

三维断裂力学的超奇异积分方程方法¹⁾

汤任基 秦太验

(上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

摘要 本文利用有限部积分的概念和方法, 严格地证明了三维弹性体中受任意载荷作用的平片裂纹问题的超奇异积分方程组, 并对未知解的性态作了理论分析, 得到了性态指数, 在此基础上通过主部分析, 精确地求得了裂纹前沿光滑点附近的奇性应力场, 从而找到了以裂纹面位移间断(位错)表示的应力强度因子表达式, 最后对所得的超奇异积分方程组建立了数值法, 并用此计算了若干典型的平片裂纹问题, 数值结果令人满意。

关键词 三维断裂力学, 超奇异积分方程, 性态分析, 应力强度因子

一、引 言

超奇异积分方程方法是由希腊学者 Iaokimidis^[1] 首先引入断裂力学的。他使用有限部积分的概念和方法, 从理论上严格推导并证明了受法向载荷作用的二维和三维 I 型裂纹的超奇异积分方程(组)。指出此种方程(组)可使用 Kutt^[2] 建立的求积公式进行数值计算。随后, 日本学者 Takakuda^[3] 使用边界积分方程方法进一步给出了三维平片裂纹受一般载荷作用的超奇异积分方程组, 但对方程组的正确性他未作证明。由于平片裂纹问题的超奇异积分方程(组)是用裂纹面的位移间断(位错)作为基本未知函数进行求解的, 所以它要比主值型奇异积分方程(组)^[4] 使用位错密度函数进行求解更为方便。此时方程组的耦合度小, 数值计算容易实现, 因此这种方法已受到许多学者的重视。最近, Erdogan^[5] 已将超奇异积分方程方法用于平面和反平面断裂力学问题, 并系统地为其建立了数值法。指出对于韧带很小的深裂纹问题, 超奇异积分方程方法可获得主值型奇异积分方程方法无法获得的高精度结果。在三维断裂力学方面, Takakuda^[3] 和 Sohn^[6] 等已使用超奇异积分方程方法数值求解了 I 型圆形裂纹和椭圆形裂纹问题, 得到的数值结果要比 Bui^[4] 用主值型奇异积分方程求得的好许多。对于 II、III 型平片裂纹问题, 则由于超奇异积分方程组的相互耦合, 数值求解要比 I 型情形复杂得多, 因而至今还未解决。本文的目的是利用有限部积分的概念和方法及文 [7] 的结果, 严格地证明受一般载荷作用的三维平片裂纹问题的超奇异积分方程组, 在此基础上系统研究此组方程的求解理论, 然后与常规的边界元法结合, 统一地为其建立数值法, 并用此解决若干典型的平片裂纹问题。

¹⁾ 国家教委博士点基金资助项目。

本文于 1992 年 5 月 19 日收到第一稿, 1993 年 2 月 4 日收到修改稿。

二、三维平片裂纹的超奇异积分方程组

设在三维无限弹性体中有一如图 1 所示的任意形状的平片裂纹 $S(S^\pm)$. 在裂纹的上表面 S^+ 放置一直角坐标系 $X_i (i=1, 2, 3)$, 并使 x_3 与 S^+ 垂直, 则当裂纹上下表面作用自相平衡的一般外应力矢分量 $p_i(x_1, x_2) (i=1, 2, 3)$ 时, 此裂纹问题便归为解以下一组微分积分方程^[7]

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \int_{S^+} \frac{(1-\nu)\tilde{u}_1(\xi_1, \xi_2)}{r} d\xi_1 d\xi_2 \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int_{S^+} \frac{\nu\tilde{u}_1(\xi_1, \xi_2)}{r} d\xi_1 d\xi_2 \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_{S^+} \frac{\nu\tilde{u}_2(\xi_1, \xi_2)}{r} d\xi_1 d\xi_2 \\ & = -\frac{4\pi(1-\nu)}{\mu} p_1(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

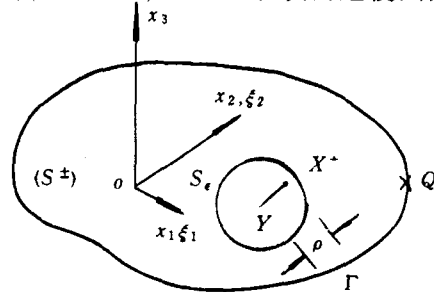


图 1

Fig.1

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \int_{S^+} \frac{(1-\nu)\tilde{u}_2(\xi_1, \xi_2)}{r} d\xi_1 d\xi_2 \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \int_{S^+} \frac{\nu\tilde{u}_2(\xi_1, \xi_2)}{r} d\xi_1 d\xi_2 \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_{S^+} \frac{\nu\tilde{u}_1(\xi_1, \xi_2)}{r} d\xi_1 d\xi_2 = -\frac{4\pi(1-\nu)}{\mu} p_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\nabla^2 \int_{S^+} \frac{\tilde{u}_3(\xi_1, \xi_2)}{r} d\xi_1 d\xi_2 = -\frac{4\pi(1-\nu)}{\mu} p_3(x_1, x_2) \quad (2.3)$$

