

扩展裂纹尖端弹塑性场¹⁾

魏悦广 王自强

(LNM, 中国科学院力学研究所, 北京 100080)

提要 本文通过对幂硬化材料中平面应变 I 型裂纹的扩展过程进行精细的弹塑性有限元计算, 给出扩展裂纹尖端附近环形区域内弹塑性场的分布. 首次提出适用于扩展裂纹尖端环形区域的三项解. 其中首项为 HRR 奇异解; 第二项反映三轴应力的强弱; 第三项与 HRR 奇异性项相比还含有线性项. 并指出: 扩展裂纹尖端环形区域弹塑性应力应变场的分布和强弱可由 J - Q - k_2 三参量刻画. 此结论适用于不同试样几何, 不同材料硬化指数以及由小范围屈服至全面屈服的不同屈服程度.

关键词 扩展裂纹, 弹塑性场, 三参量表征

一、引言

在弹塑性断裂力学发展的过程中, 裂纹尖端场的研究一直是众人所关心的焦点. 因为它是建立裂纹起裂与扩展准则的理论根据. 对于静止裂纹, Hutchinson^[1]、Rice 和 Rosengren^[2] 首先对于幂硬化材料基于小变形 J_2 形变理论, 导出了裂纹尖端应力应变奇异解, 即 HRR 解. 几十年来, 理论研究、实验研究以及有限元数值计算表明: HRR 奇异场, 在裂纹尖端一环形区域内, 对不同裂纹几何和不同受力方式, 在一定程度上能够刻画真实的应力应变特征; 奇异场的强度系数 $-J$ 积分同样在一定程度上可作为控制裂纹起裂的单参数^[3]. McMeeking 和 Parks^[4]、Shih 和 German^[5]、Needleman 和 Tvergaard^[6] 等的有限元计算结果表明: HRR 奇异场的控制区域大小因试样几何的不同而不同. 对弯曲裂纹试样和紧凑拉伸试样来说, 其有效区远大于中心裂纹试样. O'Dowd 和 Shih^[9] 更精细的研究结果表明, HRR 奇异场宜适用于表征裂纹尖端的高三轴应力场. 三轴应力也直接影响着裂纹尖端塑性区的大小和形状^[7].

为了考虑不同程度大小的三轴应力影响, 同时为了得到更有效的控制裂纹起裂的准则, Li 和 Wang^[8] 首次推导出小变形平面应变裂纹尖端二阶渐近解, 第一项为 HRR 奇异解, 第二项的系数 k_2 通过将渐近解与有限元解匹配定出, 引入 J - k_2 双参数刻画裂纹尖端弹塑性场; 受 Li 和 Wang 思路的启发, O'Dowd 和 Shih^[9,10] 构造了一种两项解, 其中第一项也为 HRR 解, 第二项的形式为 $Qr^q\hat{\sigma}_{ij2}(\theta)$, 通过将两项解与有限元全场解进行匹配定出 $q \approx 0$ 以及 Q 和角分布函数. 在此基础上, O'Dowd 和 Shih 提出了控制裂纹起裂的 J - Q 双参数准则.

¹⁾ 国家自然科学基金资助项目.

本文于 1993 年 4 月 14 日收到.

对于扩展裂纹问题, 在定常扩展条件下, 有不少学者针对理想塑性材料和幂硬化材料先后推导出扩展裂纹渐近场, 详见 Hwang、Yu 和 Yang^[11] 的综述文章. 在定常扩展条件下, 裂纹尖端场的分布规律以及裂纹尖端主塑性区的大小和形状在裂纹扩展过程中始终保持不变. 正如 Hwang 等人^[11] 所指出的那样, 关于幂硬化材料定常扩展裂纹的渐近场, 还存在着一些技术疑点需要澄清.

对于扩展裂纹顶端的弹塑性应力应变场, 也可通过精细的有限元数值计算进行分析. 本项工作旨在利用精细的有限元方法对扩展裂纹尖端场进行系统的研究. 对于不同的幂硬化材料 ($n = 3, 5, 10$)、不同的试样几何 (紧凑拉伸试样 (CT)、中心裂纹试样 (CCP) 和弯曲裂纹试样 (BCP))、不同的屈服水平和不同的裂纹扩展量 ($\frac{\Delta a}{a} = 0.05 - 0.3$) 进行系统的计算. 在计算时对裂纹扩展方式不附加任何条件, 但设想扩展量比较小, 在裂纹稳态扩展过程中, 外载增量比较小, 它可能影响应力水平, 但不改变扩展裂纹顶端弹塑性场的数学结构.

