

剪切带状分叉¹⁾

李国琛 朱 辰

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 本文从扩散型解法出发, 结合实验, 揭示了剪切带状分叉的主要特征. 进而, 论述材料分叉与结构屈曲(分叉)的不同之处. 文中结果表明: 在诱发剪切带过程中, 材料内空洞的激化速率是控制因素而不在于空洞体积比的自身数量.

关键词 剪切带、分叉、空洞

一、引言

剪切带状分叉及局部化颈缩现象标志着薄板成型及工艺制作中材料的使用限度. 在理论上, 自从 Hill 和 Hutchinson^[1] 的局部型分析被 Anand 和 Spitzig^[2] 的实验证明失效之后, 人们一直关注着这个问题. Yamamoto^[3] 引入了 Gurson^[4] 的空洞模型, 但依此激发剪切带所需要的空洞体积比 f_v 过大. Tvergaard^[5] 以塑性加载面含有角点来松弛刚度. Bazant^[6] 和作者^[7-9] 曾从应变软化角度推测剪切带状分叉. Schreyer^[10], Michlhaus 和 Aifantis^[11] 则以梯度塑性作为出发点. 这些作法至今尚缺乏实验验证.

最近, Anand 等^[12] 编写了专题讨论报告, 指出: 急待解决的是要认识局部化过程与材料内部微结构演化之间的关系. 在塑性理论中是否应该引入微结构尺度也是议题之一. 涉及“固体不稳定性”的讨论时, 人们也提出: 究竟材料与结构的不稳定性之间有何不同?

本文, 以力学分析与材料实验相结合的方法, 研究剪切带的形成过程. 在此基础上, 论述材料分叉的各项特征及其规律.

二、剪切带状分叉的力学分析

无论是结构屈曲(分叉)还是材料分叉都可以归结为分析固体的稳定性, 在这一点上二者相似. 依据经典的 Dirichlet-Kelvin 判据, 应考察具有势能含义的泛函的二次变分量 Q ^[7,9]. 若 $Q > 0$ 是稳定的, $Q < 0$ 是不稳定的. $Q = 0$ 为稳定限即达到临界点. 已经证明: $Q = 0$ 时也是 Q 达到驻值的条件. 由此可导出屈曲或分叉时的控制方程.

¹⁾ 本文受到中国科学院基金(KM85-33), 中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放实验室和国家自然科学基金(N°19272066)的联合资助.

本文于 1993 年 3 月 11 日收到.

以下所要用到的本构方程是

$$\frac{D\tau^{ij}}{Dt} = L^{ijkl}D_{kl} \quad (1a)$$

其中

$$L^{ijkl} = \frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{1}{2} (g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) + g^{ij}g^{kl} \frac{\nu - E/3E_{tm}^{(p)}}{1 - 2\nu + E/E_{tm}^{(p)}} - \frac{3}{2\sigma_e^2} \frac{E}{E_{te}^{(p)}} \frac{S^{ij}S^{kl}}{\frac{2}{3}(1+\nu) + E/E_{te}^{(p)}} \right] \quad (1b)$$

这里, τ^{ij} 是 Kirchhoff 应力, D/Dt 是 Jaumann 导数, D_{kl} 是变形率, S^{ij} 为应力偏量, σ_e 指等效应力 ($= \frac{3}{2} [S_j^i S_i^j]^{1/2}$), g^{ij} 代表度量张量, E 和 ν 分别是弹性模量和 Poisson 系数. 两个可以含有损伤因素的参数是 $E_{te}^{(p)}$ 和 $E_{tm}^{(p)}$. 它们分别是等效应力 - 应变曲线和平均应力 - 应变曲线上的切线模量. 平均应力 σ_m 是指三个主应力和的三分之一. 在计及塑性可膨胀性之后, 塑性的平均应变 $\epsilon_m^{(p)}$ 与主应变的塑性部分之间的关系是

$$\epsilon_m^{(p)} = (\epsilon_1^{(p)} + \epsilon_2^{(p)} + \epsilon_3^{(p)})/3 = f_c/3 \quad (2)$$

其中 f_c 是材料中含有的空洞体积比 f_v 的平均值.

