

阶跃扭矩作用下弹性圆柱壳冲击屈曲¹⁾

张善元 王德禹²⁾ 杨桂通

(太原工业大学应用力学研究所, 太原 030024)

摘要 本文首先基于 Koiter 初始后屈曲理论和 Thompson 离散坐标方法, 给出了受扭圆柱壳的缺陷敏感性分析及冲击扭转屈曲渐近分析, 并指出它对应于对称失稳的情形. 然后通过求解受扭圆柱壳的非线性动力学方程, 指出在阶跃扭矩作用下的后屈曲阶段, 壳体的振动幅值剧增, 周期变大.

关键词 弹性圆柱壳, 扭转, 冲击屈曲

一、前 言

结构的冲击屈曲研究是近年来颇受人们重视的研究领域, 这主要起因于对结构耐撞性及各类能量吸收装置的需要. 对于临界屈曲, 在数学上归结为线性微分方程的本征值问题, 而对于后屈曲问题, 则需要考虑几何非线性效应, Koiter 于 1945 年提出了在静力保守载荷下弹性体初始后屈曲的一般理论^[1], 以英国 Thompson 为代表从离散广义坐标出发, 使 Koiter 理论更便于具体应用^[2], 以后 Budiansky 和 Hutchinson 又将 Koiter 理论推广到了结构的动态屈曲研究之中^[3]. 应该指出, 对于圆柱壳这类工程中广泛应用的结构, 目前人们对于其冲击屈曲的研究多限于轴向冲击和周向冲击时的情形, 而关于冲击扭转屈曲则很少见公开的报导, 包括相应的实验分析. 在我们所知范围之内, 只有 Leyko 等曾经研究过弹性圆柱壳受随时间线性增加扭矩作用时的动力稳定性问题^[4], 1992 年在文献 [5] 中我们将突变理论的思想引入了弹性圆柱壳的冲击扭转屈曲研究之中, 在文献 [6] 我们还通过数值分析的方法, 研究了初始几何缺陷和扭矩脉冲作用时间对圆柱壳扭转屈曲性态的影响.

本文首先基于 Koiter 初始后屈曲理论和 Thompson 离散坐标方法, 给出了弹性圆柱壳的冲击扭转屈曲渐近分析及缺陷敏感性分析, 然后通过求解受扭圆柱壳的大挠度动力学方程, 指出在阶跃扭矩作用下的后屈曲阶段, 壳体的振动周期变大, 幅值剧增. 文中还简略地报告了我们在 Hopkinson 扭杆实验装置上对圆柱壳扭转屈曲的实验结果, 它和理论预言是相近的.

1) 国家自然科学基金资助项目

2) 现工作单位: 上海交通大学船舶及海洋工程系, 200030

本文于 1992 年 4 月 27 日收到第一稿, 1992 年 12 月 30 日收到修改稿.

二、受扭圆柱壳临界屈曲的渐近分析

考虑一弹性结构受静力载荷 λ 的作用, u 为结构的位移响应, \bar{u} 为初始几何缺陷, 且为小量, λ_c 为无初缺陷时结构的经典屈曲载荷, 则 Koiter 初始后屈曲理论表明, λ 和 u 满足:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_c}\right)u + au^2 + bu^3 + \dots = \frac{\lambda}{\lambda_c}\bar{u} \quad (1)$$

(1) 式给出了一条 $\lambda - u$ 曲线, 该曲线上 λ 的最大值 $\lambda_s (< \lambda_c)$ 为缺陷结构的屈曲载荷. 在 (1) 式中, 若 $a \neq 0$, 则该结构称之为二次结构, 其无缺陷结构的失稳为反对称失稳; 若 $a = 0$, $b \neq 0$, 则该结构称之为三次结构, 其无缺陷结构的失稳称为对称稳定失稳 ($b > 0$) 或对称不稳定失稳 ($b < 0$). 对于 $b < 0$ 的三次结构, 其静态屈曲载荷 λ_s 满足下述方程:

$$\left[1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_c}\right]^{3/2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{-b|\bar{u}} \frac{\lambda_s}{\lambda_c} \quad (2)$$

(1), (2) 式的详细推导可见文献 [3] 或 [7].