式中 ∇^2 为关于变数 (x_1, x_2) 的平面调和算子, $\tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2) = u_i^+(\xi_1, \xi_2) - u_i^-(\xi_1, \xi_2)$ 为平片裂纹 S 上下表面的位移间断 (位错), r 为裂纹面 S^+ 上参考点 (x_1, x_2) 与积分点 (ξ_1, ξ_2) 间的距离

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2} \quad (2.4)$$

μ 为剪切弹性模量, ν 为泊松比. 若使用以下极限运算

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int_{S^+} \frac{\tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2)}{r} d\xi_1 d\xi_2 = -\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \epsilon \rightarrow 0}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \left[\int_{S^+} \frac{x_1 - \xi_1}{r^3} \tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{S_\epsilon} \frac{x_1 - \xi_1}{r^3} \tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] + \tilde{u}_i(x_1, x_2) \int_{S_\epsilon} \frac{x_1 - \xi_1}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

式中 S_ϵ 为以 $Y(y_1, y_2)$ 点为中心, 半径为 ϵ 的微小邻域, ρ 为 Y 点与参考点 $X^+(x_1, x_2)$ 间的距离: $\rho = |Y - X^+| < \epsilon$, 则在使用超奇异积分的有限部积分概念后^[2], 以上方程便化为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int_{S^+} \frac{\tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2)}{r} d\xi_1 d\xi_2 = -\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left\{ \oint_{S^+} \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(x_1 - \xi_1)^2}{r^5} \right] \tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right. \\ & + \frac{\partial \tilde{u}_i(x_1, x_2)}{\partial x_1} \oint_{S_\epsilon} \frac{x_1 - \xi_1}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 + \tilde{u}_i(x_1, x_2) \oint_{S_\epsilon} \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(x_1 - \xi_1)^2}{r^5} \right] d\xi_1 d\xi_2 \\ & \left. - \frac{\partial \tilde{u}_i(x_1, x_2)}{\partial x_1} \oint_{S_\epsilon} \frac{x_1 - \xi_1}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 - \tilde{u}_i(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \oint_{S_\epsilon} \frac{x_1 - \xi_1}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

式中 $\oint$ 和 $\int$ 分别为有限部积分和主值型积分的算子^[2]. 再使用以下结果^[1]

$$\frac{1}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{S_\epsilon} \frac{1}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{S_\epsilon} \frac{(x_1 - \xi_1)^2}{r^5} d\xi_1 d\xi_2 = - \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{S_\epsilon} \frac{x_1 - \xi_1}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 = - \frac{\pi}{\epsilon} \quad (2.7)$$

则 (2.5) 求导积分便化为以下超奇异积分

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int_{S^+} \frac{\tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2)}{r} d\xi_1 d\xi_2 = - \oint_{S^+} \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(x_1 - \xi_1)^2}{r^5} \right] \tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.8)$$

同理可得

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \int_{S^+} \frac{\tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2)}{r} d\xi_1 d\xi_2 = - \oint_{S^+} \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(x_2 - \xi_2)^2}{r^5} \right] \tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_{S^+} \frac{\tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2)}{r} d\xi_1 d\xi_2 = \oint_{S^+} \frac{3(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{r^5} \tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.10)$$

将 (2.8—2.10) 代入 (2.1—2.3), 便得平片裂纹在一般载荷作用下的超奇异积分方程组为

$$\begin{aligned} & \oint_{S^+} \left[\frac{(1-2\nu)\tilde{u}_1(\xi_1, \xi_2)}{r^3} + \frac{3\nu(x_1 - \xi_1)^2 \tilde{u}_1(\xi_1, \xi_2)}{r^5} \right. \\ & \quad \left. + \frac{3\nu(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) \tilde{u}_2(\xi_1, \xi_2)}{r^5} \right] d\xi_1 d\xi_2 \\ & = - \frac{4\pi(1-\nu)}{\mu} p_1(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} & \oint_{S^+} \left[\frac{(1-2\nu)\tilde{u}_2(\xi_1, \xi_2)}{r^3} + \frac{3\nu(x_2 - \xi_2)^2 \tilde{u}_2(\xi_1, \xi_2)}{r^5} \right. \\ & \quad \left. + \frac{3\nu(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) \tilde{u}_1(\xi_1, \xi_2)}{r^5} \right] d\xi_1 d\xi_2 \\ & = - \frac{4\pi(1-\nu)}{\mu} p_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\oint_{S^+} \frac{\tilde{u}_3(\xi_1, \xi_2)}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 = - \frac{4\pi(1-\nu)}{\mu} p_3(x_1, x_2) \quad (2.13)$$

由以上方程组可知, (2.11) 和 (2.12) 是耦合的, 它们与 II、III 型断裂有关, 而 (2.13) 则只与 I 型断裂有关, 因而前者的断值求解要比后者更为困难.

