

实心球体在热冲击下的动应力和某些现象

王 熙

(南京理工大学应用力学系, 南京 210014)

摘要 本文提出一种简便的解析方法求解实心球体在热冲击载荷作用下的动应力响应. 从热应力的解析表达式和计算结果可以发现圆心处的动应力具有动应力集中现象, 并且随着应力波在球体外边界的不断反射而产生周期性振荡.

关键词 热冲击, 球体, 动应力集中

1. 引言

一个球体在热冲击作用下的动应力响应属于热弹性动力学问题. 求解这类动力学问题存在一些数学处理上的困难, 目前仅有一些简单的一维问题具有封闭解. [2] 给出了热应力波在空腔球体内传播的解析解. 然而, 这种解太复杂以致于不能对波的传播过程有一个清晰的了解. [3,4] 基于特征函数方法得到了空腔球体的热冲击问题的解, [1,5] 应用射线理论^[6]求解了球体在热冲击作用下的动应力响应. 从他们的求解过程中可以发现他们解的精确性都依赖于数值积分的精度.

本文将热弹性动力学场方程的解看成是由一个满足非齐次混合边界条件的热弹性准静态解和一个仅满足齐次混合边界条件的弹性动态解的叠加. 通过定义一种有限汉克尔变换对非齐次动态方程进行有限汉克尔变换. 最终可获得球体在热冲击作用下动应力的精确解析表达式.

从获得的动应力表达式和计算结果可以明显发现; 球体圆心处的动应力存在动应力集中现象. 球心处动应力具有很高的峰值且随着应力波在球体外自由边界不断向圆心处反射产生强烈的周期性振荡现象. 动应力的峰值虽然很大, 但它是有限值. 这与 [1] 描述的球心处的动应力值是光滑曲线, 随着时间增大动应力的值趋于无穷的结论有着根本性的差异.

2. 热弹性动力学场方程和求解方法

对于一个外半径为 b 的弹性球体, 在一个任意变化的温度场 $T(r, t)$ 作用下的热弹性动力学场方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u = \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r}; \quad 0 \leq r \leq b, \quad t \geq 0^+ \quad (1a)$$

上式中, $u = u(r, t)$ 表示径向位移, $C_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ 表示波速, r, t, α, ν 和 λ, μ 分别为径向坐标, 时间变量, 热膨胀系数, 泊松比和 Lamé's 常数, ρ 是质量密度.

本文于 1992 年 2 月 1 日收到第一稿, 于 1993 年 5 月 13 日收到修改稿.

方程 (1a) 的初始条件和边界条件可表示为

$$u(r, 0) = u_0(r), \quad u(r, 0)_{,t} = v_0(r) \quad (1b)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (1c)$$

$$\sigma_r(b, t) = \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\lambda}{r} u - \frac{\alpha ET}{1 - 2\nu} \right]_{r=b} = 0 \quad (1d)$$

由位移场, 几何关系和物理关系, 可得热弹性动应力的表达式为

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\lambda}{r} u - \frac{\alpha ET}{1 - 2\nu} \quad (2a)$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial(\lambda + \mu)}{r} u - \frac{\alpha ET}{1 - 2\nu} \quad (2b)$$

设方程 (1) 的解可表示为

$$u(r, t) = u_T(r, t) + u_E(r, t) \quad (3)$$

其中 u_T 为下列准静态方程, 非齐次混合边界条件的热弹性解, 即

$$\frac{\partial^2 u_T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_T}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u_T = \alpha \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (4a)$$

$$u_T(0, t) = 0 \quad (4b)$$

$$\left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_T}{\partial r} + \frac{2\lambda}{r} u_T \right]_{r=b} = \frac{\alpha ET}{1 - 2\nu} \quad (4c)$$

从上式可很容易求得

$$u_T(r, t) = \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \frac{\alpha}{r^2} \int_0^r r^2 T dr + \frac{2\alpha r(1 - 2\nu)}{b^3(1 - \nu)} \int_0^b r^2 T dr \quad (5)$$

$$\text{令} \quad u_E(r, t) = r^{-1/2} f(r, t) \quad (6)$$

将式 (3) 代入方程 (1) 并利用式 (4) 和式 (6), 可以得到 $f(r, t)$ 应满足的非齐次动态方程和齐次混合边界条件及给定的初始条件

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{(3/2)^2}{r^2} f = \frac{1}{C_L^2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_{Tr}}{\partial t^2} \right] \quad (7a)$$

$$f(r, 0) = u_{0r}(r) - u_{Tr}(r, 0), \quad f(r, 0)_{,t} = v_{0r}(r) - u_{Tr}(r, 0)_{,t} \quad (7b)$$

$$\left[r^{-1/2} f(r, t) \right]_{r=0} = 0 \quad (7c)$$

$$\left[\frac{(\lambda + 2\mu)}{r^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{3\lambda - 2\mu}{2r^{3/2}} f \right]_{r=b} = 0 \quad (7d)$$

$$\text{其中} \quad u_{Tr} = r^{1/2} u_T, \quad u_{0r} = r^{1/2} u_0, \quad v_{0r} = r^{1/2} v_0 \quad (8)$$

