

Chater 梁屈曲传播的动态分析¹⁾

刘志宏 黄玉盈

(华中理工大学力学系, 武汉 430074)

提要 本文从非线性有限元的一般方法出发, 结合应用加权残数技术和 ALE 边界元法, 对 Chater 梁的屈曲传播进行了完全的动态分析, 抛弃了前人一直采用的准静态和动稳态假设; 另外, 基于势流理论和非线性液面条件, 还考虑了结构充液后由于流固耦合作用对屈曲传播所造成的影响, 大量算例揭示了结构的非线性、作用载荷、屈曲传播速度以及液体介质之间的内在关系, 从而对屈曲传播有了更深入的认识。

关键词 屈曲传播动力学 非线性有限元 ALE 边界元 流固耦合

一、引 言

工程中某些结构在一定的载荷条件下, 会发生一种屈曲传播现象。最常见的例子就是海底输油管线在外压作用下, 由于自身缺陷首先引起局部压崩, 继而变形会沿着管长方向迅速传播, 从而导致管线在很长范围内失效, 其危害性不言而喻^[1]。最早研究这一现象的是 Palmer 等 (1975)^[2], 随后一批学者又采用不同的模型及方法进行了理论和实验探讨^[3-11]。普遍认为, 一根无限长等截面圆柱壳在静水压力作用下的屈曲传播过程 (图 1)^[17] 与平面应变圆环受均布外压作用时的弹塑性后屈曲路径 (图 2)^[8] 有密切联系。Chater 和 Hutchinson^[8] 基于准静态 (稳态) 传播假设从理论上证明了, 对于图 2 所示的 N 形后屈曲路径, 一定能够找到一条能量平衡线 $p = p_p$, 使得划开的面积 $R_1 = R_2$; 且 p_p 就是屈曲的传播压力。

若侧重研究屈曲的传播特性比如传播速度, 采用 Chater 等 (1983)^[12] 提出的非线性弹性地基梁模型是适宜的。该模型 (简称 Chater 梁) 是一根抗弯刚度为 EI 的无限长等截面线性梁, 放置在刚度系数为 $k(w)$ 的弹性地基上, 其中

$$k(w) = k_0[1 - 4.5(w/H) + 5.25(w/H)^2] \quad (1)$$

很明显地基单位长度的恢复力是位移 w 的三次函数, 类似图 2 的 N 形。从能量平衡线求得 Chater 梁稳态传播压力 $p_p = 0.941K_0H$; 且在屈曲传播前方 $w = w_A$, 而在传播后方 $w = w_B$, 过渡段挠度 $w \in (w_A, w_B)$ (图 3)。由于 Chater 梁既体现了屈曲传播的本质, 又