三、积分方程未知解的性态分析

若在裂纹前沿 Γ 的光滑点 Q 引入如图 2 所示的局部自然坐标 $(n, z, m) := (x_1, x_2, x_3)$, 然后以 Q 点为中心在密切面 (Q, n, z) 内作一以充分小正数 ϵ 为半径的扇形邻域 S_ϵ , 则积分方程组 (2.11—2.13) 在此邻域上的主部应满足有界的条件, 即成立

$$\begin{aligned} & \int_{S_\epsilon} \left[\frac{(1-2\nu)\tilde{u}_1(\xi_1, \xi_2)}{r^3} + \frac{3\nu(x_1 - \xi_1)^2 \tilde{u}_1(\xi_1, \xi_2)}{r^5} \right. \\ & \quad \left. + \frac{3\nu(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) \tilde{u}_2(\xi_1, \xi_2)}{r^5} \right] d\xi_1 d\xi_2 = R_1(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\int_{S_e} \left[\frac{3\nu(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)\tilde{u}_1(\xi_1, \xi_2)}{r^5} + \frac{(1 - 2\nu)\tilde{u}_2(\xi_1, \xi_2)}{r^3} + \frac{3\nu(x_2 - \xi_2)^2\tilde{u}_2(\xi_1, \xi_2)}{r^5} \right] d\xi_1 d\xi_2 = R_2(x_1, x_2) \quad (3.2)$$

$$\int_{S_e} \frac{\tilde{u}_3(\xi_1, \xi_2)}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 = R_3(x_1, x_2) \quad (3.3)$$

式中 $R_i(x_1, x_2)$ 为关于变数 (x_1, x_2) 的有界函数, $\tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2)$ 为 Q 点扇形邻域 S_e 上的位移间断. 根据弹性理论^[8], Q 点附近的位移可在平行于该点法平面 (Q, n, m) 内分解为平面应变和反平面两个问题的位移场迭加, 因此 $\tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2)$ 可表为仅与变数 ξ_1 有关的如下函数

$$\tilde{u}_1(\xi_1, \xi_2) = A(Q)\xi_1^{\alpha_1} \quad (3.4)$$

$$\tilde{u}_2(\xi_1, \xi_2) = B(Q)\xi_1^{\alpha_2} \quad (3.5)$$

$$\tilde{u}_3(\xi_1, \xi_2) = C(Q)\xi_1^{\alpha_3} \quad (3.6)$$

式中 $A(Q)$ 、 $B(Q)$ 和 $C(Q)$ 为与 Q 点位置有关的常数, α_i 为未知解 $\tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2)$ 的性态指数, 应在 $0 < \alpha_i < 1$ 范围内取值. 将 (3.4—3.6) 代入 (3.1—3.3) 方程, 则当 ε 趋于零时它们便化为以下一些无穷积分并精确地求得为

$$\oint_{S_e} \frac{\tilde{u}_1(\xi_1, \xi_2)}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 = x_1^{\alpha_1-1} A(Q) \oint_0^\infty \eta^{\alpha_1} d\eta \oint_{-\infty}^\infty \frac{dt}{[(1-\eta)^2 + (\operatorname{tg}\psi - t)^2]^{3/2}} = -2x_1^{\alpha_1-1} A(Q) \pi \operatorname{ctg}\pi\alpha_1 \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \oint_{S_e} \frac{(x_1 - \xi_1)^2 \tilde{u}_1(\xi_1, \xi_2)}{r^5} d\xi_1 d\xi_2 &= x_1^{\alpha_1-1} A(Q) \oint_0^\infty (1-\eta)^2 \eta^{\alpha_1} d\eta \oint_{-\infty}^\infty \frac{dt}{[(1-\eta)^2 + (\operatorname{tg}\psi - t)^2]^{5/2}} \\ &= -\frac{4}{3} x_1^{\alpha_1-1} A(Q) \pi \operatorname{ctg}\pi\alpha_1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \oint_{S_e} \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) \tilde{u}_2(\xi_1, \xi_2)}{r^5} d\xi_1 d\xi_2 &= \oint_{S_e} \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) \tilde{u}_1(\xi_1, \xi_2)}{r^5} d\xi_1 d\xi_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \oint_{S_e} \frac{(x_2 - \xi_2)^2 \tilde{u}_2(\xi_1, \xi_2)}{r^5} d\xi_1 d\xi_2 &= x_1^{\alpha_2-1} B(Q) \oint_0^\infty \eta^{\alpha_2} d\eta \oint_{-\infty}^\infty \frac{(\operatorname{tg}\psi - t)^2 dt}{[(1-\eta)^2 + (\operatorname{tg}\psi - t)^2]^{5/2}} \\ &= -\frac{2}{3} x_1^{\alpha_2-1} B(Q) \pi \operatorname{ctg}\pi\alpha_2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