上式中, u_T 为式 (5) 所示的已知弹性解.

$$\text{若定义 } \bar{f}_r(k_n) = H[f_r(r)] = \int_0^b r f_r(r) J_{3/2}(k_n r) dr \quad (9)$$

为 $f_r(r)$ 的有限 Hankel 变换^[7], 则式 (9) 的反变换可以表示为

$$f_r(r) = \sum_{k_n} \frac{\bar{f}_r(k_n)}{F(k_n)} J_{3/2}(k_n r) \quad (10)$$

其中, $J_{3/2}(k_n r)$ 为第一类第 3/2 阶贝塞尔函数

$$F(k_n) = \int_0^b r J_{3/2}^2(k_n r) dr = \frac{b^2}{2} \left\{ \left[J_{3/2}'(k_n b) \right]^2 + \left[1 - \left(\frac{3/2}{k_n b} \right)^2 \right] J_{3/2}^2(k_n b) \right\} \quad (11)$$

k_n 为下列方程的正根

$$\frac{d}{db} J_{3/2}(k_n b) + \frac{3\lambda - 2\mu}{2(\lambda + 2\mu)b} J_{3/2}(k_n b) = 0$$

利用有限 Hankel 变换定义 (9) 对非齐次动态方程 (7a) 进行有限 Hankel 变换, 则式 (7a) 变为

$$\frac{b^{3/2}}{(\lambda + 2\mu)} J_{3/2}(k_n b) \left[\frac{(\lambda + 2\mu)}{b^{1/2}} f'(b) + \frac{(3\lambda - 2\mu)}{2b^{3/2}} f(b) \right] - k_n^2 \bar{f}(k_n) = \frac{1}{C_L^2} \left[\frac{d^2 \bar{f}}{dt^2} + \frac{d^2 \bar{u}_{Tr}}{dt^2} \right] \quad (12)$$

其中 $\bar{u}_{Tr} = H[u_{Tr}(r, t)]$ (13)

式 (12) 中的 $f(r, t)$ 应满足齐次边界条件 (7d), 由此, 式 (12) 等式左边第一项应恒等于零, 则式 (12) 简化为

$$-k_n^2 \bar{f}(k_n) = \frac{1}{C_L^2} \left[\frac{d^2 \bar{f}}{dt^2} + \frac{d^2 \bar{u}_{Tr}}{dt^2} \right] \quad (14)$$

对式 (14) 进行 Laplace 变换, 利用初始条件 (7b). 然后再进行 Laplace 反变换, 并利用卷积定理, 我们可得下式

$$\begin{aligned} \bar{f}(k_n) = & -\bar{u}_{Tr} + \omega_n \int_0^t \bar{u}_{Tr} \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau \\ & + \bar{u}_{0r}(k_n) \cos \omega_n t + \frac{\bar{v}_{0r}(k_n)}{\omega_n} \sin \omega_n t \end{aligned} \quad (15)$$

其中常数 $\omega_n = C_L k_n$.

利用有限 Hankel 反变换 (10) 和式 (15) 可得

$$f(r, t) = \sum_{k_n} \frac{\bar{f}(k_n)}{F(k_n)} J_{3/2}(k_n r) \quad (16)$$

将式 (16) 代入式 (6) 并利用式 (3), 我们可得场方程 (1) 的精确解

$$u(r, t) = \frac{(1 + \nu) \alpha}{(1 - \nu) r^3} \int_0^r r^2 T dr + \frac{2\alpha r(1 - 2\nu)}{b^3(1 - \nu)} \int_0^b r^2 T dr + \sum_{k_n} \frac{\bar{f}(k_n)}{F(k_n)} r^{-1/2} J_{3/2}(k_n r) \quad (17)$$

将式 (17) 代入式 (2) 可得热弹性动应力表达式.