关于裂纹扩展的有限元模拟, Andersson^[12] 首先提出以释放裂尖前方约束的方式模拟裂纹扩展, 裂纹随约束的逐一释放而逐步扩展. Andersson 方法的缺点是将裂纹的连续扩展模拟为跳跃式扩展. 为避 Andersson 方法之短处, 在本文的计算中, 取裂纹扩展一步 (扩展量很小), 连续释放 28 个约束, 其中每一约束反力按 10 步释放到零. 在每一步释放过程中, 反复调整和计算未释放约束的约束反力. 由于裂纹扩展量较小, 在约束释放过程中, 外载可认为保持不变. 为了对比, 本文还给出了在约束释放的同时外载增加的算例.

二、基本关系

考虑材料在单向拉伸时的应力应变关系为

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (2.1)$$

其中 n 为应变硬化指数, $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ 为参考应变, E 为杨氏模量, σ_0 为屈服应力.

由 J_2 流动理论, 多轴应力应变的增量关系为

$$d\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \delta_{im}\delta_{jn} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij}\delta_{mn} - \frac{9\mu\Omega}{(6\mu+2H)\sigma_e^2} S_{ij}S_{mn} \right\} d\varepsilon_{mn} \quad (2.2)$$

其中 S_{ij} 为偏应力张量, $\sigma_e = \sqrt{3S_{ij}S_{ij}/2}$ 为等效应力, μ 为剪切模量, ν 为泊松比, H 为塑性切线模量, 按 (2.1) 式

$$H = \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon^p} = \frac{\sigma_0}{n\alpha\varepsilon_0} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{1-n} \quad (2.3)$$

而

$$\Omega = \begin{cases} 1 & \text{在加载面上且 } S_{ij}d\varepsilon_{ij} > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (2.4)$$

对于静止裂纹, O'Dowd 和 Shih^[9] 通过有限元分析构造的二项解的形式为

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} = \left(\frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij1}(\theta) + Q \delta_{ij} \quad (2.5)$$

其中 r, θ 为极坐标 (原点位于裂纹尖端), 式 (2.5) 右边第一项为应力的 HRR 奇异场, 式 (2.5) 适用于裂纹尖端附近一环形区域. 在 (2.5) 的基础上, O'Dowd 和 Shih 提出裂纹起裂的 J - Q 准则.

三、有限元网格设计及裂纹扩展过程模拟

本文采用自编的二维小变形弹塑性有限元程序, 该程序以 J_2 流动理论为基础, 采用 8 节点四边形等参元和切线刚度法. 该程序通过对一些典型实例的计算已经过严格考核. 为了精确计算扩展裂纹尖端弹塑性场, 本文对有限元网格进行了新的设计, 打破了以往只注意加密扩展前裂纹尖端区域的网格, 而忽视加密扩展后裂纹尖端区域网格的倾向. 专门设计了含有两个精细区的新网格, 如图 1(a)、(b) 所示. 图中 O 和 O' 分别对应扩展前、后裂纹尖端的位置. 图 1(c) 中给出了扩展前、后裂纹尖端连线上各单元节点的位置, 通过逐个释放这些节点约束模拟裂纹的连续扩展. 释放约束的步骤可简述为: 先释放约束 1, 除去约束 1, 用约束反力代替, 然后按 10 步卸去该约束反力. 在释放约束 1 的每一步当中, 重新计算其它约束的反力. 释放掉一个约束后, 按相同步骤释放下一个约束, 共释放 28 个约束对应裂纹扩展一步, 使裂纹尖端到达 O' 处.

对于紧凑拉伸试样, 裂纹原长度 (a) 与试样宽度 (W) 的比值为 0.4, 裂纹扩展量 (Δa) 与裂纹原长度 (a) 相比为 0.05; 对于中心裂纹试样, $a/W = 0.5$, 分别取 $n = 3.5$ 和 10 以及对应的 $\Delta a/a$ 为 0.2、0.1 和 0.3; 对于弯曲裂纹试样, 当 $n = 5$ 及 $a/W = 0.5$ 时, 分别对 $\Delta a/a = 0.1$ 和 0.05 进行计算, 其中后一情况对应在释放约

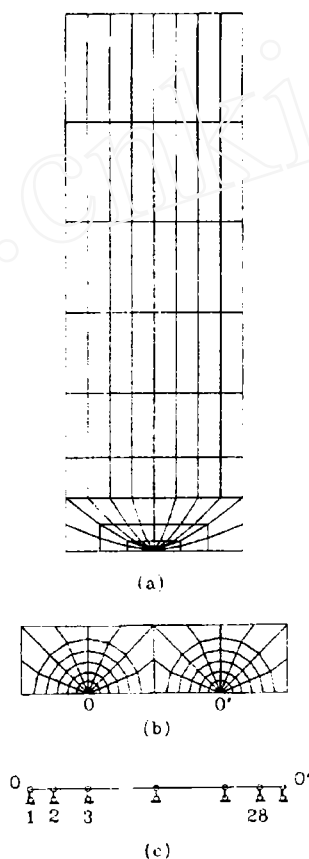


图 1 有限单元网格
(a) 总体网格, (b) 裂纹尖端局部网格,
(c) 裂纹前方单元节点约束.