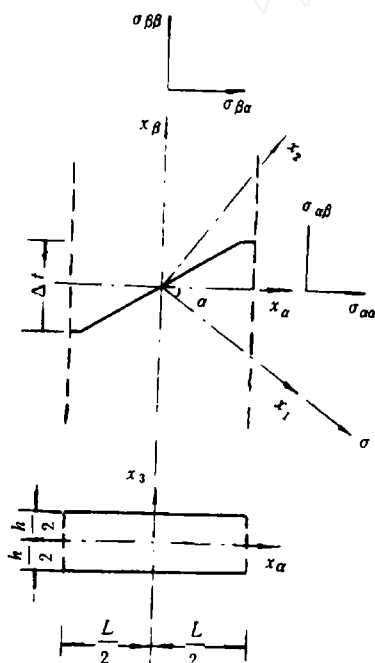


图 1 (x_α, x_β) 坐标系中剪切带

Fig.1 The (x_α, x_β)

coordinate system used in shear-band analysis

图 1 绘制了在板厚 h 中形成的宽为 L 的剪切带. 带的法线方向是 x_α 轴, 带的延伸方向是 x_β . 设板材仅受有沿 x_1 轴方向的拉伸应力 σ , x_α 与 x_1 之间的夹角为 α , 分叉前应力是

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} &= \sigma \cos^2 \alpha \\ \sigma_{\beta\beta} &= \sigma \sin^2 \alpha \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \sigma_{\beta\alpha} = \sigma \sin \alpha \cos \alpha \\ \sigma_{3\alpha} &= \sigma_{\beta 3} = \sigma_{33} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

剪切带状分叉时, 速率扰动应该符合下列条件

$$\delta V_{\alpha,\beta} = \delta V_{\beta,\beta} = \delta V_{3,\alpha} = \delta V_{3,\beta} = \delta V_{3,3} = 0 \quad (4a)$$

此外, 还需受到下列边界条件的约束, 即

在

$$\left. \begin{aligned} x_\alpha = 0 : \quad & \delta V_\alpha = 0, \quad \delta D_{3\alpha} = 0 \\ x_3 = 0 : \quad & \delta V_3 = 0, \quad \delta D_{3\alpha} = 0 \\ x_\alpha = L/2 : \quad & \int_{-h/2}^{h/2} \delta \dot{T}_{\alpha 3} dx_3 = 0, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \delta \dot{T}_{\alpha\alpha} dx_3 = 0 \\ x_3 = h/2 : \quad & \delta \dot{T}_{3\alpha} = 0, \quad \delta \dot{T}_{33} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

$$\text{其中} \quad \delta D_{3\alpha} = \frac{1}{2}(\delta V_{3,\alpha} + \delta V_{\alpha,3}) \quad (5)$$

这里和以后, 下标前的逗号代表对含有该标号的坐标取导数.

各项名义应力率的扰动可表示为

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{T}_{\alpha\alpha} &= (L_{\alpha\alpha\alpha\alpha} - \sigma_{\alpha\alpha})\delta V_{\alpha,\alpha} + (L_{\alpha\alpha\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta})\delta V_{\beta,\alpha} \\ \delta \dot{T}_{\beta\beta} &= L_{\alpha\alpha\beta\beta}\delta V_{\alpha,\alpha} + L_{\beta\beta\alpha\beta}\delta V_{\beta,\alpha} \\ \delta \dot{T}_{33} &= L_{\alpha\alpha 33}\delta V_{\alpha,\alpha} + L_{33\alpha\beta}\delta V_{\beta,\alpha} \\ \delta \dot{T}_{\alpha 3} &= \left(L_{\alpha 3\alpha 3} - \frac{\sigma_{\alpha\alpha}}{2}\right)\delta V_{\alpha,3} - \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{2}\delta V_{\beta,3} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

由于 $\delta V_{3,\alpha} = 0$, $\delta \dot{T}_{3\alpha} = \delta \dot{T}_{\alpha 3}$.

设速率扰动的波型取为以下的函数形式

$$\left. \begin{aligned} \delta V_\alpha &= \sin \frac{\pi x_\alpha}{L} \phi \Delta_2 \\ \delta V_\beta &= \sin \frac{\pi x_\alpha}{L} \phi \Delta_4 \\ \delta V_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

$$\text{其中} \quad \phi = 1 + (1 - \omega) \cos \frac{2\pi x_3}{h} - \omega \cos \frac{4\pi x_3}{h} \quad (7b)$$

又 Δ_2 和 Δ_4 为两个待求的广义速率参量, ω 是一个调节变量以获取最低临界值. 不难验证, (7a) 和 (7b) 所表示的扰动分布可以使 (4a) 和 (4b) 所规定的各项条件得到严格的满足.