Thompson 从离散坐标出发, 发展了 Koiter 初始后屈曲理论, 为了简明起见, 下面简略地给出具有单个广义坐标的情况 [2]. 系统的总势能可以表示为:

$$E = E(u, \lambda, \bar{u}) \quad (3)$$

如以 C 表示无缺陷结构的经典屈曲临界点, 则对于三次结构 ($E_{uuu}^C = 0, E_{uuuu}^C \neq 0$) 有:

$$\lambda_s = \lambda_c - \frac{1}{2}(E_{uuuu}^C)^{1/3}(3E_{uu}^C\bar{u})^{2/3}/E_{uu}^C\lambda \quad (4)$$

上式中 E 的上标 C 表示经典临界点处取值, E 的下标表示对该变量求导数. 对于初缺陷 \bar{u} 为小量情形, $\lambda_s/\lambda_c \approx 1$, 故 (2) 和 (4) 式具有相同的意义, 即对称失稳时 $(1 - \lambda_s/\lambda_c)$ 和初缺陷参数 \bar{u} 的 $2/3$ 次幂同阶.

下面我们将从离散坐标理论出发给出受扭圆柱壳的缺陷敏感性分析. 考虑半径为 R , 长为 L , 厚度为 H 的两端固支弹性圆柱薄壳, 两端受扭矩 M 的作用, 取壳中面法向挠度 $w(x, y)$ 为:

$$w(x, y) = f_1 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{n(y - kx)}{R} + f_2 \sin^2 \frac{\pi x}{L} \quad (5)$$

这个模态已被许多研究者使用过, 如文献 [4]. 上式中 x, y 是壳体中面上一点的轴向和周向坐标, n 为周向屈曲波数, k 反映了壳体屈曲后波纹和壳轴线的夹角, f_1 和 f_2 为待定系数. 假定初始几何缺陷和屈曲模态 [5] 具有相同的形式, 即:

$$w_0(x, y) = f_{01} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{n(y - kx)}{R} + f_{02} \sin^2 \frac{\pi x}{L} \quad (6)$$

其中 f_{01} 和 f_{02} 为表征缺陷量的常数. 注意到闭合圆柱壳周向位移的周期性, f_1 和 f_2 及 f_{01} 和 f_{02} 并不独立, 它们满足:

$$n^2 f_1^2 = 4Rf_2 \quad n^2 f_{01}^2 = 4Rf_{02} \quad (7)$$

按照 Donnell 非线性壳理论, 受扭圆柱壳的势能可以表示为:

$$E = E(f_1, M, f_{01}) = G_0[G_1(f_1^2 - f_{01}^2)^2 + G_2(f_1 f_2 - f_{01} f_{02})^2 + G_3(f_1 - f_{01})(f_1 f_2 - f_{01} f_{02}) + G_4(f_2 - f_{02})(f_1^2 - f_{01}^2) + G_5(f_1 - f_{01})^2 + G_6(f_2 - f_{02})^2] + G_7 f_1^2 \quad (8)$$

其中

$$G_0 = \frac{\pi ERLH}{8} \quad G_1 = \frac{\pi^4}{16L^4} \left[\frac{1}{(1+k^2)^2} + \frac{1}{\theta^4} \right]$$

$$G_2 = \frac{\pi^4}{L^4} \left[\frac{1}{(1+a_1^2)^2} + \frac{1}{(1+b_1^2)^2} + \frac{1}{(1+a_3^2)^2} + \frac{1}{(1+b_3^2)^2} \right]$$

$$G_3 = \frac{\pi^2}{2RL^2} \left[\frac{4a_1^2}{(1+a_1^2)^2} + \frac{4b_1^2}{(1+b_1^2)^2} \right] \quad G_4 = -\frac{\pi^2}{2RL^2\theta^2}$$

$$G_5 = \frac{1}{R^2} \left[\frac{a_1^4}{(1+a_1^2)^2} + \frac{b_1^4}{(1+b_1^2)^2} \right] + \frac{H^2 n^4}{12(1-\nu^2)R^4} [(1+a_1^2)^2 + (1+b_1^2)^2]$$

$$G_6 = \frac{1}{R^2} + \frac{4H^2\pi^4}{3(1-\nu^2)L^4} \quad G_7 = -\frac{Mn^2kL}{4R^3}$$

这里 $\theta = \pi R/nL$, $a_1 = k + \theta$, $b_1 = k - \theta$, $a_3 = k + 3\theta$, $b_3 = k - 3\theta$. G_0 中的 E 为杨氏模量, ν 为泊松比.

