

各向异性板应力强度因子的 分区广义变分解法

张 行 崔 德 渝

(北京航空航天大学飞行器设计与应用力学系, 北京 100083)

提要 本文以单边边缘裂纹二维应力场与位移场的级数展开式为基础, 以分区广义变分原理理解含双边非对称边缘裂纹板的应力强度因子. 首先建立精确满足各向异性板基本微分方程和裂纹表面边界条件的应力场和位移场的本征展开式, 然后用分区广义变分原理满足其余边界条件与交界连续条件并由此确定应力强度因子. 在变分方程中只有沿板边界的线积分. 计算程序简单, 输入数据很少, 结果收敛迅速并与已有结果完全吻合, 同时计算节省机时与人力. 本文还给出了有关的全新计算曲线.

关键词 非对称边缘裂纹, 各向异性板, 应力强度因子, 复变 - 分区广义变分解法

一、引 言

目前, 在求解各向异性有限大板应力强度因子方面, 已有边界配置法、有限元法等数值计算方法^[1,2]. 为了消除离散化过程中节点配置或网格划分的不确定性, 进一步提高计算效率、简化数据准备工作, 本文首先建立精确满足所有基本方程和裂纹表面边界条件的应力场与位移场展开式, 然后应用分区广义变分原理以满足板的边界条件与交界连续条件, 确定应力强度因子.

二、边缘裂纹平面问题的一般表达式

按照平面各向异性弹性理论^[3], 应力分量与位移分量可用复变函数 $\varphi(z_1)$ 与 $\psi(z_2)$ 表示如下

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\operatorname{Re}[\mu_1^2 \varphi'(z_1) + \mu_2^2 \psi'(z_2)] \\ \sigma_{yy} &= 2\operatorname{Re}[\varphi'(z_1) + \psi'(z_2)] \\ \sigma_{xy} &= -2\operatorname{Re}[\mu_1 \varphi'(z_1) + \mu_2 \psi'(z_2)] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x &= 2\operatorname{Re}[p_1 \varphi(z_1) + p_2 \psi(z_2)] \\ u_y &= 2\operatorname{Re}[q_1 \varphi(z_1) + q_2 \psi(z_2)] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

本文于 1992 年 5 月 28 日收到第一稿, 1992 年 10 月 21 日收到修改稿.

式中

$$p_K = a_{11}\mu_K^2 + a_{12} - a_{16}\mu_K, \quad q_K = \frac{a_{12}\mu_K^2 + a_{22} - a_{26}\mu_K}{\mu_K} \quad (3)$$

$$z_K = x + \mu_K y = r_K \{ \cos \theta_K + i \sin \theta_K \} \quad (K = 1, 2) \quad (4)$$

这里, μ_K 为以下四次代数方程的两对复根

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (5)$$

对于图 1 所示含边缘裂纹板, 裂纹表面的面力自由边界条件为

$$\theta = \pm\pi, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0 \quad (6)$$

现将函数 $\varphi(z_1)$ 与 $\psi(z_2)$ 分别分为如下两个部分^[4]

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z_1) &= \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_1) \\ \psi(z_2) &= \psi_1(z_2) + \psi_2(z_2) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

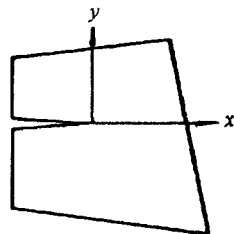


图 1 单边边缘裂纹板
Fig.1 A plate with mono-lateral edge crack

它们分别满足在韧带上 $\sigma_{xy} = 0$ 与 $\sigma_{yy} = 0$ 的条件

$$\mu_1\varphi'_1(\tau) + \mu_2\psi'_1(\tau) = 0, \quad \varphi'_2(\tau) + \psi'_2(\tau) = 0 \quad (8)$$

式中, τ 表示 z_1 与 z_2 在 x 轴上的值.