这样, 将 (7a) 和 (7b) 代入 Q (参见 [7,9]) 的表达式之后, 经过积分运算可以求出

$$\begin{aligned} Q &= (L_{\alpha\alpha\alpha\alpha} - \sigma_{\alpha\alpha}) \frac{\pi^2}{8} \frac{h}{L} \left(\frac{3}{2} - \omega + \omega^2 \right) \Delta_2^2 \\ &+ (L_{\alpha\alpha\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}) \frac{\pi^2}{4} \frac{h}{L} \left(\frac{3}{2} - \omega + \omega^2 \right) \Delta_2 \Delta_4 \\ &+ \left(L_{\alpha\beta\alpha\beta} + \frac{\sigma_{\alpha\alpha}}{2} - \frac{\sigma_{\beta\beta}}{2} \right) \frac{\pi^2}{8} \frac{h}{L} \left(\frac{3}{2} - \omega + \omega^2 \right) \Delta_4^2 \\ &+ \left(L_{\alpha 3\alpha 3} - \frac{\sigma_{\alpha\alpha}}{2} \right) \frac{\pi^4}{4} \frac{L}{h} (1 - 2\omega + 5\omega^2) \Delta_2^2 \\ &+ \left(L_{\beta 3\beta 3} - \frac{\sigma_{\beta\beta}}{2} \right) \frac{\pi^4}{4} \frac{L}{h} (1 - 2\omega + 5\omega^2) \Delta_4^2 \\ &- \sigma_{\alpha\beta} \frac{\pi^2}{4} \frac{L}{h} (1 - 2\omega + 5\omega^2) \Delta_2 \Delta_4 \end{aligned} \quad (8)$$

其中 h/L (或 L/h) 是剪切带尺寸的几何比.

根据分叉时所应满足的驻值条件, 可以使

$$\frac{\partial Q}{\partial \Delta_2} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \Delta_4} = 0 \quad (9)$$

由此可导出一组线性代数方程以求特征值, 不再赘述. 一旦由实验确定了 $E_{te}^{(p)}$ 和 $E_{tm}^{(p)}$, 对应各个给定的 h/L 值, 选取适当的 ω 和 α 以求得最低的临界值.

三、实验分析与比较

选择一类双相钢板材, 其屈服应力 σ_y 和拉伸强度 σ_b 分别是 370MPa 和 650MPa. 在电子扫描镜 (Hitachi S-570) 中进行在位拉伸. 处于试样中心部位的标长取为 $L_0 = 6.5\text{mm}$. 相对拉伸记作 ΔL , 于是名义应变值应是 $\Delta L/L_0$. 在电镜中试验, 可以准确地观察和测定剪切带的萌发和演化过程. 试验表明, 当 $\Delta L/L_0 \doteq 0.08$ 时, 试样表面的局部地区产生浮凸. 之后, 当 $\Delta L/L_0 \doteq 0.10$, 名义应力 σ_n 随名义应变的继续增加而下降 (见图 2(a)), 原浮凸处加重并形成亮点区. 这是剪切带的表观现象和先导特征. 其后继现象是宏观剪切带由亮点区交叉辐射出现, 带法线与拉伸轴间的夹角为 $25^\circ - 35^\circ$. 带内空洞化加聚并导致局部颈缩. 于是沿剪切带方向的板厚 h 相对初始值 h_0 的减薄速度明显快于板宽 w 相对其初始值 w_0 的缩减速度 (见图 2(b)).