取广义坐标为 f_1 , 缺陷参数为 f_{01} , 计算 (8) 式所示势能对 f_1 的导数在经典临界点 ($M = M_c$, $f_1=0$, $f_{01}=0$) 处的取值, 有:

$$\left. \frac{\partial^3 E}{\partial f_1^3} \right|_C = 0 \quad \left. \frac{\partial^4 E}{\partial f_1^4} \right|_C \neq 0 \quad (9)$$

可见扭转屈曲属对称失稳的情况. 这样应用 (4) 式可得缺陷圆柱壳的临界扭矩为:

$$M_s = M_c - 1.5\alpha^{1/3}\beta^{-1}(\gamma f_{01})^{2/3} \quad (10)$$

其中

$$\alpha = -Bn^4/16R^2, \quad \beta = n^2kL/4R^3 \quad \gamma = -2B$$

$$B = \frac{\pi ERLH}{8} \left\{ \frac{\pi^4}{16L^4} \left(\frac{4R}{n^2} \right)^2 \left[\frac{1}{(1+k^2)^2} + \frac{1}{\theta^4} \right] + \frac{16H^2\pi^4}{12(1-\nu^2)L^4} - \frac{2\pi^2}{L^2n^2} \left[\frac{4a_1^2}{(1+a_1^2)^2} + \frac{4b_1^2}{(1+b_1^2)^2} + \frac{1}{\theta^2} \right] + \frac{1}{R^2} \right\}$$

M_C 为经典屈曲临界扭矩, 其形式为:

$$M_C = \frac{R^2 \pi RLEH}{kL} \left\{ \frac{4}{Rn^2} \left[\frac{a_1^4}{(1+a_1^2)^2} + \frac{b_1^4}{(1+b_1^2)^2} \right] + \frac{H^2}{12(1-\nu^2)} \frac{4n^2}{R^3} [(1+a_1^2)^2 + (1+b_1^2)^2] \right\} \quad (11)$$

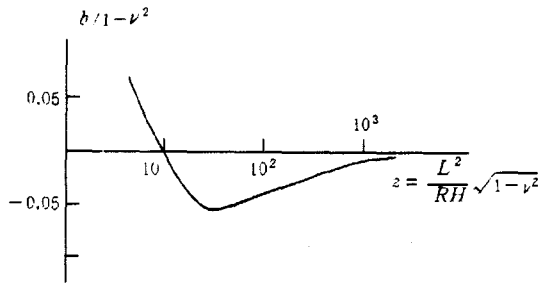


图1 受扭圆柱壳缺陷敏感系数 b
Fig. 1 Coefficient b of imperfection
sensitivity for cylindrical shell under torsion

对照 (10) 和 (2), 并注意到 $M_S/M_C \approx 1$, 可得受扭圆柱壳缺陷敏感系数 b 的表达式为:

$$b = -\frac{1}{2} \frac{\alpha \beta^{-3} \gamma^2 H^2}{M_C^3} \quad (12)$$

取 $E=567\text{kg/mm}^2$, $\nu=0.33$, $R=100\text{mm}$, $H=0.247\text{mm}$, 完成对 (12) 式的数值计算, 其结果绘于图 1 之中. 可以看出, $Z > 10$ 以后, b 恒小于零, 由此表明, 除非常短的壳体外, 圆柱壳对于扭转屈曲是缺陷敏感的, 而且相当于三次结构, 这和文献 [8] 的结论是一致的.