根据式 (1)、(6)、(7)、(8), 我们有

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_1(z_1) &= \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \{ z_1^{-\frac{1}{2}} f_1(z_1) + g_1(z_1) \}, & \varphi'_2(z_1) &= \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \{ z_1^{-\frac{1}{2}} f_2(z_1) + g_2(z_1) \} \\ \psi'_1(z_2) &= \frac{-\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \{ z_2^{-\frac{1}{2}} f_1(z_2) + g_1(z_2) \}, & \psi'_2(z_2) &= \frac{-1}{\mu_2 - \mu_1} \{ z_2^{-\frac{1}{2}} f_2(z_2) + g_2(z_2) \} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中

$$f_n(z_K) = \sum_{m=0}^M F_{nm} z_K^m, \quad g_n(z_K) = \sum_{m=0}^M G_{nm} z_K^m, \quad n = 1, 2 \quad (10)$$

而且

$$F_{nm} = \overline{F}_{nm}, \quad G_{nm} = -\overline{G}_{nm} \quad (11)$$

令

$$H_m^{(1)} = F_{1m}, \quad H_m^{(2)} = -iG_{1m}, \quad H_m^{(3)} = F_{2m}, \quad H_m^{(4)} = -iG_{2m} \quad (12)$$

则由式 (1)、(2)、(9)、(10), 可得应力与位移分量的级数表达式如下

$$\sigma_{ij} = \sum_{m=0}^M \sum_{l=1}^4 H_m^{(l)} R_{ijm}^{(l)} \quad (13)$$

$$u_i = \sum_{m=0}^M \sum_{l=1}^4 H_m^{(l)} S_{im}^{(l)} \quad (14)$$

式中, $R_{ijm}^{(l)}$ 与 $S_{im}^{(l)}$ 为复坐标 z_K (即 r_K 和 θ_K) 与材料弹性常数的已知函数, $H_m^{(l)}$ 为待定常数.

三、分区广义变分解法

为了分析图 2(a) 所示的含双边非对称边缘裂纹板, 以截面 S^* 作切口, 将该板分为两个含单边边缘裂纹板.

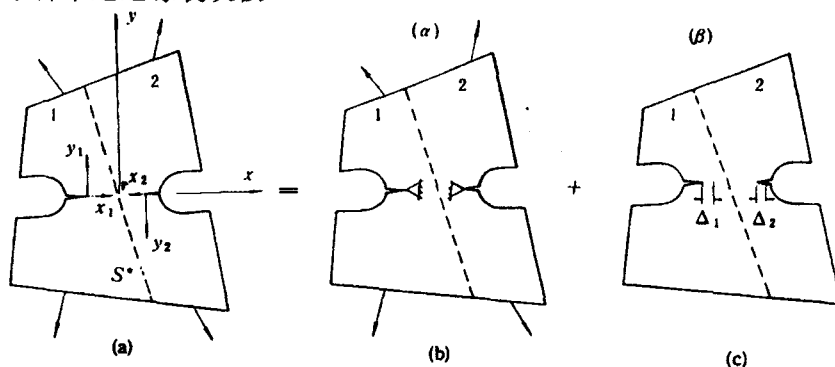


图 2 含双边边缘裂纹板及其分解

Fig.2 A plate with bi-lateral edge crack and its decomposition

进一步, 建立总体坐标系, 以 $(v_i)_K$, $(\tau_{ij})_K$, $(Q_i)_K$ 与 $(n_i)_K$ 分别表示第 K 块板的位移、应力、面力分量与外法线方向余弦. 两块板的位移与应力场已经满足所有基本方程以及裂纹表面边界条件, 但还应满足其余边界条件以及交界连续条件如下

$$(\tau_{ij} - n_j - Q_i)_K = 0 \text{ 在 } S_{QK} \text{ 上}, (v_i - \bar{v}_i)_K = 0 \text{ 在 } S_{UK} \text{ 上} (K = 1, 2) \quad (14)$$

$$(\tau_{ij} n_j)_1 + (\tau_{ij} n_j)_2 = 0, (v_i)_1 = (v_i)_2 \text{ 在 } S^* \text{ 上} \quad (15)$$

式中, S_{QK} 和 S_{UK} 分别表示第 K 块板静力边界与位移边界. 以上边界条件式 (15) 以及交界连续条件式 (16) 可通过分区广义变分原理得到满足. 根据拉氏乘子法, 由泛函的驻值条件得出 [5,6]

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \sum_{K=1}^2 \left\{ \int_{S_{QK}} [(\tau_{ij} n_j - Q_i) \delta v_i]_K dS_K - \int_{S_{UK}} [(v_i - \bar{v}_i) \delta \tau_{ij} n_j]_K dS_K \right\} \\ & + \int_{S^*} [(\tau_{ij} n_j)_1 + (\tau_{ij} n_j)_2] (\delta v_i)_1 dS^* \\ & + \int_{S^*} [(v_i)_1 - (v_i)_2] (\delta \tau_{ij} n_j)_2 dS^* = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

应当指出, 在本问题中由于所有基本方程预先得到满足, 在变分方程式 (1) 中仅含沿板边界的线积分, 而没有面积分且式 (16) 与式 (14) 和 (15) 等价.