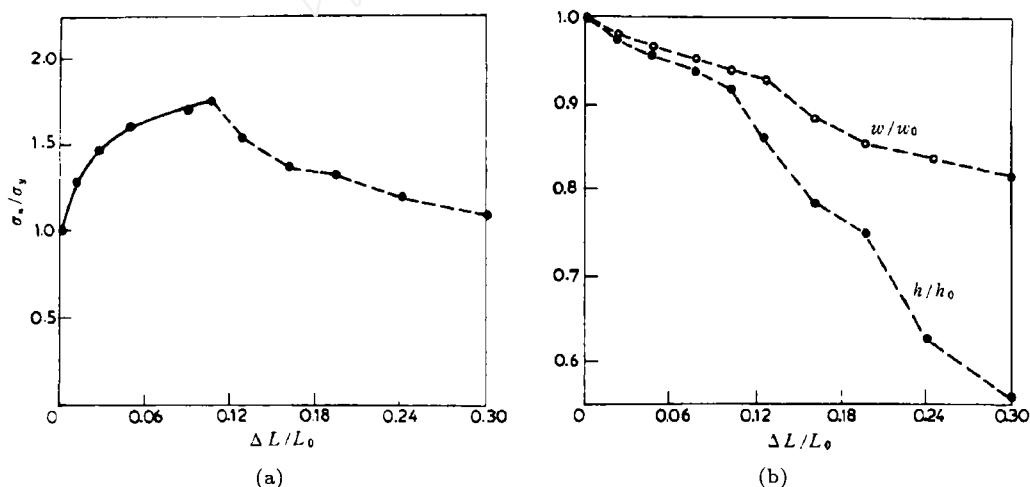


图 2 (a) 名义应力 - 应变曲线: $\sigma_n/\sigma_y - \Delta L/L_0$,

(b) 单向拉伸时试件宽度和厚度的收缩率 w/w_0 和 h/h_0 随名义应变 $\Delta L/L_0$ 的变化

Fig.2 (a) The nominal stress-strain curve, $\sigma_n/\sigma_y - \Delta L/L_0$ and

(b) the development of the contraction of the width w/w_0 and of the thickness

h/h_0 with respect to the nominal strain $\Delta L/L_0$ in the specimen under uniaxial tension

出现剪切带后, 带内的颈缩致使真应力 σ 继续升高, 而带外厚度变化甚微且应力降低. 带内的空洞分布也不均匀, 表面层变化不大而接近中面层 (例如, 从表面磨去板厚的三分之一以后作观测) 的空洞化急剧加快. 图 3 显示了以上特征, 在 $\Delta L/L_0$

≈ 0.10 处有明显的转折点；与图 2(a) 中最大载荷点及图 2(b) 中厚度颈缩的起点相重合，依此可定为实测的临界点。图 3 中每个实测点都对应着一个被拉伸到该名义应变 $\Delta L/L_0$ 即卸载的试件。共有七件 ($\Delta L/L_0 = 0.08, 0.105, 0.127, 0.159, 0.195, 0.243, 0.296$)。在每个试件的剪切带区又分表层与中间层，分别取样测定空洞体积比 f_v 。

测定试件在各瞬时的横截面尺寸之后又可以确定宽度与厚度方向的真应变 ε_2 和 ε_3 。借助于 (2) 式和所测定的带内 f_v 值，可以导出带内沿拉伸轴方向的平均真应变 $\varepsilon_1 (= \varepsilon)$ 。由此可以得到单轴拉伸应力 - 应变曲线 $\sigma - \varepsilon$ (在此情况下也就是等效应力 - 应变曲线) 和平均应力 - 应变曲线 $\sigma_m - \varepsilon_m$ ，均绘制于图 4。由此可量测 (1b) 式中所待定的两个切线模量 $E_{te}^{(p)}$ 和 $E_{tm}^{(p)}$ 随应力 σ 的变化。这里，未加上标 (p) 的应变变量均指其全量 (包括弹性部分)。

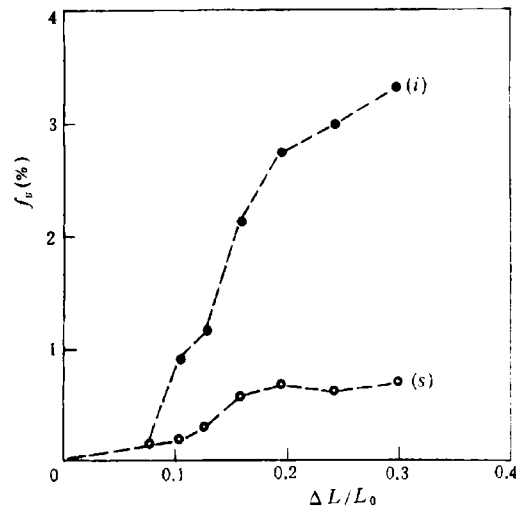


图 3 剪切带区表层 (s) 和内层 (i) 中空洞体积比 f_v 随名义应变 $\Delta L/L_0$ 的变化

Fig.3 The variation of void volume fraction f_v versus nominal strain $\Delta L/L_0$ on the surface (s) and in the interior (i) of shear-band region