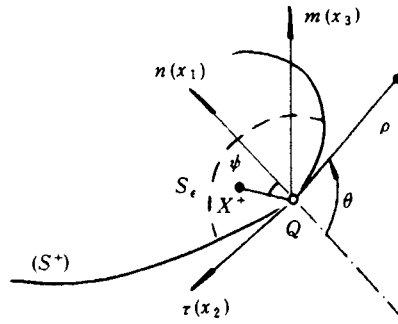


图 2

Fig.2

同理可得

$$\oint_{S_e} \frac{\tilde{u}_2(\xi_1, \xi_2)}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 = -2x_1^{\alpha_2-1} B(Q) \pi \operatorname{ctg} \pi \alpha_2 \quad (3.11)$$

$$\oint_{S_e} \frac{\tilde{u}_3(\xi_1, \xi_2)}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 = -2x_1^{\alpha_3-1} C(Q) \pi \operatorname{ctg} \pi \alpha_3 \quad (3.12)$$

将以上结果代入主部方程 (3.1—3.3) 等式左边, 然后依次乘因子 $x_1^{1-\alpha_1}$ 、 $x_1^{1-\alpha_2}$ 、 $x_1^{1-\alpha_3}$, 并在保持 $\operatorname{tg} \psi$ 不变下取极限 $\lim x_1 \rightarrow 0$, 则得以下齐次方程

$$A(Q) \operatorname{ctg} \pi \alpha_1 = B(Q) \operatorname{ctg} \pi \alpha_2 = C(Q) \operatorname{ctg} \pi \alpha_3 = 0 \quad (3.13)$$

由于系数 $A(Q)$ 、 $B(Q)$ 和 $C(Q)$ 一般不为零, 因而得未知解 $\tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2)$ 的性态指数为 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/2$, 于是裂纹面的位移间断在 Q 点附近具有如下形式

$$\tilde{u}_1(\xi_1, \xi_2) = A(Q) \xi_1^{1/2} \quad (3.14)$$

$$\tilde{u}_2(\xi_1, \xi_2) = B(Q) \xi_1^{1/2} \quad (3.15)$$

$$\tilde{u}_3(\xi_1, \xi_2) = C(Q) \xi_1^{1/2} \quad (3.16)$$

四、平片裂纹前沿的奇性应力场分析

对于图 1 所示的三维裂纹体, 其内任一内点 $X(x_1, x_2, x_3)$ 的应力由以下公式给出 [9]

$$\sigma_{ij}(X) = - \int_{S^+} S_{ijk}(\xi, X) \tilde{u}_k(\xi) dS(\xi) \quad (4.1)$$

式中 $\xi(\xi_1, \xi_2)$ 为裂纹面 S 上的积分点, S_{ijk} 为

$$\begin{aligned} S_{ijk}(\xi, X) = & \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r^3} \{ -3r_{,3}[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - 5r_{,i}r_{,j}r_{,k}) \\ & - 3\nu(r_{,i}r_{,k}\delta_{3j} + r_{,j}r_{,k}\delta_{3i}) - (1-2\nu)(\delta_{ik}\delta_{3j} + \delta_{jk}\delta_{3i} + 3r_{,i}r_{,j}\delta_{3k}) \\ & + (1-4\nu)\delta_{ij}\delta_{3k} \} \end{aligned} \quad (4.2)$$

以上公式中 $r = |X - \xi|$, $r_{,i} = \partial r / \partial x_i$.

为了精确求得裂纹前沿 Q 点附近任一内点 $X(x_1, x_2, x_3)$ 的奇性应力场分布规律, 则只需对方程 (4.1) 右边的积分作渐近分析即可求得, 这里仅以 σ_{33} 、 σ_{31} 和 σ_{32} 三种应力为例说明本文的分析方法. 若使用图 2 的局部自然坐标, 则它们由以下关于 S_e 邻域的积分求得

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) = & \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \int_{S_e} \frac{1}{r^3} \left\{ \left(1 + \frac{6x_3^2}{r^2} - \frac{15x_3^4}{r^4} \right) \tilde{u}_3 + \frac{3x_3}{r} \left(1 - \frac{5x_3^2}{r^2} \right) \right. \\ & \cdot \left[\frac{(x_1 - \xi_1)}{r} \tilde{u}_1 + \frac{(x_2 - \xi_2)}{r} \tilde{u}_2 \right] \left. \right\} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{31}(x_1, x_2, x_3) = & \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \int_{S_e} \frac{1}{r^3} \left\{ \frac{3(x_1 - \xi_1)x_3}{r^2} \left(1 - \frac{5x_3^2}{r^2}\right) \tilde{u}_3 \right. \\ & + \left[(1-2\nu) + \frac{3(x_1 - \xi_1)^2}{r^2} \left(\nu - \frac{5x_3^2}{r^2}\right) + \frac{3Dx_3^2}{r^2} \right] \tilde{u}_1 \\ & \left. + \frac{3(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{r^2} \left(\nu - \frac{5x_3^2}{r^2}\right) \tilde{u}_2 \right\} d\xi_1 d\xi_2\end{aligned}\quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{32}(x_1, x_2, x_3) = & \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \int_{S_e} \frac{1}{r^3} \left\{ \frac{3(x_2 - \xi_2)x_3}{r^2} \left(1 - \frac{5x_3^2}{r^2}\right) \tilde{u}_3 \right. \\ & + \frac{3(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{r^2} \left(\nu - \frac{5x_3^2}{r^2}\right) \tilde{u}_1 + \left[(1-2\nu) \right. \\ & \left. + \frac{3(x_2 - \xi_2)^2}{r^2} \left(\nu - \frac{5x_3^2}{r^2}\right) + \frac{3\nu x_3^2}{r^2} \right] \tilde{u}_2 \left. \right\} d\xi_1 d\xi_2\end{aligned}\quad (4.5)$$