Fig.1 Finite element mesh used.

(a) Global mesh,
(b) Local mesh near crack tip,
(c) Constraints of finite element
nodes ahead of crack tip.

束的同时, 外载按直线规律增加, 当 $\Delta a/a = 0.05$ 时, 外载比扩展前增加 20%. 其它情况均为在释放约束过程中外载保持不变. 在各算例中, 取 $E/\sigma_0 = 300$, $\alpha = 0.3$, $\nu = 0.3$.

四、结果与分析

图 2 给出了中心裂纹试样 ($n = 5$) 裂纹扩展过程中塑性区 (实线包围区域) 的形状和卸载区 (虚线包围区域) 的形状. 图 2(a)、(b)、(c) 分别为扩展前、裂纹扩展 $\Delta a/2$ 及扩展 Δa 三个阶段的情形. 由图 2(b) 和 (c) 的右图可看出, 加载区和卸载区的交界线近似垂直于裂纹面且经过瞬时裂纹尖端; 对比 (a)、(b)、(c) 的右图可知, 扩展前裂纹后方塑性区的边界, 在裂纹扩展过程中为卸载区的尾边界. 随着裂纹扩展, 塑性区向前方推进, 卸载区的波前尾随其后; 塑性区逐渐增大, 其最大延伸方向也随之改变, 由扩展前沿大约 55° 方向延伸, 到扩展量为 Δa 时沿大约 46° 方向延伸.

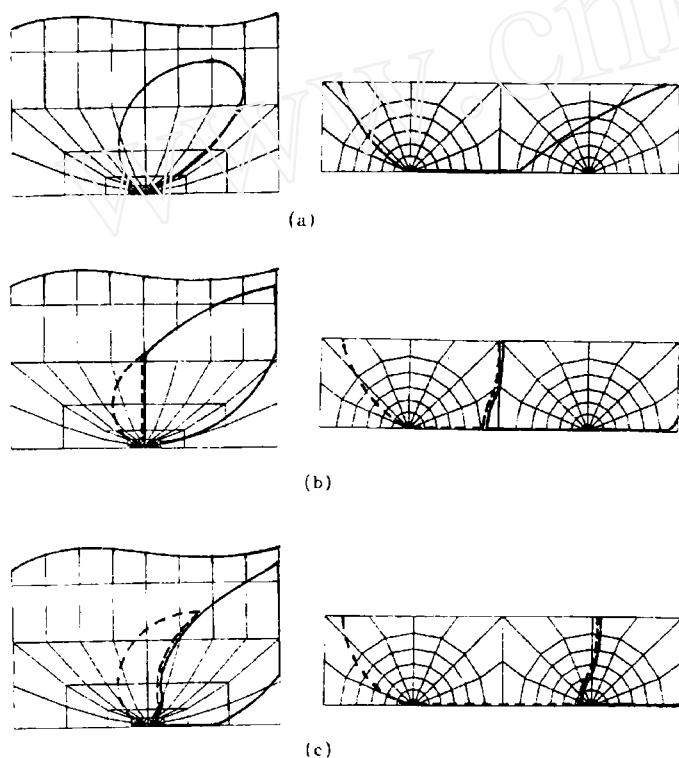


图 2 中心裂纹试样 ($n = 5$) 裂纹尖端塑性区形状 (实线包围区) 及卸载区 (虚线包围区). (a) 扩展前, (b) 扩展量为 $\Delta a/2$, (c) 扩展量为 Δa

Fig.2 Plastic regions (surrounded by solid line) and unloading regions (surrounded by dashed line) near the growing crack tip for CCP specimen ($n = 5$). (a) For crack extension 0, (b) For crack extension $\Delta a/2$, (c) For crack extension Δa

正如 Hutchinson^[3] 所提出的那样, 在扩展裂纹的尾翼存在着卸载弹性区, 而在扩展裂纹尖端附近, 存在着强烈的塑性非比例加载区. 在这两个区域内, 塑性形变

理论已经失效, 因此相应的 HRR 奇异场也不再成立. 我们的有限元解证实, 在裂纹尖端区随着 r 逼近裂纹尖端, HRR 解越来越偏离有限元解. 关于这方面的情况将在作者的另一篇文章中作详细介绍. 但是, 当我们考虑 $1 \leq r/(J/\sigma_0) \leq 3$ 的环形区域时, HRR 解在一定条件下, 仍能近似描述扩展裂纹尖端弹塑性场. 应该强调指出, 对于扩展裂纹, J 积分的守恒性已不再成立, 我们这里取的是远离裂纹顶端的围路计算的 J 积分值, 围路所经过的区域是弹性区或塑性加载区, 不含有卸载区.