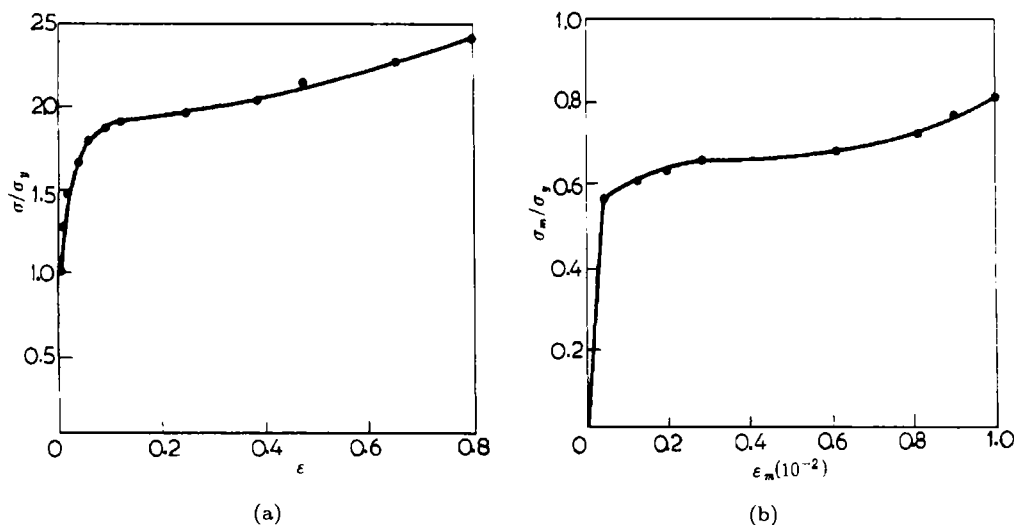


图 4 双相钢板材的 (a) 单轴拉伸应力 - 应变曲线 $\sigma - \varepsilon$ 和 (b) 平均应力 - 应变曲线 $\sigma_m - \varepsilon_m$

Fig.4 (a) The uniaxial stress-strain curve $\sigma - \varepsilon$ and (b) The mean stress-strain curve $\sigma_m - \varepsilon_m$ of a dual-phase steel

根据以上结果，设分叉前的受力状态为平面应力，由 (9) 式所规定的条件可以计算剪切带的临界值并与实验值相比较。结果均列在表 1。其中下标 cr 代表计算临

界值, 而下标 t 代表实测值. 计算值仍有偏高的倾向. 考虑到带宽较薄, 分叉前板内实际受力状态在局部地区会有平面应变行为并降低临界值 (参见 [8]), 这一差别还是合理的.

表 1 双相钢板材的临界值

Table 1 The critical values of a dual-phase steel plate

$E_{te}^{(p)}/E$	$E/E_{tm}^{(p)}$	σ_{cr}/σ_y	σ_t/σ_y	$(\Delta L/L_0)_{cr}$	$(\Delta L/L_0)_t$	α_{cr}
0.0008	93	1.97	1.88	0.130	0.105	4°

此外, 计算的 α 值与可观测到的剪切带取向不同. 但实验中肉眼所见剪切由亮点区辐射出来的带. 这种带意味着分叉还是分叉后诱导的结果, 尚不能肯定.

按图 3 的结果, 出现分叉的转折点 $f_v < 1.5\%$. 如按 Yamamoto^[3] 的推算, 现材料的硬化指数 $N \doteq 0.15$, 带内外的含空洞率应相差 5% 才能达到临界点, 远远高于实际值. 由此可见, (1b) 式中用 $E_{tm}^{(p)}$ 或其无量纲化的逆值 $E/E_{tm}^{(p)}$ 作为表征空洞演化的速率比 Gurson^[4] 模型取空洞体积比 f_v 作控制参数更符合实际.

四、剪切带的力学特征

为揭示剪切带的力学特征, 可以利用以上已基本验证的力学模型和分析, 扩大参数范围, 继续作一些算例.