若在图 2 的法平面 (Q, n, m) 上再引入以负主法线轴 Qn 为极轴的极坐标 (ρ, θ) , 则

$$x_1 = -\rho \cos \theta, \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = \rho \sin \theta \quad (4.6)$$

$$r = \sqrt{(\rho \cos \theta + \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (\rho \sin \theta)^2} \quad (4.7)$$

将以上结果代入 (4.3—4.5), 并注意到 $\tilde{u}_i$ 在 S_e 中可表为 (3.14—3.16) 的形式, 则以上奇性应力表达式中的各项积分, 可仿上节的方法均可化为无穷积分而精确求出, 对于 σ_{33} 中的各项积分则为

$$\int_{S_e} \frac{\tilde{u}_3}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{2\pi C(Q)}{\sqrt{2\rho}\sqrt{1+\cos\theta}} \quad (4.8)$$

$$\int_{S_e} \frac{x_3^2 \tilde{u}_3}{r^5} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{\pi C(Q) \sin^2 \theta}{3\sqrt{2\rho}(1+\cos\theta)^{3/2}} \quad (4.9)$$

$$\int_{S_e} \frac{x_3^4 \tilde{u}_3}{r^7} d\xi_1 d\xi_2 = -\frac{\pi C(\theta)(5+2\cos\theta)\sin^4\theta}{30\sqrt{2\rho}(1+\cos\theta)^{5/2}} \quad (4.10)$$

$$\int_{S_e} \frac{x_3(x_1 - \xi_1)\tilde{u}_1}{r^5} d\xi_1 d\xi_2 = -\frac{2\pi A(Q) \sin \theta}{3\sqrt{2\rho}\sqrt{1+\cos\theta}} \quad (4.11)$$

$$\int_{S_e} \frac{x_3^3(x_1 - \xi_1)\tilde{u}_1}{r^7} d\xi_1 d\xi_2 = -\frac{\pi A(Q)(3+2\cos\theta)\sin^3\theta}{30\sqrt{2\rho}(1+\cos\theta)^{3/2}} \quad (4.12)$$

$$\int_{S_e} \frac{x_3(x_2 - \xi_2)}{r^5} \left(1 - \frac{5x_3^2}{r^2}\right) \tilde{u}_2 d\xi_1 d\xi_2 = 0 \quad (4.13)$$

将以上结果代入 (4.3), 即得 σ_{33} 在 Q 点附近的奇性应力为

$$\sigma_{33}(X) = \frac{\mu}{4(1-\nu)\sqrt{\rho}} \left[C(Q) \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + A(Q) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (4.14)$$

同理得另两个奇性应力为

$$\begin{aligned}\sigma_{31}(X) = & \frac{\mu}{4(1-\nu)\sqrt{\rho}} \left[-C(Q) \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right. \\ & \left. + A(Q) \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \right]\end{aligned}\quad (4.15)$$

$$\sigma_{32}(X) = \frac{\mu}{4\sqrt{\rho}} B(Q) \cos \frac{\theta}{2} \quad (4.16)$$

以上结果与 Hartranft 和 Sih^[10] 使用 Williams 特征展开法得到的完全一致, 这表明本文的积分方程主部分析法是正确的, 此外, 本文的上述方法, 还提供了从积分方程(组)直接计算奇性应力系数 $A(Q)$ 、 $B(Q)$ 和 $C(Q)$ 的途径, 从而可定量地完全决定裂纹前沿的奇性应力, 这是 Williams 特征展开法没有解决的.

利用以上得到的奇性应力 (4.14—4.16) 又裂纹前沿位移间断的公式 (3.14—3.16), 便得用裂纹面位移间断计算应力强度因子的表达式

$$K_I(Q) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \sqrt{2\rho} \sigma_{33}(X) = \frac{2\mu}{4(1-\nu)} \lim_{\xi_1 \rightarrow 0} \frac{\tilde{u}_3(\xi_1, 0)}{\sqrt{2\xi_1}} \quad (4.17)$$

$$K_{II}(Q) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \sqrt{2\rho} \sigma_{31}(X) = \frac{2\mu}{4(1-\nu)} \lim_{\xi_1 \rightarrow 0} \frac{\tilde{u}_1(\xi_1, 0)}{\sqrt{2\xi_1}} \quad (4.18)$$

$$K_{III}(Q) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \sqrt{2\rho} \sigma_{32}(X) = \frac{\mu}{2} \lim_{\xi_1 \rightarrow 0} \frac{\tilde{u}_2(\xi_1, 0)}{\sqrt{2\xi_1}} \quad (4.19)$$

对于裂纹前沿的角点, 则可用一光滑曲线近似代替, 但由于该点邻域中的位移间断恒为零, 故此点的应力强度因子可取为零.