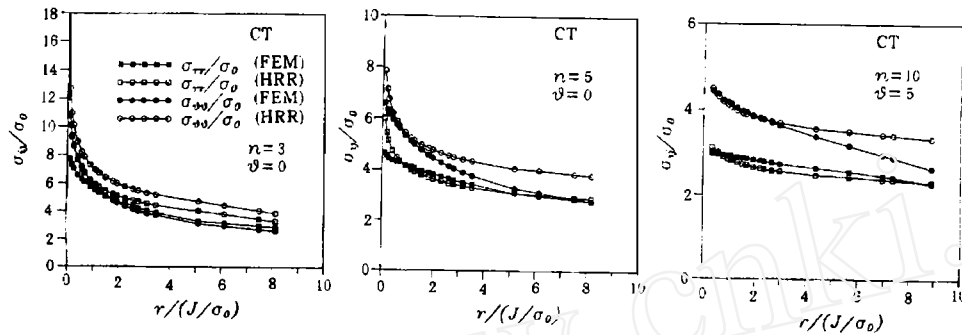


图 3 紧凑拉伸试样裂纹前方应力分布

Fig.3 Stresses ahead of crack tip for CT specimen

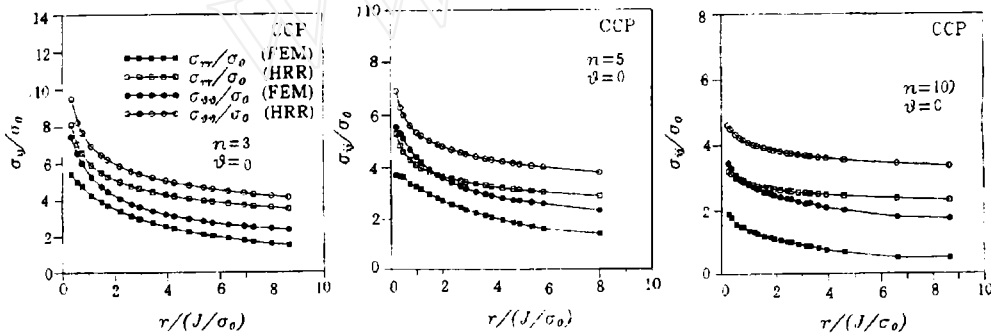
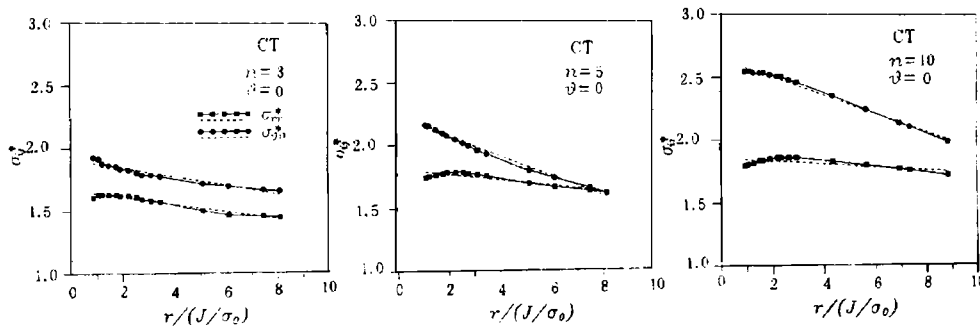
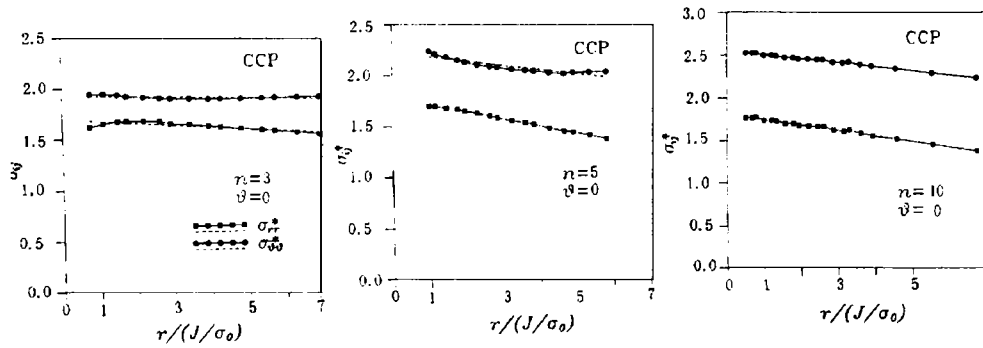