¹⁾ 国家自然科学基金资助项目。

本文于 1992 年 6 月 8 日收到第一稿, 于 1992 年 11 月 30 日收到修改稿。

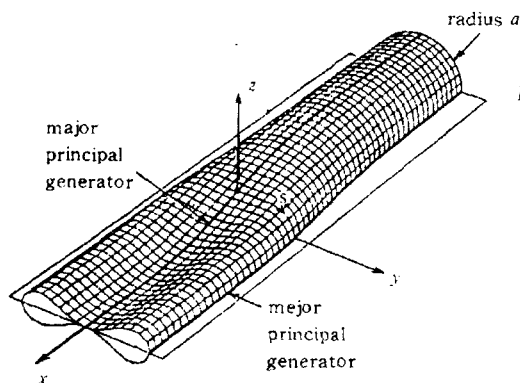


图1 圆柱长壳的屈曲传播

Fig. 1 Buckle propagation in a long cylindrical shell

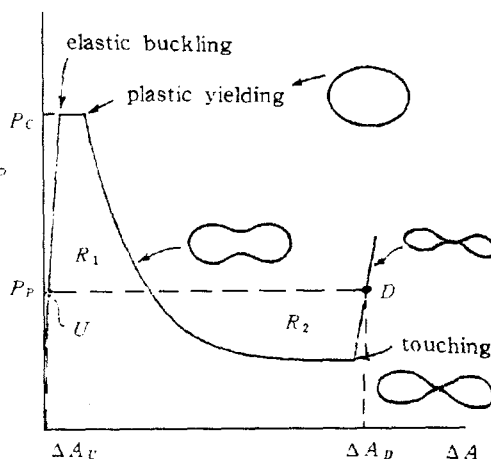


图2 圆环在均布外压作用下的后屈曲路径

Fig. 2 Buckling and postbuckling behavior of a ring under external pressure

避免了复杂的弹塑性计算,因而在理论分析上具有较高价值.文[12]中 Chater 等分析了该梁在动稳态假设 ($w(x) = w(x-ct)$) 下的屈曲传播,这和准静态相比有进步,因为考虑了梁和液体介质惯性的影响,但从动稳态假设出发不可能确定传播速度值;其次他们把充液部分简化为一维流动,结果也显得粗糙了些.

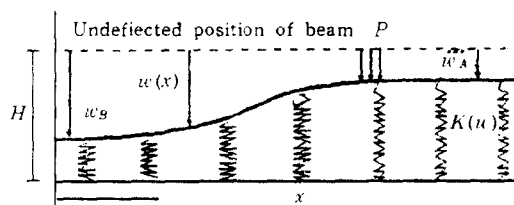


图3 Chater 梁模型

Fig. 3 A linear beam on nonlinear elastic foundation (Chater's beam)

为解决上述问题,本文抛弃任何准静态和动稳态假设,采用非线性动力有限元法对 Chater 梁在均布动载荷作用下的屈曲传播进行瞬态分析.求得了从局部变形诱发出屈曲到屈曲生长发展及沿纵向传播整个过程的时程曲线,从而能够确定加载的压力谱、屈曲传播压力以及传播速度值.为了模拟海底管线的某些情况,我们还在梁的下部充液,进一步研究流固耦合作用的影响.液体域作二维势流处理,并考虑真实的非线性液面条件.通过算例揭示了结构非线性、作用载荷、屈曲传播速度以及液体介质之间的内在关系.

二、屈曲传播的动态分析

同文献[12],设地基中部存在一段缺陷,沿梁长呈 Gause 分布,

$$k(w, x) = k_0[1 - 4.5(w/H) + 5.25(w/H)^2][1 - \eta \exp(-\lambda \xi^2)] \quad (2)$$

其中 $\xi = x(k_0/EI)^{1/4}$, η 与 λ 为缺陷参数(本文中分别取作 0.2 和 0.167).

(1) 基本方程和时间积分

首先不考虑梁下面充液. 设梁的单位长度质量为 $\bar{m}$, 运动方程是

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + k(w, x)w = p(t) \quad (3)$$

边界条件是

$$x \rightarrow \pm\infty, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

初始条件是

$$w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (5)$$

引入 $w' = w/H$ 、 $x' = x/(EI/k_0)^{1/4}$ 、 $p' = p/(k_0 H)$ 、 $t' = t/(\bar{m}/k_0)^{1/2}$ 将方程 (3) 无量纲化, 下文中省去“'”号. 有限元离散时有限长梁可处理成跨度为 $2L$ 的有限长梁^[12], $L \approx 60(EI/k_0)^{1/4}$. 这样得到下列非线性方程组

$$M\ddot{\mathbf{W}} + K_S \mathbf{W} = p(t)\mathbf{P} \quad (6)$$

式中, $\mathbf{W}$ 和 $\ddot{\mathbf{W}}$ 分别为节点位移向量和加速度向量; $\mathbf{M}$ 是线性梁的质量矩阵; K_S 是梁-地基系统的割线刚度矩阵, $K_S = K + K_F$, K 为线性梁的刚度矩阵, K_F 为地基的割线刚度矩阵. 对于一个梁单元, $[K_F]_{4 \times 4}$ 的各元素可按下式确定

$$[K_F]_{ij} = \int_0^l k(w, \bar{x}) N_i(\bar{x}) N_j(\bar{x}) d\bar{x} \quad (7)$$

式中 l 为梁单元的长度, $\bar{x}$ 是局部坐标, $N_i(\bar{x})$ 为 Hermite 插值函数.