五、超奇异积分方程组的数值法

以上得到的超奇异积分方程组 (2.11—2.13), 可使用有限部积分与边界元结合的方法进行数值求解, 对于 I 型平片裂纹的超奇异积分方程 (2.13), 文 [6] 已用了此种方法, 本文将此法推广, 统一地建立受一般载荷作用的平片裂纹问题的超奇异积分方程组的数值法. 将裂纹面 S^+ 按图 3(a) 的格式离散为 M 个三角形单元 $e_m = \Delta_{pqr}$ ($m = 1, 2, \dots, M$), 其上的总结点数为 N . 然后使用普通的边界元方法^[9], 将超奇异积分方程组 (2.11—2.13) 在 S^+ 的每个结点 l (亦称参考结点) 建立结点方程, 则此方程组便化为以下线代数方程组

$$\sum_{m=1}^N A_{1lm} \tilde{u}_{1m} + \sum_{m=1}^N B_{1lm} \tilde{u}_{2m} = -\frac{4\pi(1-\nu)}{\mu} p_{1l} \quad (5.1)$$

$$\sum_{m=1}^N A_{2lm} \tilde{u}_{1m} + \sum_{m=1}^N B_{2lm} \tilde{u}_{2m} = -\frac{4\pi(1-\nu)}{\mu} p_{2l} \quad (5.2)$$

$$\sum_{m=1}^N C_{lm} \tilde{u}_{3m} = -\frac{4\pi(1-\nu)}{\mu} p_{3l} \quad (5.3)$$

式中标识 l 附于参考结点, 因此它的取值范围为 $l = 1, 2, \dots, N$, $\tilde{u}_{im}$ 为裂纹面的位移间断 $\tilde{u}_i$ 在结点 m 上的值, p_{il} 为裂纹面 S^+ 的载荷 p_i 在参考结点 l 上的值, $A_{\alpha lm}$ 、 $B_{\alpha lm}$ 及 C_{lm} ($\alpha = 1, 2$) 为关于结点 l 的系数矩阵, 它们可按边界元方法计算得到, 下面扼要说明这些系数的计算. 对于图 3(a) 的离散格式, 超奇异积分方程组 (2.11—2.13)

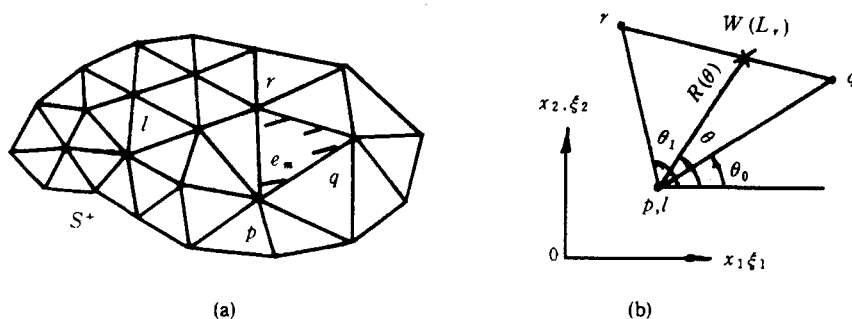


图 3

Fig.3

在参考结点 l 的结点方程为

$$\sum_{e_m} \oint_{e_m} \frac{1}{r^3} [(1-2\nu)\delta_{1\beta} + 3\nu r_{,1} r_{,\beta}] \tilde{u}_\beta(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = -\frac{4\pi(1-\nu)}{\mu} p_{1l} \quad (5.4)$$

$$\sum_{e_m} \oint_{e_m} \frac{1}{r^3} [(1-2\nu)\delta_{2\beta} + 3\nu r_{,2} r_{,\beta}] \tilde{u}_\beta(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = -\frac{4\pi(1-\nu)}{\mu} p_{2l} \quad (5.5)$$

$$\sum_{e_m} \oint_{e_m} \frac{1}{r^3} \tilde{u}_3(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = -\frac{4\pi(1-\nu)}{\mu} p_{3l} \quad (5.6)$$

式中指标 $\beta = 1, 2$, r 为参考结点至积分点 $\xi(\xi_1, \xi_2)$ 间的距离. 若使用线性单元, 则 $e_m = \Delta_{pqr}$ 单元上的位移间断 $\tilde{u}_i$ 可用其结点位移间断 ($\tilde{u}_{ip}, \tilde{u}_{iq}, \tilde{u}_{ir}$) 及单元面积坐标 (L_p, L_q, L_r) 表为

$$\tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2) = \tilde{u}_{ip} L_p + \tilde{u}_{iq} L_q + \tilde{u}_{ir} L_r \quad (5.7)$$