图 4 中心裂纹试样裂纹前方应力分布

Fig.4 Stresses ahead of crack tip for CCP specimen

图 5 紧凑拉伸试样裂纹前方 σ_{ij}^* 的变化及三项解Fig.5 σ_{ij}^* —Finite element solution and three term solution

(dashed line) ahead of crack tip for CT specimen

图 6 中心裂纹试样裂纹前方 σ_{ij}^* 的变化及三项解Fig.6 σ_{ij}^* —Finite element solution and three term solution

(dashed line) ahead of crack tip for CCP specimen

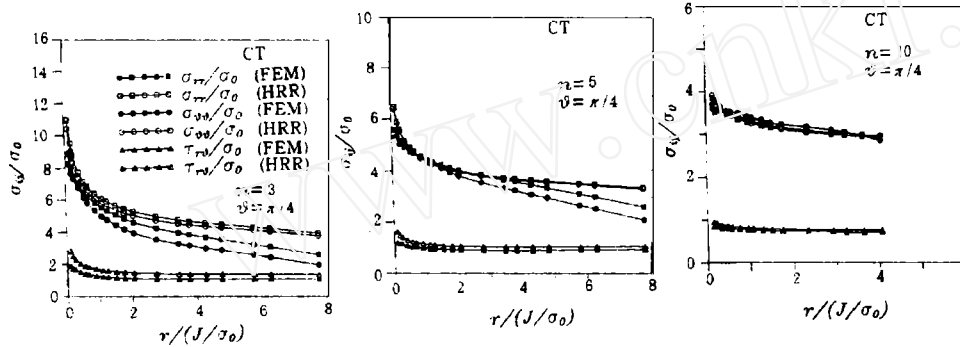
图 7 紧凑拉伸试样裂纹尖端 45° 方向的应力分布Fig.7 Stresses near crack tip along $\theta = 45^\circ$ for CT specimen

图 3 和图 7 分别给出了紧凑拉伸试样当 $n = 3, 5, 10$ 时沿裂纹前方 ($\theta = 0$) 和沿 45° 方向的应力分布, 其中 $a/W = 0.4, \Delta a/a = 0.05$, 图中同时也给出了 HRR 解. 由图 3 和图 7 可看出, 大约在 $0.5 < r/(J/\sigma_0) < 3$ 的环形区域内, HRR 解与扩展裂纹的有限元解符合较好, 但 $n = 3$ 时两种结果差别较大.

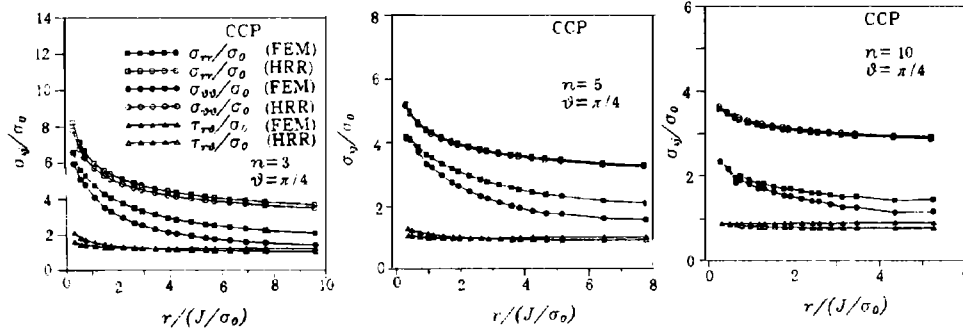
图 8 中心裂纹试样裂纹尖端 45° 方向的应力分布Fig.8 Stresses near crack tip along $\theta = 45^\circ$ for CCP specimen

图 4 和图 8 分别给出了中心裂纹试样当 $n = 3, 5, 10$ 时沿 $\theta = 0$ 和 $\theta = 45^\circ$ 方向的应力分布. 其中 $a/W = 0.5$, 当 $n = 3$ 时, $\Delta a/a = 0.2$; 当 $n = 5$ 时 $\Delta a/a = 0.1$; 当

$n = 10$ 时, $\Delta a/a = 0.3$. 由图 4 和图 8 可知, 正应力的 HRR 解明显高于有限元解, 这是由于中心裂纹试样拉伸时三轴应力较低的缘故.