对时间离散采用了“梯形法则”^[14], 它等价于 Newmark 的平均加速度法, 设

$$w^{n+1} = w^n + \frac{1}{2} \Delta t (v^{n+1} + v^n) \quad (8a)$$

$$v^{n+1} = v^n + \frac{1}{2} \Delta t (a^{n+1} + a^n) \quad (8b)$$

其中 v 和 a 分别是速度和加速度. 合并两式得到:

$$w^{n+1} = \tilde{w}^n + \frac{1}{4} (\Delta t)^2 a^{n+1} \quad (9a)$$

$$\tilde{w}^n = w^n + \Delta t v^n + \frac{1}{4} (\Delta t)^2 a^n \quad (9b)$$

代入方程 (6) 有:

$$K_s^{\text{DYN}} W^{n+1} = p^{n+1} \mathbf{P} + \mathbf{M}^{\text{DYN}} \tilde{W}^n \quad (10)$$

这里 $K_s^{\text{DYN}} = M^{\text{DYN}} + K_S$; $M^{\text{DYN}} = \frac{4}{(\Delta t)^2} M$. 对于每一时间增量, 上述方程的右边为已知量, 用 Newton 迭代法可以求出 W^{n+1} . 设第 $m+1$ 次迭代值是 $W^{m+1} = W^m + \delta W^m$, 其中修正值 δW^m 按下式确定,

$$\delta W^m = -[K_T^{\text{DYN}}]^{-1} \psi^m \quad (11a)$$

$$\Psi^m = K_S^{\text{DYN}} W^m - p^{n+1} P - M^{\text{DYN}} \widetilde{W}^n \quad (11b)$$

其中 K_S^{DYN} , K_T^{DYN} 分别代表动力系统的割线刚度矩阵和切线刚度矩阵.

(2) 屈曲的传播压力和传播速度

给定载荷谱 $p(t)$, 用上述方法可以算出梁的变形时程曲线. 但什么样的 $p(t)$ 能够诱发屈曲和传播屈曲呢? Kyriakides 等曾就金属圆管的屈曲传播^[5]和充液橡胶管的失稳传播^[7]做过实验. 他们采用控制体积的办法诱发出了屈曲并且实现了稳态传播, 同时也记录下了外压随时间变化的曲线(文献[5]图6; 文献[7]图4). 通过分析这些曲线我们认为: 在起始阶段加载可以快一些; 而在屈曲出现前后, 载荷变化则应缓慢一些; 一俟初始屈曲形成, 则应卸载并保持一恒定压力. 如果这一恒定压力能够把屈曲过渡段稳定地向前推移, 那么这个压力就是传播压力 p_p , 通过这种途径获得的 p_p 值当更加接近实际情况. 根据上述思想, 我们设计了如下载荷谱.

$$p(t) = \begin{cases} p_2(1 - \exp(-\frac{t}{\tau_2})) & (0 \leq t \leq t^*) \\ p_1 + (p^* - p_1)\exp(-\frac{t-t^*}{\tau_1}) & (t > t^*) \end{cases} \quad (12)$$

其中 τ_2 , τ_1 表征加载和卸载速率; p_2 、 p_1 为载荷上限和下限. 通过试算并参考了准静态分析结果, 我们找到了一组合适的参数如表1. 在这个载荷谱作用下屈曲能够比较平稳地传播. 同时也发现: 当 p_1 取 0.042 时, 在传播过程中过渡段的位移跃变会逐渐加深; 当 p_1 取 0.040 时, 过渡段的位移跃变会逐渐变浅; 只有当它取 0.041 时, 才能获得稳定的传播, 如图4所示. 其中 T 代表观察周期.

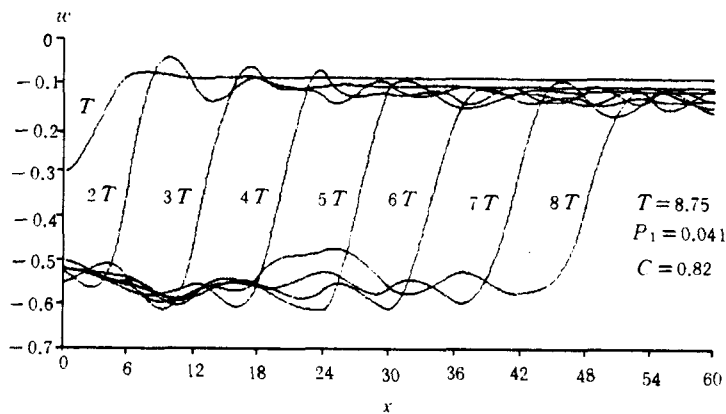


图4 Chater 梁的动态屈曲传播(不充液)