用以上位移间断代入 (5.4—5.6), 然后对所有单元 $e_m (m = 1, 2, \dots, M)$ 进行积分, 并按结点位移间断进行归并, 便可自然地获得 (5.1—5.3) 方程组的系数矩阵 $A_{\alpha lm}$ 、 $B_{\alpha lm}$ 及 C_{lm} . 在对各单元 e_m 积分时, (5.4—5.6) 中的积分有两类, 一类是参考结点 l 不在积分的单元, 则此积分是普通的正常积分, 它可使用 Hammer 数值积分公式进行计算^[11], 另一类是参考结点在积分的单元上, 则此类积分是二维超奇异积分, 它可使用图 3(b) 的局部极坐标 (r, θ) 按 Ioakimidis 方法^[1] 将其化为关于 r 的一维超奇异积分, 然后使用有限部积分方法将其变为正常积分, 即

$$\begin{aligned} & \oint_{e_m} \frac{1}{r^3} [(1-2\nu)\delta_{1\beta} + 3\nu r_{,1} r_{,\beta}] \tilde{u}_\beta(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= -2\Delta_m \int_0^1 \frac{[(1-2\nu) + 3\nu \cos^2 \theta] \tilde{u}_{1p} + 3\nu \sin \theta \cos \theta \tilde{u}_{2p}}{R^3(\theta)} dL_r \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} & \oint_{e_m} \frac{1}{r^3} [(1-2\nu)\delta_{2\beta} + 3\nu r_{,2} r_{,\beta}] \tilde{u}_\beta(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= -2\Delta_m \int_0^1 \frac{3\nu \cos \theta \sin \theta \tilde{u}_{1p} + [(1-2\nu) + 3\nu \sin^2 \theta] \tilde{u}_{2p}}{R^3(\theta)} dL_r \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\oint_{e_m} \frac{1}{r^3} \tilde{u}_3(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = -2\Delta_m \int_0^1 \frac{\tilde{u}_{3p}}{R^3(\theta)} dL_r \quad (5.10)$$

式中 Δ_m 为三角形单元 e_m 的面积, $R(\theta)$ 为积分线 $\bar{qr}$ 上积分点 $W(L_r)$ 至参考点 l (即 p 结点) 间的距离. 总结以上, 现在只需利用以上正常积分 (5.8—5.10) 完成方程组 (5.4—5.6) 中的全部单元积分, 便自然地求得 (5.1—5.3) 线代数方程组的全部系数. 再解此组方程, 即得 S^+ 上各结点位移间断 $\tilde{u}_{1m}$, $\tilde{u}_{2m}$ 及 $\tilde{u}_{3m}$. 将它们回代入 (5.7), 便近似求得 S^+ 的位移间断. 于是裂纹前沿的奇性应力及应力强度因子便由 (4.14—4.16) 及 (4.17—4.19) 方程求得. 这样图 1 平片裂纹问题获得解决. 最后指出, 以上是将 S^+ 离散为三角单元进行分析的. 在本文的算例中, 还将 S^+ 离散为一些四边形单元或四边形与三角形两种单元的结合, 对于这几种情形的数值法, 则可仿三角形单元的情形类似地建立, 限于篇幅, 这里不再具体介绍.

六、数 值 例 子

为了验证本文的方法, 这里作了若干数值例子的计算.

例 1 椭圆平片裂纹问题. 无限体中单个椭圆平片裂纹如图 4 所示, 当裂纹面上作用 I 型均匀法向载荷 $p_3(x, y) = p_0$ 时, 裂纹前沿 ϕ 角处的应力强度因子由 Kassir^[12] 等获得的精确值为

$$K_I(\phi) = \frac{p_0}{E(k)} \sqrt{\frac{b}{a}} (a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{1/4} \quad (6.1)$$

式中 $E(k)$ 为第二类全椭圆积分, $k = \sqrt{1 - (b/a)^2}$, 此外, 法国学者 Bui^[4] 使用主值型奇异积分方程亦数值计算过这一问题, 图 4 是本文获得的结果与 Kassir 和 Bui 结果的比较, 由图看出, 本文方法的精度明显高于 Bui 的精度.

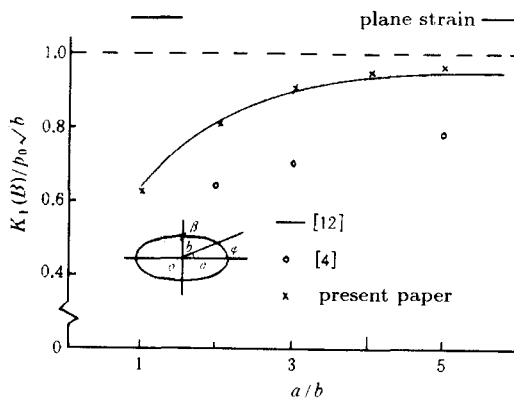


图 4 椭圆平片裂纹 B 点的 I 型应力强度因子

Fig.4 Mode I stress intensity factor at point B for an elliptical plane crack

例 2 矩形平片裂纹问题. 无限体中单个矩形平片裂纹如图 5 和图 6 所示, 当裂纹面上作用 I 型均匀法向载荷 $p_3(x, y) = p_0$ 时, 本文使用超奇异积分方程 (2.13) 数值计算了裂纹前沿 BE 边的无量纲 I 型应力强度因子 $K_I^*(x/a) = K_I(x, b)/(p_0 \sqrt{b})$, 它们随 a/b 和 x/a 的变化见图 5 所示. 若裂纹面上仅受均匀的切向载荷 $p_1(x, y) = q_0$ 作用, 则裂纹处于混合型断裂状态, 本文使用超奇异积分方程组 (2.11—2.12) 联立求解