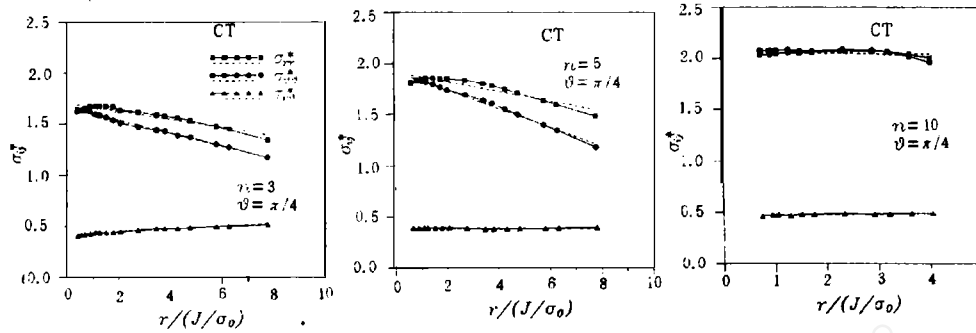


图 9 紧凑拉伸试样裂纹尖端 45° 方向 σ_{ij}^* 的变化及三项解
Fig.9 σ_{ij}^* —Finite element solution and three term solution (dashed line) near crack tip along $\theta = 45^\circ$ for CT specimen

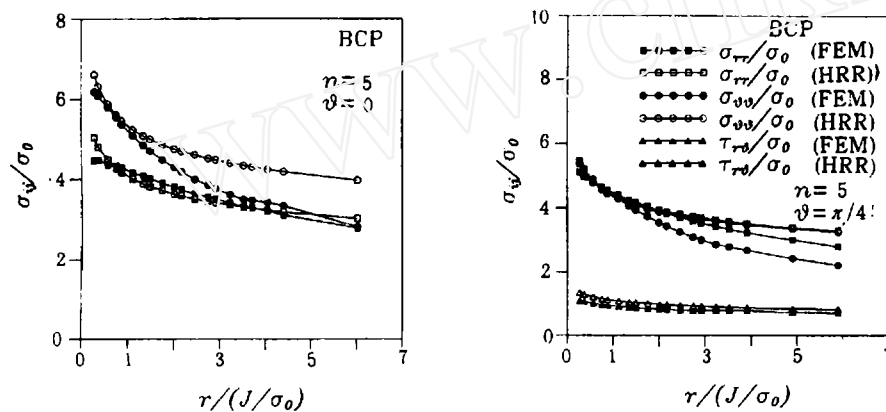


图 10 弯曲裂纹试样裂纹尖端的应力分布

Fig.10 Stresses ahead of crack tip for BCP specimen

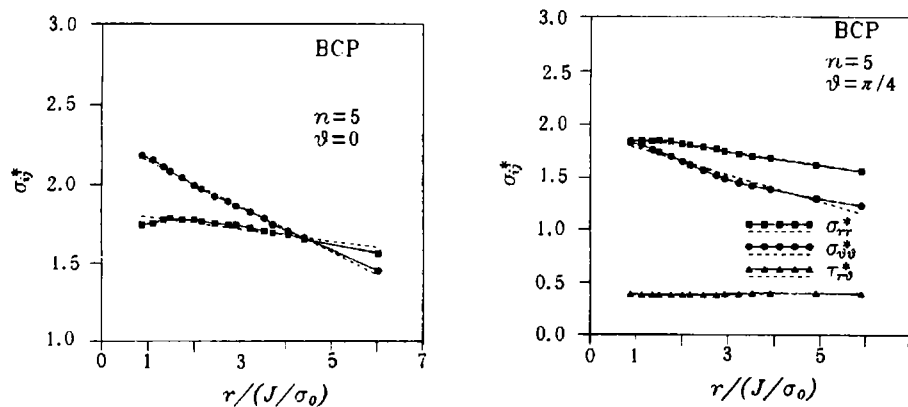


图 11 弯曲裂纹试样裂纹尖端 σ_{ij}^* 的变化及三项解

Fig.11 σ_{ij}^* —Finite element solution and three term solution (dashed line) ahead of crack tip for BCP specimen