取 Poisson 系数 $\nu = 0.3$, 屈服应变 $\varepsilon_y = \sigma_y/E = 0.002$, $E_{te}^{(p)}/E = 0$ 和 0.001, $E/E_{tm}^{(p)} = 70$ 和 100. 图 5 中, 每条计算临界应力曲线都随 h/L 的增大而趋向各自的局部型解 (缩写为 l.s.). 局部型解 (参见 [7]) 是取速率扰动

$$\delta V_i = V_i(n) \quad (i = 1, 2) \quad (10a)$$

$$\delta V_{i,j} = \frac{dV_i}{dn} n_j = C_i n_j \quad (j = 1, 2) \quad (10b)$$

其中 n_j 是带法线向量 n 的投影分量. 与前面扩散型解 (7a) 和 (7b) 不同, 局部型解不能确定 V_i 的具体形式. 结合到薄板内的剪切带, 只有用扩散型解才能解释剪切带在表层与中层的不同行为. 但局部型解可以作为扩散型解的一种渐近值. 这一特点在表 2 所列的算例中得到显示. 其中调节参数 ω 的作用仅在 $h/L \leq 10^2$ 时有效, 当 h/L 趋向 10^3 时其作用消失.

表 2 临界应力 σ_{cr}/σ_y 随 h/L 和 $E/E_{tm}^{(p)}$ 的变化关系

$$(E_{te}^{(p)}/E = 0, \nu = 0.3, \varepsilon_y = 0.002)$$

Table 2 The variation of critical stress σ_{cr}/σ_y with respect to h/L and $E/E_{tm}^{(p)}$

$$(E_{te}^{(p)}/E = 0, \nu = 0.3, \varepsilon_y = 0.002)$$

$E/E_{tm}^{(p)}$	h/L						l.s.
	10^2		10^3		10^4		
60	2.7755	2.7726	2.7498	2.7498	2.7495	2.7495	2.7495
	$(\omega = 0)$	(0.159)	(0)	(0)	(0)	(0)	
80	2.0933	2.0904	2.0677	2.0677	2.0674	2.0674	2.0674
	$(\omega = 0)$	(0.158)	(0)	(0)	(0)	(0)	
100	1.6823	1.6794	1.6568	1.6567	1.6565	1.6565	1.6565
	$(\omega = 0)$	(0.158)	(0)	(0.121)	(0)	(0)	

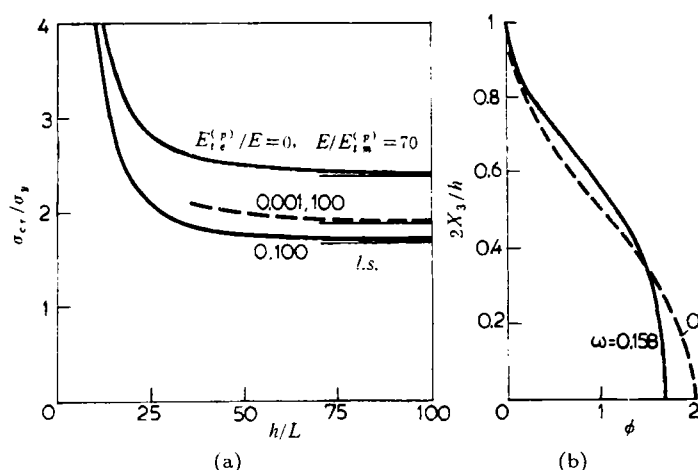


图 5 扩散型解的 (a) 临界应力 σ_{cr}/σ_y 随带宽参数 h/L 的变化及 (b) 板材厚度方向内的扰动分布 ϕ

Fig.5 (a) The variation of critical stress σ_{cr}/σ_y versus band-width parameter h/L , and (b) the distribution ϕ of disturbance along plate-thickness direction in a diffuse-type of solution

为考察分叉时所激发的名义应力率扰动，利用 Mohr 圆规律可将 (6) 式中有关结果转换并得到

$$\frac{\delta \dot{T}_1}{\sigma_y} = T_1 \left(\cos \frac{\pi x_1}{L} \phi \right) \gamma \quad (11a)$$

$$\frac{\delta \dot{T}}{\sigma_y} = \frac{1}{3\sigma_y} (\delta \dot{T}_{11} + \delta \dot{T}_{22} + \delta \dot{T}_{33}) = T \left(\cos \frac{\pi x_1}{L} \phi \right) \gamma \quad (11b)$$

其中，按图 1 所示

$$\gamma = \Delta_t/L, \quad \Delta_t = 2\delta V_{\beta}|_{(x_0=L/2, x_3=0)} \quad (12)$$