在没有位移边界的情况下, 载荷本身构成自相平衡力系. 本问题可分解成为图 2(b) 与 (c) 所示的 (α) 与 (β) 两种情况.

首先研究图 2(b) 所示情况 (α), 它表示裂纹尖端固定的承载板. 此时, 总体坐标系与局部坐标系中的对应量具有如下关系

$$\left. \begin{aligned} (v_i)_1 &= (u_i)_1, & (\tau_{ij})_1 &= (\sigma_{ij})_1, & (Q_i)_1 &= (P_i)_1 \\ (v_i)_2 &= -(u_i)_2, & (\tau_{ij})_2 &= (\sigma_{ij})_2, & (Q_i)_2 &= -(P_i)_2 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

将式 (17) 代入式 (16) 并注意到总体坐标系中外法线方向余弦与局部坐标系中外法线方向余弦关系 $(n_i)_1 = (m_i)_1$ 与 $(n_i)_2 = -(m_i)_2$, 我们有变分方程如下

$$\begin{aligned} & \int_{S_{Q1}} (\sigma_{ij} m_j \delta u_i)_1 dS_1 + \int_{S_{Q2}} (\sigma_{ij} m_j \delta u_i)_2 dS_2 + \int_{S^*} (\sigma_{ij1} m_{j1} \\ & \quad - \sigma_{ij2} m_{j2}) \delta u_{i1} dS^* - \int_{S^*} (u_{i1} + u_{i2}) \delta (\sigma_{ij} m_j)_2 dS^* \\ & = \int_{S_{Q1}} (P_i \delta u_i)_1 dS_1 + \int_{S_{Q2}} (P_i \delta u_i)_2 dS_2 \end{aligned} \quad (18)$$

将式 (13) 和 (14) 代入式 (18), 可建立求解 $(H_j^{(l)})_K^{(\alpha)}$ 的代数方程组. 情况 (α) 的应力强度因子等于

$$K_{IK}^{(\alpha)} = 2\sqrt{2\pi} (H_0^{(1)})_K^{(\alpha)}, \quad K_{IIK}^{(\alpha)} = 2\sqrt{2\pi} (H_0^{(3)})_K^{(\alpha)} \quad (19)$$

在切口 S^* 上, 情况 (α) 的合力沿裂纹方向分量为

$$R_1^{(\alpha)} = \int_{S^*} (\tau_{1j}^{(\alpha)} n_j)_1 dS^* \quad (20)$$

然后研究图 2(c) 所示情况 (β), 它表示裂纹右端与左端分别具有沿 x 轴方向的位移 Δ_1 与 Δ_2 的无载板. 此时, 总体坐标系与局部坐标系中的对应量具有如下的关系

$$\left. \begin{aligned} (v_i)_1 &= (u_i)_1 + \delta_{i1} \Delta_1, & (\tau_{ij})_1 &= (\sigma_{ij})_1, & (Q_i)_1 &= 0 \\ (v_i)_2 &= -(u_i)_2 + \delta_{i1} \Delta_2, & (\tau_{ij})_2 &= (\sigma_{ij})_2, & (Q_i)_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

将式 (21) 代入式 (16), 可得如下形式的变分方程

$$\begin{aligned} & \int_{S_{Q1}} (\sigma_{ij} m_j \delta u_i)_1 dS_1 + \int_{S_{Q2}} (\sigma_{ij} m_j \delta u_i)_2 dS_2 \\ & \quad + \int_{S^*} (\sigma_{ij1} m_{j1} - \sigma_{ij2} m_{j2}) \delta u_{i1} dS^* - \int_{S^*} (u_{i1} + u_{i2}) \delta (\sigma_{ij} m_j)_2 dS^* \\ & = 2\Delta \int_{S^*} \delta (\sigma_{1j} m_j)_2 dS^* \end{aligned} \quad (22)$$