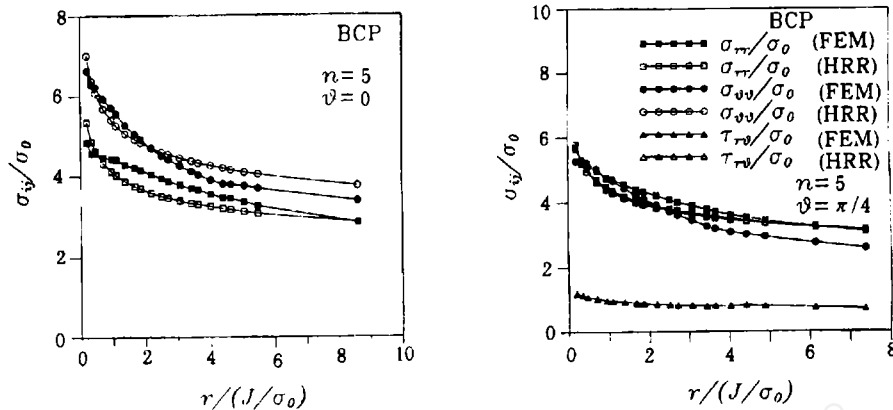


图 12 弯曲裂纹试样裂纹扩展伴随加载时裂纹尖端的应力分布

Fig.12 Stresses ahead of crack tip for BCP specimen when external loads are increased as crack propagates

图 10 和图 12 为弯曲裂纹试样 $n=5$ 时应力的分布情况. 其中图 10 对应 $\Delta a/a = 0.1$, 图 12 对应 $\Delta a/a = 0.05$, 两种情况 $a/W = 0.5$. 图 12 对应释放约束时外载增加. 在图中也给出了 HRR 解的分布. 由该两图可看出, 大约在 $0.5 < r/(J/\sigma_0) < 3$ 的环形区域内, HRR 解与有限元解符合较好.

通过上述分析可知, 扩展裂纹的情况在某种程度上类似于静止裂纹. 对于 CT 试样和 BCP 试样, 在一定条件下可以找到单参数 J 作为控制参数的近似有效区; 但对于 CCP 试样, 这种有效区不存在.

以上分析表明, 在环形区域 $1 \leq r/(J/\sigma_0) \leq 6$ 内, 扩展裂纹尖端的弹塑性应力应变场一般说来不能用 HRR 场来表征.

由常微分方程理论可知, 变系数常微分方程的本征函数一般说来或者是正则函数, 或者是奇性项与正则函数的乘积, 鉴于此原因, 我们设想在环形区域 $1 \leq r/(J/\sigma_0) \leq 6$ 内扩展裂纹顶端的应力应变场可由三项解表示为

$$\frac{\sigma_{ij}(r, \theta)}{\sigma_0} = \left(\frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \left\{ \tilde{\sigma}_{ij1}(\theta) + k_2(r\sigma_0/J - 1)\tilde{\sigma}_{ij2}(\theta) \right\} + Q\hat{\sigma}_{ij1}(\theta) \quad (4.1)$$

在上式中我们已取了正则项与乘积项的首要项. 在 (4.1) 中, k_2 和 Q 为待定参数, $\tilde{\sigma}_{ij1}(\theta)$ 为 HRR 解的角分布函数, $\tilde{\sigma}_{ij2}(\theta)$ 与 $\hat{\sigma}_{ij1}(\theta)$ 为待定角分布函数.

为了检验 (4.1) 的有效性, 分别在图 5、图 6、图 9、图 11 和图 13 中给出了各种情况下 σ_{ij}^* 随 $r/(J/\sigma_0)$ 的变化规律, 其中

$$\sigma_{ij}^* = [\sigma_{ij}/\sigma_0 - Q\hat{\sigma}_{ij1}(\theta)] \left(\frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n r} \right)^{-\frac{1}{n+3}} \quad (4.2)$$

按 σ_{ij}^* 的定义, 由 σ_{ij}^* 所表示的三项解为 r 的线性函数 (见 (4.1) 式). 由已知有限元解可以完全定出三项解的后两项. 由图 5、图 6、图 9、图 11 和图 13 可看出, σ_{ij}^* 随 r 的变化规律可以很好地由斜直线规律拟合, 误差在 2% 以内. 可见, (4.1) 形式的三项解是对有限元解的很好近似.