三、临界阶跃冲击扭矩

如果所加的载荷为阶跃突加载荷, 这意味着在平衡方程中必须考虑惯性项的影响, 下面仅考虑三次结构, 即对称稳定的情形, 这样 (1) 式将成为:

$$u_{,tt} + [1 - \frac{\lambda}{\lambda_C}]u + bu^3 = \frac{\lambda}{\lambda_C} \bar{u} \quad (13)$$

在给定的初始条件下, (13) 式在 $u-u_{,t}$ 相平面上确定了一个极限环, 为此 Budiansky 和 Hutchinson 指出 [3,7], 当 λ 达到某个临界值时, 极限环不再存在, 于是运动发散, 这就是冲击屈曲, 该临界值 λ_D 叫做临界阶跃载荷, 它满足:

$$(1 - \frac{\lambda_D}{\lambda_C})^{3/2} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \sqrt{(-b)} |\bar{u}| \frac{\lambda_D}{\lambda_C} \quad (14)$$

对照 (2) 和 (14), 可知如果结构的静力临界载荷已知, 则其阶跃临界载荷便迎刃而解, 于是由 (10) 可得圆柱壳的阶跃临界扭矩为:

$$M_D = M_C - \frac{3}{2^{2/3}} \alpha^{1/3} \beta^{-1} (\gamma f_{01})^{2/3} \quad (15)$$

进一步由 (2) 和 (14) 可得:

$$(\frac{\lambda_C - \lambda_D}{\lambda_C - \lambda_S})^{3/2} = \sqrt{2} \frac{\lambda_D}{\lambda_C} \quad (16)$$

(16) 式表明, 如果 λ_C 和 λ_S 可以求得, 则 λ_D 也可由 (16) 式确定, 显然有 $\lambda_D < \lambda_S < \lambda_C$, Thompson 从离散坐标理论出发 [9], 得到了非静力 (astatic) 的屈曲载荷的渐近式:

$$(\frac{\lambda_C - \lambda_N}{\lambda_C - \lambda_S})^{3/2} = \sqrt{2} \quad (17)$$

λ_N 是 λ_D 的下界. 对于缺陷很小的情况, (16) 和 (17) 式是等价的.

表1给出了我们对弹性圆柱壳静力扭转屈曲和冲击扭转屈曲的实验结果, 试件为铝合金, $E=2230\text{kg/mm}^2$, $\nu=0.33$, $R=32.75\text{mm}$, $H=0.2\text{mm}$. 表中经典临界扭矩 M_c 服从于(11)式, 它是通过求解线性本征值问题得到的, 阶跃冲击扭转屈曲实验是在 Hopkinson 扭杆上完成的, 可以看出, 表1给出的结果与以上渐近分析的结论是相近的. 因此, 如果在完成有缺陷柱壳的静力屈曲分析之后, 我们可借助(16)或(17)式预言阶跃荷载作用下的动力屈曲扭矩.

表1 临界屈曲扭矩 (kg-mm)

Table 1 Critical buckling torque (kg-mm)

L(mm)	80	65	52	39
M_c	2520(8)	2820(9)	3150(10)	3660(11)
M_S 实验值	2130(9)	2380(10)	2580(11)	3090(12)
M_D 实验值	1716(10)	2288(10,11)	2452(12)	3069(13,14)

注: 表中括号内数字为周向屈曲波纹数.

四、扭转冲击后屈曲特性

下面首先建立圆柱壳受扭时的动力非线性方程. 如果忽略壳体的轴向和周向惯性效应, 则任一时刻 t 时壳体的动能 K 可以表示为:

$$K = \frac{\rho H}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (w_{,t})^2 dx dy = \frac{\rho H}{2} (f_{1,t}^2 + f_{2,t}^2) \quad (18)$$

其中 ρ 为壳体的密度. 根据能量守恒原理有:

$$E + K = \text{常数} \quad (19)$$

将上述两边对 $f_1(t)$ 求导数, 并应用(8), (7), (18), 可得:

$$\left(1 + \frac{n^4}{4R^2} f_1^2\right) \frac{\partial^2 f_1}{\partial \tau^2} + \frac{n^4}{4R^2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \tau}\right)^2 f_1 = Q(f_1) \quad (20)$$