Fig. 4 Dynamic buckles propagation in Chater's beam (without fluid)

由于 $w_M = \frac{1}{2}(w_A + w_E)$ 一定对应于过渡段上某一点, 因此可用来判断屈曲传播到的瞬时位置, 从而求得传播速度值. 表2给出了不同的 p_1 作用下屈曲传播的速度, 其单位是: $(\frac{EI}{k_0})^{\frac{1}{4}} / (\frac{\bar{m}}{k_0})^{\frac{1}{2}}$

表 1 无量纲载荷谱参数值

Table 1 Load parameters inducing
a steady propagation of buckle

p_2	τ_2	p_1	τ_1	t^*	Δt
0.050	1.0	0.041 ± 0.001	1.0	14.0	0.05

表 2 无量纲屈曲传播速度

Table 2 Velocities of propagation for
various values of p_1

p_1	0.042	0.041	0.040
c	0.91	0.82	0.60

三、充液对动态屈曲传播的影响

文 [4] 曾经指出: 结构动态屈曲传播与周围的介质有关, 但是并没有给出理论论证. 为了考察这个问题, 我们在 Chater 梁和刚性底面之间充进二维不可压缩的理想无旋流体, 着重研究流固相互作用的影响, 这时梁的控制方程变为:

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + k(w, x)w = p - q(x, t)b \quad (13)$$

其中 $q(x, t)$ 是流固交接面上的水动压力, b 是梁垂直纸面的宽度.

(1) 流场分析

对于流场, 可以列出下面一组运动方程

域内:

$$\mathbf{U} = \text{grad} \varphi \quad (14a)$$

$$V^2 \varphi = 0 \quad (14b)$$

交接面:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (14c)$$

$$q(x, t) = -\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{U}|^2 \right) \quad (14d)$$

$$\text{固壁 } (y = -H \text{ 及 } x = 0): \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (14e)$$

出口 ($x = L$):

$$-\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{U}|^2 \right) = q^E(y, t) \quad (14f)$$

其中, $\mathbf{U}$ 为流体速度, φ 为速度势函数, ρ 是流体密度, $\eta(x, t)$ 是交接面方程, q^E 是出口压力分布 (可假设为 0). 很显然, 这是一个动边界问题, 其难点表现在: 1) 流固交接面的位置和形状随时间变化; 2) 交接面及出口处的边界条件是一组非线性方程, 不过采用本文作者提出的 ALE 边界元法 [13], 可以较好地解决上述问题.

对 Laplace 方程 (14b) 用边界元离散后得到下面矩阵方程:

$$A^T \Phi = B^T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \quad (15)$$

其中 A 和 B 为影响系数矩阵. 若采用的是线性边界元, A 和 B 中各元素有解析表达式 [15].

再改写 (14f) 并取它的弱解形式,

$$\sum \int_0^l \omega(s) \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 \right] + \frac{q^E}{\rho} \right\} ds = 0 \quad (16)$$

选取权函数 $\omega(s)$ 与边界元形函数具有相同的形式, 把上列积分进行 Garlerkin 离散. 以线性单元为例, 有

$$\begin{aligned} [lF + \frac{\Delta t}{2l} \Theta - \frac{\Delta t}{2} \Omega] \Phi + [\frac{\Delta t}{2} l \Gamma] \frac{\partial \Phi}{\partial n} = l_0 F [\Phi_0 + \frac{\Delta t}{2} (\frac{D\Phi}{Dt})_0] \\ + \frac{\Delta t}{4l} \Theta \bar{\Phi} + \frac{\Delta t}{4} l \Gamma \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} - \frac{\Delta t}{2} l F \frac{q^E}{\rho} \end{aligned} \quad (17)$$