Δ_t 是带边缘线的相互错动速率， γ 代表带内错动角度的变化率。表 3 显示了分叉时可激发高三轴张力 T 及随后的承载能力 T_1 。

表 3 应力率 T_1, T 随 h/L 和 $E/E_{tm}^{(p)}$ 的变化关系

$(E_{te}^{(p)}/E = 0, \nu = 0.3, \varepsilon_y = 0.002)$

Table 3 The variation of stress rates T_1 and T with respect to h/L and $E/E_{tm}^{(p)}$

$(E_{te}^{(p)}/E = 0, \nu = 0.3, \varepsilon_y = 0.002)$

$E/E_{tm}^{(p)}$	T_1			T		
	h/L			h/L		
	10^2	10^3	10^4	10^2	10^3	10^4
60	-0.074	0.044	0.045	10.538	8.818	8.631
80	-0.113	0.030	0.030	9.158	7.772	7.560
100	-0.141	0.023	0.022	8.170	7.835	7.026

以上结果揭示了以下一些特征：

(1) 由 (7b) 式所规定的速率扰动可见，剪切带最先由板的中面层激发，表层处的扰动很弱。由此也可推测，肉眼所见剪切带属于分叉后的演化现象。

(2) 带内激发的应力率扰动及三轴张力也在中面层达到最大。由此可解释板材内部空洞化急速增长而表层变化较小的现象 (见图 4)。

(3) 临界应力值随 h/L 的增大而单调地减小. 这就意味着带宽相对板厚会趋向无穷小. 事实上当 $h/L > 100$ 以后, 临界应力值变化甚微, 无法实际考证. 在平面应变固体中, 作者^[13]曾发现带宽与其周期性分布的带间距无关.

(4) 由表征承载能力的 T_1 值的正负情况可以判断初始分叉后能否继续承载, 也就是说, 是稳定的或不稳定的. 目前来看, 两种可能都有. 因此, 统称剪切带为不稳定性 (instability) 不够恰当, 而归为分叉 (bifurcation) 现象更为确切.

至此, 以剪切带为例, 可以归纳出材料分叉与结构屈曲相区别的特点在于:

(1) 可以认为分叉是受材料内部特征尺度控制, 而未发现与宏观几何有关; 因此含有非局部的力学意义.

(2) 分叉与材料内部损伤相互作用. 空洞化的变化率决定着分叉, 而分叉之后又促进着损伤的加聚.

可以认为, 正是分叉后损伤加聚促成带内颈缩. 当然, 还可能是分叉的速率扰动应伴随有颈缩波型. 有关这一问题应在另文中讨论.

参 考 文 献

- [1] Hill R and Hutchinson JW. *J. Mech. Phys. Solids*, 1975, 23:239
- [2] Anand L and Spitzig WA. *J. Mech. Phys. Solids*, 1980, 28:113
- [3] Yamamoto H. *Int. J. Fracture*, 1978, 14:347
- [4] Gurson AL. *J. Eng. Mat. Technol.*, 1977, 99:2
- [5] Tvergaard V. *J. Mech. Phys. Solids*, 1987, 35:43
- [6] Bazant ZP. *Trans. ASME, J.A.M.*, 1988, 55:517
- [7] 李国琛. 力学学报, 1987, 19:61
- [8] 李国琛. 力学学报, 1988, 20:305
- [9] Li GC. IUTAM Symposium Beijing, China 1991, Constitutive relations for finite deformation of polycrystalline metals. Springer-Verlag, 303-317
- [10] Schreyer HL. *Trans. ASME, J.A.M.*, 1990, 57:522
- [11] Michlhaus HB and Aifantis EC. *Int. J. Solids Structures*, 1991, 28:845
- [12] Anand L, Dillon O, Place TA and von Turkovich BF. *Int. J. Plasticity*, 1990, 6(2):I-IX
- [13] Li Guochen. *Acta Mechanica Sinica* (English edition), 1990 6:22

SHEAR-BAND BIFURCATION

Li Guochen Zhu Chen

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080, China)

Abstract A diffuse type of theoretical solution, interrelated with experimental observations, is given to reveal the characteristics of shear-band bifurcation. This effort is used to distinguish material bifurcation from structural buckling(bifurcation). It is demonstrated that the rate of porosity development is governing the process of shear banding, instead of attributing to the amount of porosity itself.

Key words shear band, bifurcation, void