其中:

$$\begin{aligned} Q(f_1) = & G_0 \{4G_1 f_1 (f_1^2 - f_{01}^2) + 2G_2 (f_1 f_2 - f_{01} f_{02}) (f_2 + f_1 \bar{f}_2) \\ & + G_3 [f_1 f_2 - f_{01} f_{02} + (f_1 - f_{01}) (f_2 + f_1 \bar{f}_2)] \\ & + G_4 [\bar{f}_2 (f_1^2 - f_{01}^2) + 2f_1 (f_2 - f_{02})] \\ & + 2G_5 (f_1 - f_{01}) + 2G_6 \bar{f}_2 (f_2 - f_{02})\} + 2G_7 f_1 \\ & \tau = t / \sqrt{\rho H} \quad \bar{f}_2 = \frac{n^2}{2R} f_1 \end{aligned}$$

(20)式即所求的弹性圆柱壳冲击扭转屈曲动力方程, 若认为初始时刻, 壳体是静止的, 则相应的初始条件为:

$$f_1(0) = f_{01} \quad f_{1,\tau} = 0 \quad (21)$$

(20)(21)两式可以通过龙格-库塔法进行求解.

和文献 [6] 相同, 我们仍采用 Budiansky-Roth 运动准则来确定临界阶跃扭矩, 这一准则是采用数值方法来分析冲击屈曲的重要手段, 其基本思想是: 如果所加动力载荷的一个微小变化可以导致结构响应的一个巨大变化, 则结构发生屈曲. 另一方面从 $f_1(\tau) - f_{1,\tau}(\tau)$ 的相平面曲线特性来看, 当所加阶跃扭矩较小时, 该相平面曲线为一闭合曲线, 但当所加阶跃扭矩大于临界阶跃扭矩时, 相平面曲线发散 (见图 2 所示). 图 1 所使用的有关参数为: $L=80\text{mm}$, $H=0.2\text{mm}$, $R=32.75\text{mm}$, $E=2230\text{kg/mm}^2$, $\nu=0.33$, $f_{01}=0.05H$.

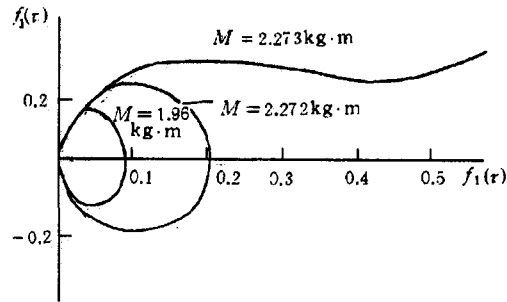


图 2 相平面曲线

Fig. 2 Phase-plane curve

显然, 如果不考虑 (20) 式中和时间相关的量, 则得到一个静力平衡方程:

$$Q(f_1) = 0 \quad (22)$$

(22) 式给出了静态扭矩作用下的 $M-f_1$ 曲线, 该曲线上 M 的最大值便是静态临界扭矩.

以下作为算例对图 2 所用过的壳体, 取不同的初缺陷 f_{01} , 分别由 (10)(15)(20)(22) 得到临界静态扭矩和临界阶跃扭矩, 见图 3—图 5. 可见临界静态扭矩大于临界阶跃扭矩, 这和本文的前述讨论是一致的. 图 4 和图 5 表明, 当初缺陷 f_{01} 较大时, 由 (10)(15) 确定的 M_s 和 M_D 和由 (22)(20) 所确定相应值有较大的差距, 这种差距的原因在于 (10) 和 (15) 是基于 (1) 和 (13) 得到的, 它仅考虑了位移的三次方项, 而忽略了更高阶的项, 同时它也仅考虑了初缺陷的线性项, 这便导致了初缺陷较大时的误差. 其实我们在前边已经指出, Koiter 理论的条件是初缺陷为小量.