其中下标 “0” 表示前一步长的迭代收敛值; 上面加 “-” 表示本次步长的迭代初值. 且

$$\begin{aligned} F = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \Omega = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2V'_1 - V'_2 & 2V'_1 + V'_2 \\ -V'_1 - 2V'_2 & V'_1 + 2V'_2 \end{bmatrix} \\ \Theta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1 \end{bmatrix}, \Gamma = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3(\bar{\varphi}_n)_1 + (\bar{\varphi}_n)_2 & (\bar{\varphi}_n)_1 + (\bar{\varphi}_n)_2 \\ (\bar{\varphi}_n)_1 + (\bar{\varphi}_n)_2 & (\bar{\varphi}_n)_1 + 3(\bar{\varphi}_n)_2 \end{bmatrix} \\ (q^E)^T = [q_1^E, q_2^E], \Phi^T = [\varphi_1, \varphi_2], (V')^T = [V'_1, V'_2] \\ (\frac{\partial \Phi}{\partial n})^T = [(\frac{\partial \varphi}{\partial n})_1, (\frac{\partial \varphi}{\partial n})_2], (\frac{D\Phi}{Dt})^T = [(\frac{D\varphi}{Dt})_1, (\frac{D\varphi}{Dt})_2] \end{aligned}$$

V' 是出口处节点移动速度. 详细的推导可参考文 [15] 和 [16]. 值得指出的是: $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ 是 Euler 场里的当地导数, 离散时已经用 ALE 观点转化成了边界元控制点上的随体导数 $\frac{D\varphi}{Dt}$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{D\phi}{Dt} - \frac{\partial \phi}{\partial X} \frac{\partial X^A}{\partial t} \quad (18)$$

这里 $\frac{\partial \varphi}{\partial X}$ 和 $\frac{\partial X^A}{\partial t}$ 分别是流体质点速度和边界元节点速度.

一旦知道了流固交接面的形状和运动速度, 联合求解 (15) 和 (17), 就可以唯一地确定流场的位势.

(2) 耦合求解

在流固交接面上, 补充下列耦合方程:

$$\eta = -w, \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (19)$$

对于地基梁假设的位移场和速度场, 由上式可以确定相应的流场速度边界, 按上节作流场分析求出 Φ . 用 ALE 观点改写 (14d), 能确定交接面上的水动压力,

$$q(x, t) = -\rho \left\{ \frac{D\varphi}{Dt} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \tan \theta - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 \right] \right\} \quad (20)$$

其中 θ 是交接面与水平面的夹角, 逆时针为正, 再通过下式

$$Q = \int_0^l q(\bar{x}, t) b N(\bar{x}) d\bar{x} \quad (21)$$

反馈给梁:

$$K_S^{\text{DYN}} W^{n+1} = p^{n+1} P + M^{\text{DYN}} \widetilde{W}^n - Q^{n+1} \quad (22)$$

进行迭代求解.

(3) 输运流体对屈曲传播的影响

首先引入两个无量纲参数:

$$v_1 = \frac{(EI/k_0)^{1/4}}{H}, \quad v_2 = \frac{\rho b H}{\bar{m}} \quad (23)$$

分别代表流体的几何特性和物理特性, 本文中 v_1 恒取为 1.

由于水动压力的值与流体密度 ρ 成正比, 所以当 ρ 比较大时, 水动压力对动态屈曲传播将起主要作用. 这时候尽管在梁的中部 ($x=0$ 处) 设置了初始缺陷, 但由于假设了出口处水动压力恒为 0 (这个假设并不影响结论的一般性^[12]), 故屈曲将首先在梁的端部 (而不是中部) 发生, 随后开始向内传播. 又由于水动压力的大小主要依赖于流固交接面处加速度的大小, 因而水动压力的作用只在屈曲过渡段附近较为明显, 而在屈曲传播的前方, 水动压力的影响则相对薄弱, 从而使得结构的非线性仍占主导地位. 所以当上述屈曲 (不妨称作首次屈曲) 传播了一段时间后, 在梁的中部会出现第二次屈曲, 该屈曲由中部向外传播, 如图 5 所示. 表 3 给出了相同的载荷条件下, 不同的流体密度所对应的首次屈曲的传播速度.

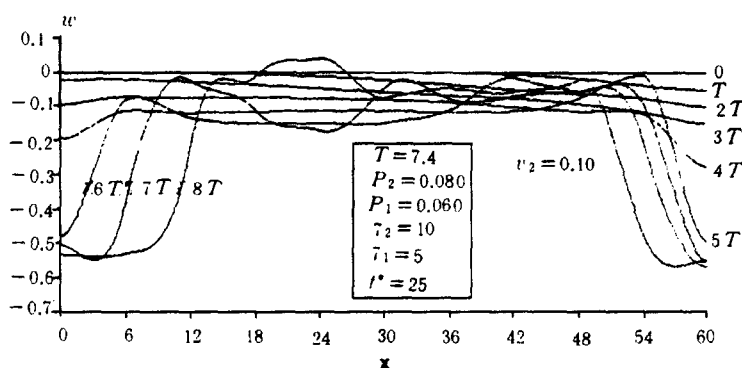


图 5 Chater 梁的动态屈曲传播 (充液)