式中, $2\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$. 将式 (13) 和 (14) 代入式 (22) 并令 $\Delta = 1$, 可建立求解 $(H_j^{(l)})_K^{(\beta)}$ 的线性代数方程组. 情况 (β) 的应力强度因子等于

$$K_{IK}^{(\beta)} = 2\sqrt{2\pi} (H_0^{(1)})_K^{(\beta)}, \quad K_{IIK}^{(\beta)} = 2\sqrt{2\pi} (H_0^{(3)})_K^{(\beta)} \quad (23)$$

在切口 S^* 上, 情况 (β) 的合力沿裂纹方向分量为

$$R_1^{(\beta)} = \int_{S^*} (\tau_{1j}^{(\beta)} n_j)_1 dS^* \quad (24)$$

最后研究真实情况. 设裂纹尖端沿 x 方向相对位移为 2Δ , 板 1 边界 S_{Q1} 的合力沿裂纹方向分量为 R_1 . 于是, 由迭加原理与平衡方程, 可得

$$R_1 = R_1^{(\alpha)} + R_1^{(\beta)} \Delta \quad (25)$$

由上式可确定裂纹尖端相对位移 2Δ . 从而由迭加原理可得真实情况应力强度因子如下

$$K_{IK} = K_{IK}^{(\alpha)} + K_{IK}^{(\beta)} \Delta, \quad K_{IHK} = K_{IHK}^{(\alpha)} + K_{IHK}^{(\beta)} \Delta \quad (26)$$

四、数 值 计 算

以上计算应力强度因子的方法既可以用于各向异性材料, 也可以用于各向同性材料. 对各向同性材料, 可引入一个小量 $\varepsilon \ll 1$ 并使

$$\mu_1 = i\beta_1 = (1 - \varepsilon)i, \quad \mu_2 = i\beta_2 = (1 + \varepsilon)i \quad (27)$$

可以证明, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 式 (1) 与 (2) 所给出的应力与位移分量表达式与各向同性情况一致.

为了检验本方法的可靠性, 选用图 3 所示 $a_1 = a_2 = a$ 的特殊情况, 即受均匀轴向拉伸的含对称双边裂纹各向同性板作为计算的实例. 表 1 列出了无量纲应力强度因子 $\bar{K}_I = K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ 与无量纲裂纹尺寸 $\bar{a} = a/W$ 的关系. 由本方法所得结果与文献 [2] 所提供的结果相当一致.

表 1 受均匀轴向拉伸的含双边对称边缘
裂纹各向同性板无量纲应力强度因子的比较

Table 1 A comparison of non-dimensional stress intensity factors
for isotropic plates with bi-lateral edge crack under uniform axial tension
($H/W = 1.0$)

$\bar{K}_I$		
$\frac{a}{W}$	本文方法	[2]
0.1	1.14	1.13
0.2	1.17	1.16
0.3	1.23	1.23
0.4	1.28	1.28
0.5	1.33	1.33
0.6	1.39	1.38

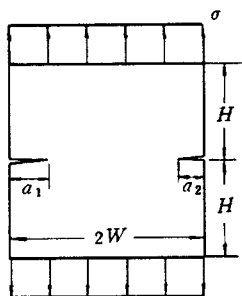


图 3 双边边缘裂纹板

Fig.3 A plate with bi-lateral edge crack

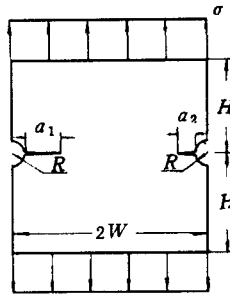


图 4 双边缺口边缘裂纹板

Fig.4 A plate with bi-lateral edge crack near notch

为了检验本方法的收敛性, 选用图 4 所示含双边非对称缺口边缘裂纹的正交各向异性板作为计算实例. 材料弹性常数为 $E_{11} = 144.8\text{GPa}$, $E_{22} = 11.7\text{GPa}$, $G_{12} = 9.7\text{GPa}$, $\gamma_{12} = 0.21$, 且裂纹与材料弹性主轴重合. 表 2 列出了无量纲应力强度因子 $\bar{K}_I = K_I/\sigma\sqrt{\pi a_1}$ 的收敛情况.