了 BE 边的 II 型无量纲应力强度因子 $K_{II}^*(BE) = K_{II}(BE)/(q_0\sqrt{b})$ 及 III 型无量纲应力强度因子 $K_{III}^*(BE) = K_{III}(BE)/(q_0\sqrt{b})$, 它们随 x/a 的变化见图 6 所示.

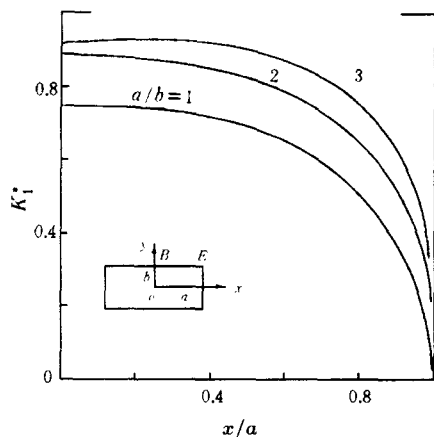


图 5 受法向载荷 p_0 时 BE 边 K_I^* 随 x/a 的变化
Fig.5 Variations of K_I^* with x/a along the side BE under normal load p_0

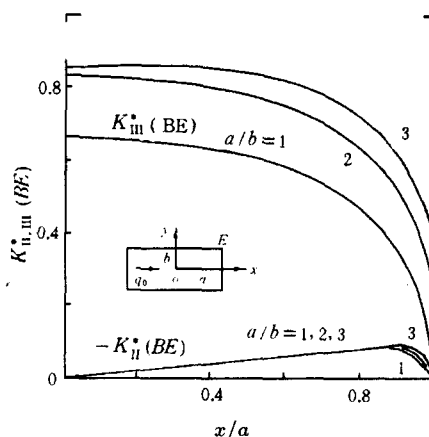


图 6 受切向载荷 q_0 时 BE 边 $K_{II,III}^*$ 随 x/a 的变化
Fig.6 Variations of $K_{II,III}^*$ with x/a along the side BE under shear load q_0

最后指出, 以上结果都是使用超奇异积分方程方法获得的, 它们区别于 Bui^[4] 等的主值型奇异积分方程方法. 本文方法具有计算量小、速度快和精度高的优点, 关于多个平片裂纹的相互影响, 亦可使用本文的方法解决, 这方面的结果将在另文中报导.

参 考 文 献

- [1] Ioakimidis NI. *Acta Mech.*, 1982, 45:31-47
- [2] Kutt HR. *Numer. Math.*, 1975, 24:201-210
- [3] Takakuda K. *Bulletin JSME*, 1985, 28:225-231
- [4] Bui HD. *J. Mech. Phys. Solids*, 1977, 1:29-39
- [5] Kaya AC and Erdogan F. *Quart. Appl. Math.*, 1987, 1:105-122
- [6] Brebbia CA and Maier G. *Boundary Element Vol.2*, Springer-Verlog, 1985
- [7] 汤任基. 上海交通大学学报, 1990, 24:36-46
- [8] Parton VZ and Perlin PI. *Mathematical Methods of the Theory of Elasticity*, Moscow, 1984
- [9] Brebbia CA. *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentch Press, 1978
- [10] Hartranft RJ and Sih GC. *Int. J. Engng Sci.* 1970, 8:711-729
- [11] Zienkiewicz OC. *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1977
- [12] Kassir MK and Sih GC. *J. Appl. Mech.*, 1966, 33:601

METHOD OF HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS IN THREE-DIMENSIONAL FRACTURE MECHANICS

Tang Renji Qin Taiyan

(*Dept. of Eng. Mech., Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China*)

Abstract Using the concepts and method of finite-part integrals, the hypersingular integral equations of a plane crack loaded by arbitrary loads is proved exactly. The behaviour of the unknown solution are analysed theoretically and its indexes are then obtained. Based on these results, the singular stresses near the smooth point of the crack front are exactly derived by use of the dominant analyses. Then the stress intensity factors are expressed in terms of the displacement discontinuities of the crack surface. Finally, the numerical method to solve the hypersingular integral equations is proposed and several typical plane cracks are then calculated. The numerical results are satisfactory.

Key words three-dimensional fracture mechanics, hypersingular integral equations, behaviour analyses, stress intensity factor