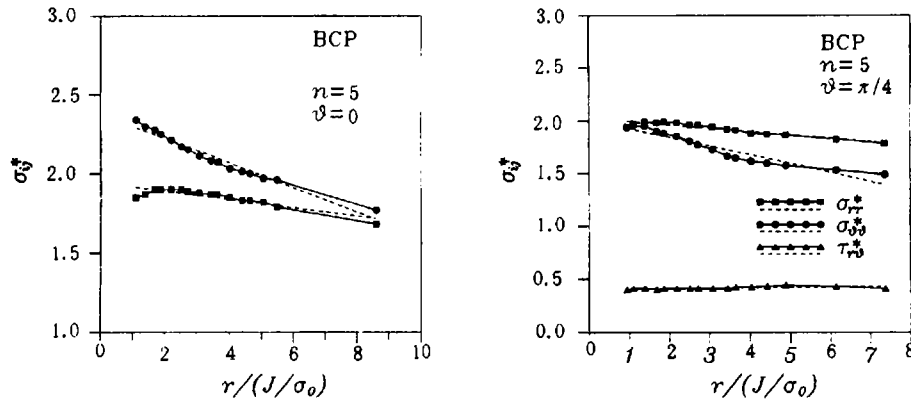


图 13 弯曲裂纹试样裂纹扩展件随加载时裂纹尖端 σ_{ij}^* 的变化及三项解

Fig.13 σ_{ij}^* —Finite element solution and three term solution

(dashed line) ahead of crack tip for BCP specimen

when external loads are increased as crack propagates

如果取类似于 O'Dowd 和 Shih 形式的二项解 (见 (2.5) 式) 拟合有限元解, 则 σ_{ij}^* 与 r 间的关系为水平直线 (σ_{ij}^* 与 r 无关).

本文的大部分计算是在假定裂纹扩展过程中外载不变情况下进行的, 此时扩展裂纹顶端的 J 积分值仍明显大于扩展前的 J 积分值; 裂纹顶端的塑性区也明显大于扩展前的塑性区. 这表明, 扩展裂纹顶端区域绝大部分处于塑性加载状态. 因此与定常扩展裂纹相比, 稳态扩展裂纹顶端塑性区尺寸较大, 而弹性卸载区较小. 又通过比较裂纹扩展过程中载荷增加与不增加两种情况的结果可知, 外载增加与否, 只影响三项解中系数 k_2 、 Q 的大小, 而不改变扩展裂纹尖端弹塑性场的数学结构.

五、结 论

本文详细计算了扩展裂纹尖端的弹塑性应力应变场. 对于硬化指数 $n=3$ 、5、10 给出了紧凑拉伸试样、中心裂纹试样和弯曲裂纹试样的详细有限元结果. 通过分析所得结果, 得出如下结论:

扩展裂纹尖端的弹塑性应力应变场, 在裂纹尖端附近一环形区域内, 可以由三部分表示. 其中第一部分为 HRR 奇异场; 第二部分为与径向坐标无关的三轴应力项; 第三部分为与 HRR 奇异性项相比还含有线性项. 此结论适用于各种材料试样的各种几何形状. 依此为基础可建立裂纹扩展准则.

参 考 文 献

- [1] Hutchinson JW. *J. Mech. Phys. Solids*, 1968, 16:13
- [2] Rice JR and Rosengren GF. *J. Mech. Phys. Solids*, 1968, 16:1
- [3] Hutchinson JW. *J. Appl. Mech.*, 1983, 50:1042
- [4] McMeeking RM and Parks DM. in "Elastic-Plastic Fracture Mechanics", 1979, ASTM STP668:175
- [5] Shih CF and German MD. *Int. J. Fracture*, 1981, 17:27
- [6] Needleman A and Tvergaard V. in "Elastic-Plastic Fracture Mechanics", 1983, ASTM STP803:80

- [7] Larsson SG and Carlsson AJ. *J. Mech. Phys. Solids*, 1973, 21:263
- [8] Li YC and Wang TC. *Scientia Sinica (Series A)*, 1986, 29:941
- [9] O'Dowd NP and Shih CF. *J. Mech. Phys. Solids*, 1991, 39:989
- [10] O'Dowd NP and Shih CF. *J. Mech. Phys. Solids*, 1992, 40:939
- [11] Hwang KC, Yu SW and Yang W. *Appl. Mech. Rev.*, 1990, 43:19
- [12] Andersson H. *J. Mech. Phys. Solids*, 1973, 21:337

ELASTIC-PLASTIC FIELDS NEAR THE GROWING CRACK TIP

Wei Yueguang and Wang Tzuchiang

(LNM, Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080, China)

Abstract In this paper, the propagation process of a crack in the power-law hardening materials is accurately calculated by the elastic-plastic finite element method under plane strain and Mode I conditions. The elastic-plastic fields near the growing crack tip are given in detail.

A unified three term solutions of stress fields ahead of the growing crack tip are first presented. The first term is the HRR singularity solution. The second term describes the triaxiality. The third term includes a linear term of the radius coordinate r besides the HRR singularity term.

This conclusion is completely satisfied for the various specimen geometries, different materials and a variety of yielding degrees from small scale yielding to large scale yielding.

Key words growing crack, elastic-plastic fields, three parameter characterization