表 2 受均匀轴向拉伸含双边非对称缺口边缘裂纹的正交各向异性平板无量纲应力强度因子收敛情况 (M 代表级数的项数)

Table 2 Status of convergency for non-dimensional stress intensity factors of orthotropic plates with unsymmetric bilateral edge crack near notch subjected to uniform axial tension ($R/W = 0.1$, $H/W = 0.8$, $a_2/W = 0.3$)

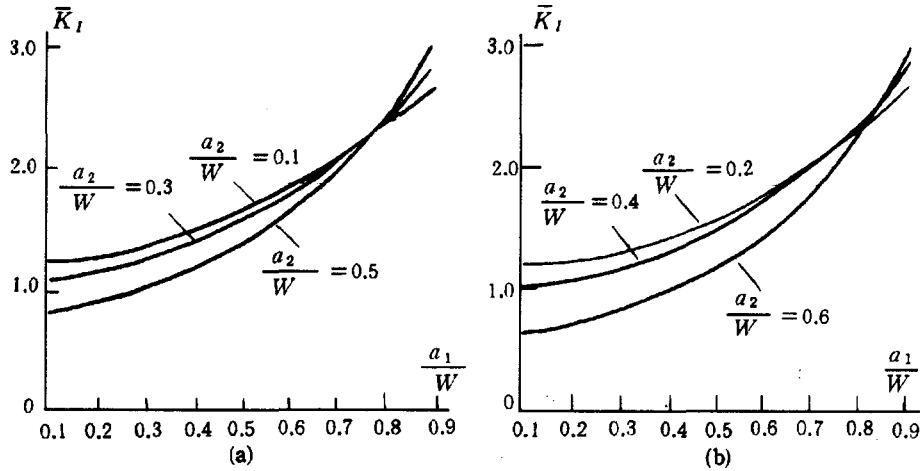
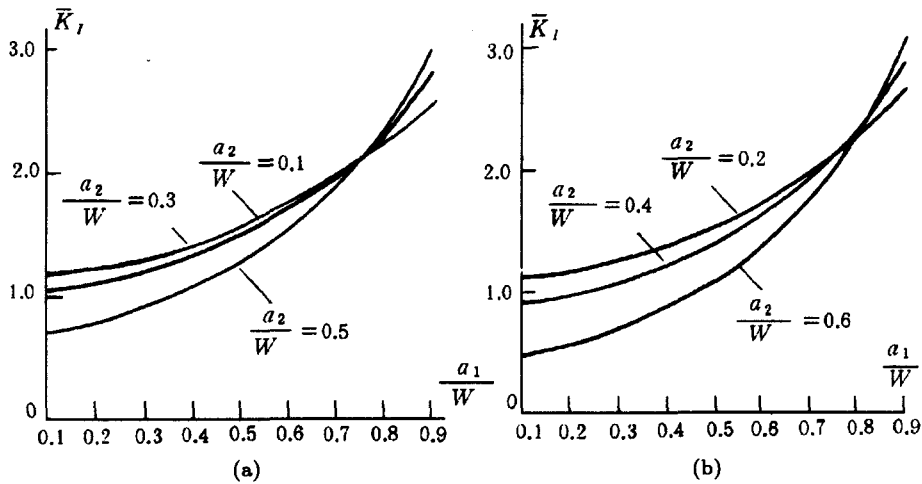
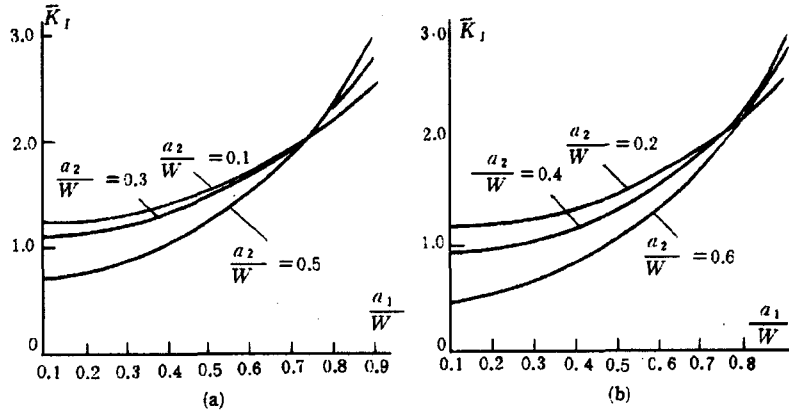
a/W						
M	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
4	0.932	1.011	1.134	1.289	1.477	1.704
5	0.997	1.085	1.221	1.396	1.618	1.911
6	0.904	1.015	1.168	1.359	1.608	1.914
7	0.888	1.034	1.183	1.372	1.607	1.912
8	0.880	0.998	1.181	1.372	1.605	1.909
9	0.879	0.999	1.182	1.372	1.606	1.906

为了丰富应力强度因子手册的内容, 最后给出图 3 所示含双边非对称边缘裂纹以及图 4 所示含双边非对称缺口边缘裂纹各向同性板受均匀轴向拉伸时应力强度因子新的系统结果, 它们以曲线形式示于图 5 至图 10.