3. 实例计算和讨论

考虑球体在电磁脉冲辐射能或伽玛脉冲射线能作用下产生的突然变化的温度场可以表示为

$$T(r, t) = T_0 H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ T_0 & t \geq 0^+ \end{cases} \quad (18)$$

设球体的初始状态为零初始状态以及初始温度场为零初始温度. 则初始条件为

$$u(r, 0) = u(r, 0)_{,t} = 0 \quad (19)$$

将式 (18) 和式 (19) 代入式 (17), 弹性动力学场方程的相应基本解为

$$u(r, t) = \alpha T_0 r - \alpha T_0 \sum_{k_n} \left[\frac{\bar{u}_{TB}(k_n)}{F(k_n)} r^{-1/2} J_{3/2}(k_n r) \cos w_n t \right] \quad (20a)$$

$$\text{其中 } \bar{u}_{TB}(k_n) = H[r^{3/2}] = \sqrt{\frac{2}{2k_n}} \cdot \frac{1}{k_n} \left\{ \left(\frac{3}{k_n^2} - b^2 \right) \sin(k_n b) - \frac{3b}{k_n} \cos(k_n b) \right\} \quad (20b)$$

将式 (20) 代入式 (2), 并利用贝塞尔函数的一些性质, 我们可得相应的热弹性动应力的精确表达式为

$$\sigma_r = \alpha E T_0 \sum_{k_n} \frac{\bar{u}_{TB}}{F(k_n)} \left[\frac{1}{3(2\nu - 1)} k_n r^{-1/2} J_{1/2}(k_n r) + \frac{2}{3(1 + \nu)} k_n r^{-1/2} J_{5/2}(k_n r) \right] \cos w_n t \quad (21a)$$

$$\sigma_\psi = \sigma_\theta = \alpha E T_0 \sum_{k_n} \frac{\bar{u}_{TB}}{F(k_n)} \left[\frac{1}{3(2\nu - 1)} k_n r^{-1/2} J_{1/2}(k_n r) - \frac{1}{3(1 + \nu)} k_n r^{-1/2} J_{5/2}(k_n r) \right] \cos w_n t \quad (21b)$$

由贝塞尔函数的性质, 可知下式成立. 即

$$\left[r^{-1/2} J_{1/2}(k_n r) \right]_{r=0} = 1, \quad \left[r^{-1/2} J_{5/2}(k_n r) \right]_{r=0} = 0 \quad (22)$$

利用式 (22), 由式 (21) 可知在球心 $r = 0$ 处的热动应力并不存在奇异性, 而是有限值. 并且有, $\sigma_r(0, t) = \sigma_\theta(0, t)$, 表明球体圆心 $r = 0$ 的一点处径向热动应力等于切向热动应力. 这是因为在球体 $r = 0$ 的圆心处径向和切向的几何量是相同的.

在实际计算中, 我们取球体的材料常数为 $\lambda = \mu = 80 \text{ GPa}$, $C_L = 5000 \text{ m/s}$. 采用一些无量纲的变量 $\tau = t \cdot C_L / b$, $R = r / b$, $\bar{\sigma}_i = \sigma_i / \alpha E T_0$.

图 1 和图 2 分别表示球体的热动应力的响应和分布. 从图中, 我们可以看到, 当球体内温度在瞬间发生突然均匀变化时, 球体内各点将同时呈现动应力. 热应力波在球体的外边界将发生反射, 产生的反射波向球体的圆心处传播. 反射波经过球体各点时使得该点的动应力呈现周期性地激烈振荡. 这一现象与 [1] 相类似.

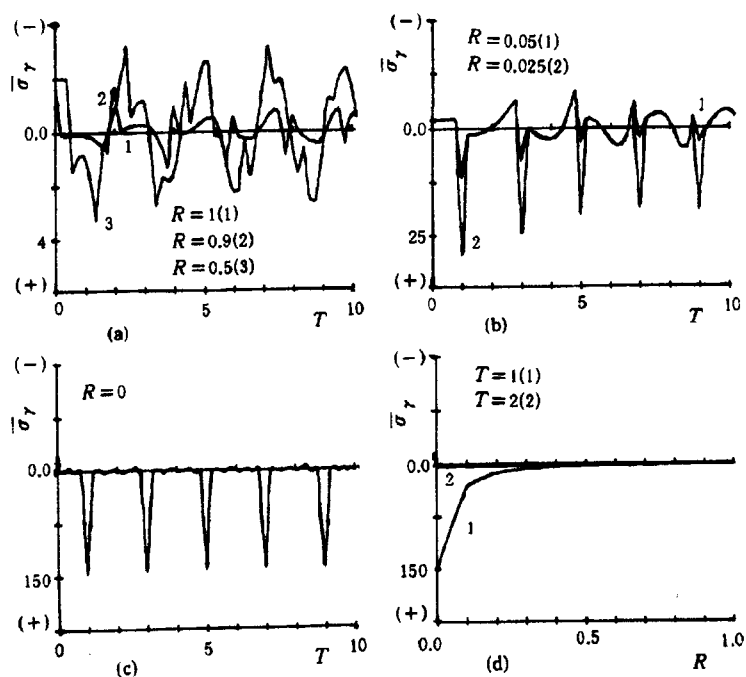


图 1 在热冲击作用下球体的径向动应力响应历程和分布规律
Fig.1 Histories and distributions of radial dynamic stresses
in a solid sphere under thermal shock