Fig.5 Dynamic buckle propagation in Chater's beam (filled with fluid)

表 3 不同流体密度所对应的屈曲传播速度

Table 3 The dependence of velocity of propagation on density of fluid

v_2	0.12	0.10	0.08
c	0.26	0.36	0.46

四、结 论

1) 表 2 说明: 传播压力的轻微改变可引起传播速度的显著变化. 这与 Kyriakides 从实验观察^[7]中得到的结论是一致的.

2) 表3告诉我们, 梁下面充填的液体的密度越大, 屈曲传播的速度越小.

3) 由图5可以看出, 对于文中的充液模型, 在梁长较长和流体密度较大的情况下, 会发生两次屈曲和屈曲传播, 其原因分别是流体的水动压力和结构的非线性. 这是一个值得注意的现象.

4) 根据图4的瞬态分析结果可知, 梁的惯性对稳态屈曲传播压力没有影响, 这和 Chater 等人基于动稳态假设^[12]所得的结论是一样的.

参 考 文 献

- [1] 黄玉盈. 力学进展, 1984,14:23—28
- [2] Palmer A C and Martin J H. *Nature* 1975,254:46—48
- [3] Mesloh R E Johns T G and Sorenson J E. *J. Press. Vessel Tech.*, ASME 1978, 100:206—214
- [4] Kyriakides S and Babcock C D. OTC No.3479
- [5] Kyriakides S and Babcock C D. *J. Press. Vessel Tech.*, ASME 1981,103: 328—336
- [6] Kyriakides S and Yeh M K. *J. Press. Vessel Tech.*, ASME 1984,106:150—159
- [7] Kyriakides S and Chang Y C. *Int. J. Solids Structures* 1991, 27: 1085—1111
- [8] Chater E and Hutchinson J W. *J. Applied Mechanics*, ASME 1984, 51: 269—277
- [9] Croll J G A. *J. of Constr. and Steel Res.* 1985 5:103—122
- [10] Wierzbicki T and Bhat S U. *Int. J. Solids Structures*. 1986,22:985—1005
- [11] Jensen H M. *Int. J. Solids Structures*. 1988,24:51—64
- [12] Chater E Hutchinson J W and Neale K W. Buckle propagation on a beam on a nonlinear elastic foundation. In Collapse (Edited by Thompson J M T and Hunt G W). Cambridge Univ. Press 1983,31—41
- [13] Liu Z H and Huang Y Y. An arbitrary Lagrangian-Eulerian boundary element method for large-amplitude sloshing problems. In Theory and applications of boundary element methods (Proceedings of the 4th China-Japan Symposium on Boundary Element Methods) 1991,153—160
- [14] Felippa C A and Park K C. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1980, 24:61—111
- [15] Nakayama T and Washizu K. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1981,17:1631—1646
- [16] Liu P L-F and Liggett J A. Boundary element formulations and solutions for some non-linear water wave problems. In Developments in Boundary Element Methods-3 (Edited by Banerjee P. K. and Mukherjee S.). Elsevier Applied Science Publishers, 1984,171—190
- [17] Kamalarasa S and Calladine C R. *Int. J. Mech. Sci.*, 1989,31:207—218

Dynamic buckle propagation on Chater's beam

Liu Zhihong and Huang Yuying

(Department of Mechanics, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract In this paper, a sweeping investigation on dynamic buckle propagation on Chater's beam is performed by using the general nonlinear finite element methods (FEM) instead of any quasi static or dynamic steady propagation assumptions. With the help of the arbitrary Lagrangian-Eulerian boundary element method (ALE-BEM) and the weighted residual methodology, the effect of interaction between the beam and the fluid flow inside is also reconsidered based on the two-dimensional potential flow theory. How the structural nonlinearity, loading history, inertia of the fluid affect the velocity of dynamic buckle propagation is illustrated by a series of numerical examples.

Key words dynamic buckle propagation, FEM, ALE-BEM, fluid-structure interaction