五、结 论

(1) 本文给出精确满足平面问题基本方程与裂纹表面边界条件的应力与位移级数表达式, 并应用分区广义变分原理满足板的边界条件与交界条件, 从而求出应力强度因子;

(2) 本方法及相应程序可用于任意几何形状与任意加载方式的情况, 可用于各向异性材料与各向同性材料;

图 5 含非对称双边边缘裂纹板 $\bar{K}_I$ - a_1/W 曲线 ($H/W = 1.0$)Fig.5 $\bar{K}_I$ - a_1/W curves of plates with unsymmetric bi-lateral edge crack ($H/W = 1.0$)图 6 含非对称双边边缘裂纹板 $\bar{K}_I$ - a_1/W 曲线 ($H/W = 1.2$)Fig.6 $\bar{K}_I$ - a_1/W curves of plates with unsymmetric bi-lateral edge crack ($H/W = 1.2$)图 7 含非对称双边边缘裂纹板 $\bar{K}_I$ - a_1/W 曲线 ($H/W = 1.4$)Fig.7 $\bar{K}_I$ - a_1/W curves of plates with unsymmetric bi-lateral edge crack ($H/W = 1.4$)

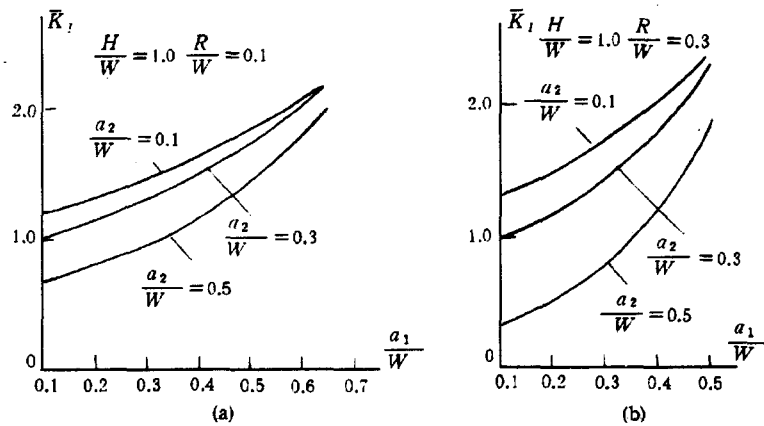


图 8 含非对称双边缺口边缘裂纹板 $\bar{K}_I$ - a_1/W 曲线 ($H/W = 1.0$)
Fig.8 $\bar{K}_I$ - a_1/W curves of plates with unsymmetric bi-lateral edge crack near notch ($H/W = 1.0$)

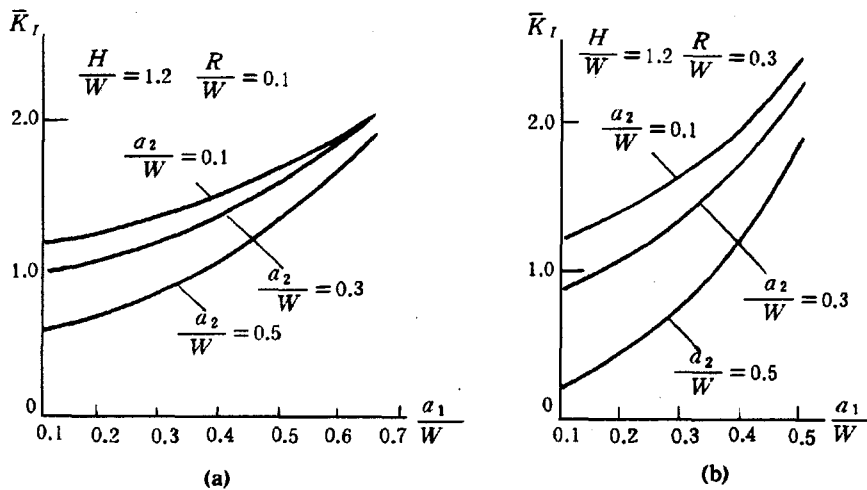


图 9 含非对称双边缺口边缘裂纹板 $\bar{K}_I$ - a_1/W 曲线 ($H/W = 1.2$)
Fig.9 $\bar{K}_I$ - a_1/W curves of plates with unsymmetric bi-lateral edge crack near notch ($H/W = 1.2$)