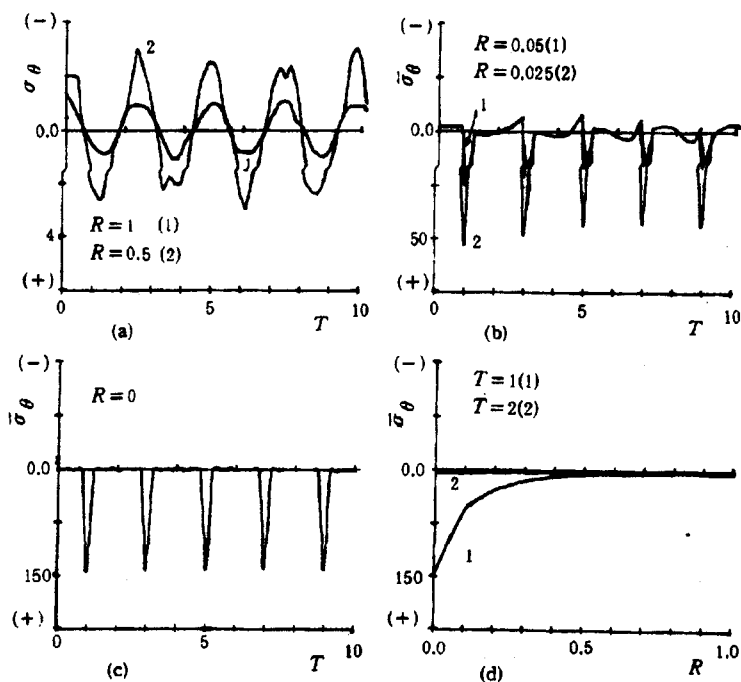


图 2 在热冲击作用下球体的切向动应力响应历程和分布规律
Fig.2 Histories and distributions of tangential dynamic stresses
in a solid sphere under thermal shock

从图 1c 和图 2c 可以发现在圆心 $r = 0$ 处的动应力具有应力集中现象, 其应力峰值很高. 这种现象的物理解释为: 当球体内热应力波波头在圆心处相聚一点时发生碰撞, 由此产生很高动应力峰值, 但这种峰值是有限值而不是奇异的, 并且随着应力波在球体外边界不断反射而和球体内其它各点动应力一样产生激烈的周期振荡.

[1] 的结果是球体圆心处的动应力是光滑的且随着时间 t^* 趋于无穷而无限增大.

图 1d 和图 2d 表示径向动应力和切向动应力在不同时间 τ 时的径向分布规律. 从图中可以看, 当热应力波波头在球体圆心处 ($\tau = 1$) 时, 圆心处的动应力呈现很高的峰值, 当波头不在圆心处 ($\tau = 2$) 时, 球体内分布的动应力值非常低 (曲线 2).

参 考 文 献

- [1] Hata T. *ASME J. Appl. Mech.*, 1991, 58:58-63
- [2] Tsui T. Kraus H. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1965, 4:730-737
- [3] Zaker TA. *Proc. 5th U.S.Nat. Cong. Appl. Mech.*, 1966:183
- [4] Zaker TA. *Quart. Appl. Math.*, 1968, 26:503
- [5] Hata T. *ASME J. Appl. Mech.*, 1991, 58:64-69
- [6] Pao YH and Ceranoglu AN. *ASME J. Appl. Mech.*, 1978, 45:114-122
- [7] Cinelli G. *Int. J. Engng. Sci.*, 1965, 3:539-559

DYNAMIC STRESSES AND DYNAMIC STRESS-FOCUSING EFFECT IN A SOLID SPHERE UNDER THERMAL SHOCK

Wang Xi

(*Department of Applied Mechanics, East China Institute of Technology, Nanjing 210014, China*)

Abstract This paper presents a simple analytical method solving the dynamic stress response in a solid sphere under thermal shock. From analytical expressions and calculating results we can observe that there is concentration of the dynamic stress at the center of a solid sphere and periodical oscillation due to the continual reflection of stress wave at the external boundary of the solid sphere.

Key words thermal shock, solid sphere, dynamic stress-concentration