(4)}m^2+b_{00}^{(4)}n^2\right) &= (1+2\mu)(3+6\mu+2\mu^2)\left(\frac{m^8g_{13}}{h_{13}}+\frac{\gamma_2^8\beta^8n^8g_{31}}{h_{31}}\right)A_{11}^{(1)4} \\
 A_{13}^{(3)} &= \frac{(1+\mu)(1+2\mu)}{16h_{13}}m^4g_{13}A_{11}^{(1)3}, \quad A_{31}^{(3)} = \frac{(1+\mu)(1+2\mu)}{16h_{31}}\gamma_2^4\beta^4n^4g_{31}A_{11}^{(1)3} \\
 B_{20}^{(2)} &= \frac{1+2\mu}{32m^2}\gamma_2^2\beta^2n^2A_{11}^{(1)2}, \quad B_{02}^{(2)} = \frac{1+2\mu}{32\gamma_2^2\beta^2n^2}m^2A_{11}^{(1)2} \\
 B_{20}^{(4)} &= \frac{1+\mu}{16m^4}\gamma_2^2\beta^2m^2n^2A_{31}^{(3)}A_{11}^{(1)}, \quad B_{02}^{(4)} = -\frac{1+\mu}{16n^4}\gamma_2^2\beta^2m^2n^2A_{13}^{(3)}A_{11}^{(1)} \\
 B_{40}^{(4)} &= \frac{1+\mu}{64m^4}\gamma_2^2\beta^2m^2n^2A_{31}^{(3)}A_{11}^{(1)}, \quad B_{04}^{(4)} = \frac{1+\mu}{64n^4}\gamma_2^2\beta^2m^2n^2A_{13}^{(3)}A_{11}^{(1)} \\
 B_{22}^{(4)} &= \frac{(1+\mu)\gamma_2^2\beta^2m^2n^2}{4(m^4+2\gamma_2^2\beta^2m^2n^2+\gamma_2^4\beta^4n^4)}(A_{13}^{(3)}+A_{31}^{(3)})A_{11}^{(1)} \\
 B_{24}^{(4)} &= -\frac{(1+\mu)\gamma_2^2\beta^2m^2n^2}{16(m^4+32\gamma_2^2\beta^2m^2n^2+16\gamma_2^4\beta^4n^4)}A_{13}^{(3)}A_{11}^{(1)} \\
 B_{42}^{(4)} &= -\frac{(1+\mu)\gamma_2^2\beta^2m^2n^2}{16(16m^4+32\gamma_2^2\beta^2m^2n^2+\gamma_2^4\beta^4n^4)}A_{31}^{(3)}A_{11}^{(1)} \\
 h_{13} &= f_{13}-\gamma_2^2\beta^2g_{13}\left(B_{00}^{(0)}m^2+b_{00}^{(0)}n^2\right), \quad h_{31} = f_{31}-\gamma_2^2\beta^2g_{31}(B_{00}^{(0)}m^2+b_{00}^{(0)}n^2) \\
 f_{ij} &= (1+\eta_1i^2m^2+\eta_2\beta^2j^2n^2)(i^4m^4+2\gamma_1^2\beta^2i^2m^2j^2n^2+\gamma_2^4\beta^4j^4n^4) \\
 &\quad +(\eta_3i^2m^2+\eta_4\beta^2j^2n^2)\beta^2i^2m^2j^2n^2, \quad i, j = 1, 3, 5, \dots \\
 g_{ij} &= 1+\eta_{15}i^2m^2+\eta_{26}\beta^2j^2n^2+\eta_{11}\eta_5(i^4m^4+2\gamma_1^2\beta^2i^2m^2j^2n^2+\gamma_2^4\beta^4j^4n^4) \\
 &\quad +\rho\eta_5\eta_6\beta^2i^2m^2j^2n^2, \quad i, j = 1, 3, 5, \dots
 \end{aligned}$$

根据式 (23), 进一步地

$$h_{13} = \frac{1}{(1+\mu)(m^2+\alpha\beta^2n^2)g_{11}}[(1+\mu)(m^2+\alpha\beta^2n^2)f_{13}g_{11}-(m^2+9\alpha\beta^2n^2)f_{11}g_{13}]$$

$$h_{31} = \frac{1}{(1+\mu)(m^2 + \alpha\beta^2 n^2)g_{11}} [(1+\mu)(m^2 + \alpha\beta^2 n^2)f_{31}g_{11} - (9m^2 + \alpha\beta^2 n^2)f_{11}g_{31}]$$

平衡路径 (25) 和 (26) 中后屈曲系数分别为

$$\lambda_x^c = \frac{f_{11}}{4(1+\mu)\gamma_2^2\beta^2(m^2 + \alpha\beta^2 n^2)g_{11}}$$

$$\lambda_x^{(2)c} = \frac{m^4 + \gamma_2^4\beta^4 n^4}{32\gamma_2^2\beta^2(m^2 + \alpha\beta^2 n^2)}$$

$$\lambda_x^{(4)c} = \frac{3(1+2\mu)}{128\gamma_2^2\beta^2(m^2 + \alpha\beta^2 n^2)} \left[(2+6\mu+4\mu^2)(m^4 + \gamma_2^4\beta^4 n^4) \left(\frac{m^4 g_{13}}{h_{13}} + \frac{\gamma_2^4\beta^4 n^4 g_{31}}{h_{31}} \right) - (3+6\mu+2\mu^2) \left(\frac{m^8 g_{13}}{h_{13}} + \frac{\gamma_2^8\beta^8 n^8 g_{31}}{h_{31}} \right) \right]$$

.....

$$\delta_x^\lambda = \frac{1}{\gamma_2^2}(\gamma_2^4 - \alpha\nu_y)\lambda_x, \quad \delta_x^{(2)c} = \frac{1+2\mu}{16\beta^2} m^2$$

$$\delta_x^{(4)c} = \frac{3(1+\mu)(1+2\mu)^2 m^2}{32\beta^2} \left(\frac{m^4 g_{13}}{h_{13}} + \frac{\gamma_2^4\beta^4 n^4 g_{31}}{h_{31}} \right)$$

.....

INVESTIGATION TO THE BUCKLING AND POSTBUCKLING BEHAVIOUR OF SHEAR-FLEXIBLE PLATES OF COMPOSITE CONSTRUCTION

Zhang Jianwu

(Dept. of Mech. Engng., Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

Abstract The generalized Karman equations governing large deflection of shear-flexible plates of composite construction are developed and discussed. Progress has thus been made in extension of some theoretical modelings to include more complicated material properties based upon the shear deformable plate theory of Reissner type. An asymptotic expansion is constructed by the perturbation technique proposed for the postbuckling behaviour of simply supported rectangular plates of composite construction. This approximation may apply in a variety of sandwiches with both orthotropic facings and cores as well as symmetrically laid laminates taking account of transverse shear deformation. Typical numerical examples are presented for the purpose of comparison of the present results with other analytical and computational predictions. It has been demonstrated from observation that a fairly good agreement is achieved.

Key words composite construction, shear-deformable plate theory, buckling, post-buckling, perturbation technique