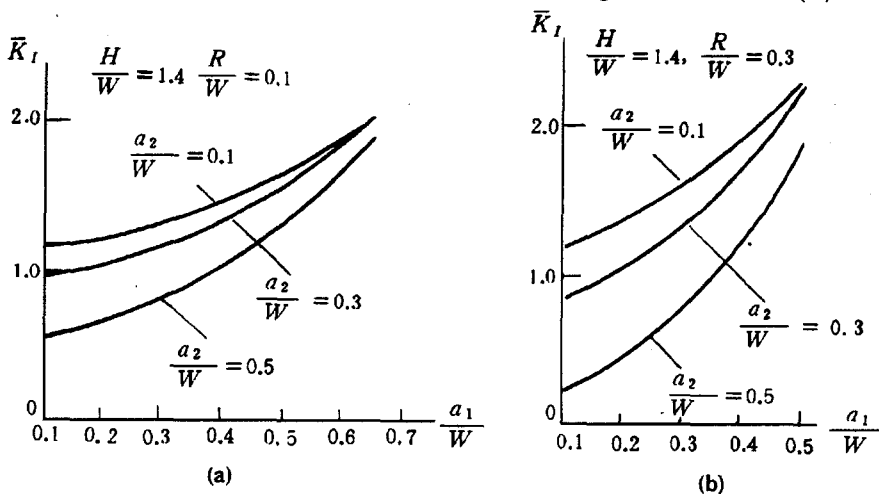


图 10 含非对称双边缺口边缘裂纹板 $\bar{K}_I$ - a_1/W 曲线 ($H/W = 1.4$)
Fig.10 $\bar{K}_I$ - a_1/W curves of plates with unsymmetric bi-lateral edge crack near notch ($H/W = 1.4$)

(3) 本方法可大为简化数据准备工作, 而且计算结果收敛迅速、正确。

感谢 本文在投稿前承蒙黄克智教授在百忙中予以仔细审阅, 作者为此表示衷心感谢!

参 考 文 献

- [1] Srawley JE. Gross B. *Eng. Fract. Mech.*, 1972, (4)
- [2] Hellen TK. *Int. J. Numer. Method Eng.*, 1975, (9)
- [3] Lekhnitskii SG. *Theory of elasticity of an anisotropic body*. English Translation, Mir Publisher, 1981
- [4] Sih GC and Chen EP. *Cracks in composite materials*. *Mechanics of Fracture 6*, Martinus Nijhoff Publishers, 1981
- [5] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 科学出版社, 1981
- [6] 钱伟长. 变分法与有限元. 科学出版社, 1980

THE SOLUTION OF STRESS INTENSITY FACTORS FOR NON-SYMMETRIC DOUBLE EDGE CRACKS IN ANISOTROPIC PLATES BY COMPLEX VARIABLE- GENERALIZED VARIATIONAL METHOD

Zhang Xing Cui Deyu

(*Department of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China*)

Abstract Description is given of a complex variable-generalized variational method to investigate the stress intensity factors(S.I.F.) associated with the non-symmetric double edge cracks in anisotropic plates. In this work a cracked plate is decomposed into two subregions with edge cracks. According to the theory of anisotropic elasticity, the stress and displacement series which satisfy all basic equations and stress-free boundary conditions on crack surfaces are established. By using a generalized variational principle about multi-regions to consider the remaining boundary and interface conditions, the stress and displacement fields as well as S.I.F. can be determined. This method presents an effective approach to solve both symmetric and non-symmetric problems in the sense of geometry and loading. Numerical studies reveal that the convergent results are given by a relatively simple program, reducing data manipulation and computer time obviously. A very satisfactory degree of accuracy is obtained from the results, compared with the findings of earlier studies.

Key words non-symmetric double edge cracks, anisotropic plate, stress intensity factors, complex variable-generalized variational method