仍取 $f_{01}=0.05H$, 图 6 是不同阶跃扭矩下 $f_1(\tau)$ 随 τ 的变化曲线, 当所加扭矩为 $2.272\text{kg}\cdot\text{m}$ 时, $f_1(\tau)$ 呈等幅的周期变化, 且幅值较小, 此时壳体没有发生冲击屈曲. 当所加阶跃扭矩为 $2.273\text{kg}\cdot\text{m}$ 时, $f_1(\tau)$ 首先达到一个最大值, 然后也呈周期变化, 但这时的 $f_1(\tau)$ 最大值要比 M 为 $2.272\text{kg}\cdot\text{m}$ 时的幅值大的多, 因此这时结构发生冲击扭转屈曲. 值得注意的是当壳体发生冲击屈曲后, 其 $f_1(\tau)$ 的周期变大, 这正是我们在本文中所要探讨的弹性圆柱壳冲击扭转后屈曲特性.

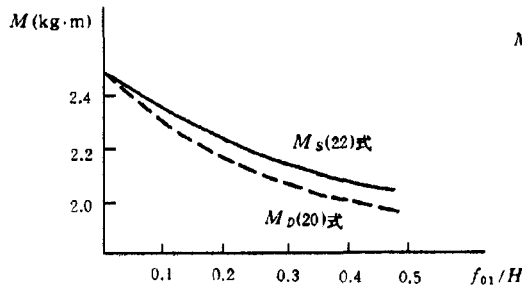


图 3 静、动态缺陷敏感性
Fig. 3 Static and dynamic imperfection sensitivity

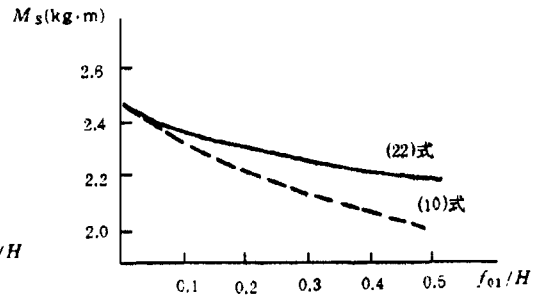


图 4 静态临界扭矩
Fig. 4 Critical static torque

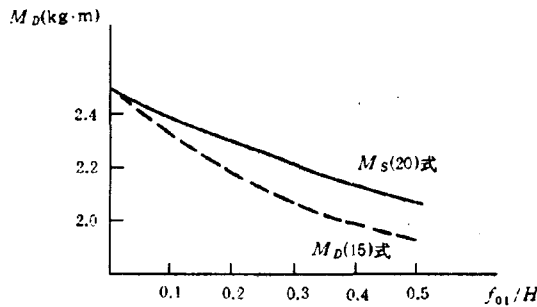


图 5 阶跃临界扭矩
Fig. 5 Critical step torque

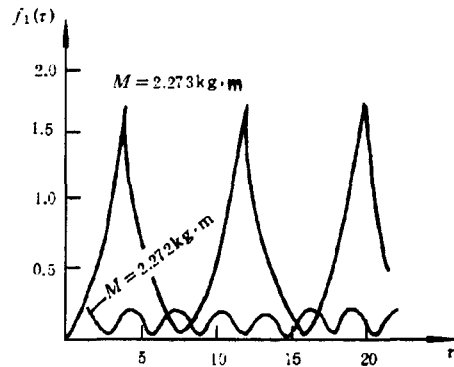


图 6 冲击扭转后屈曲特性
Fig. 6 Impact torsional post-buckling behavior

五、小 结

本文基于 Koiter 后屈曲理论和 Budiansky 离散坐标理论, 讨论了受扭圆柱壳的初缺陷敏感性并给出了临界阶跃扭矩, 研究表明受扭圆柱壳对应于对称失稳的情形.

Hopkinson 扭杆上的实验结果和基于非线性动力方程的数值结果支持了渐近分析的结论.

圆柱壳的冲击后屈曲过程中, 其振动幅值剧增, 周期变大.

参 考 文 献

- [1] 黄宝宗, 任文敏, Koiter 稳定理论及其应用. 力学进展, 1987,17(1):30-38
- [2] Thompson J M T and Hunt G W. A General Theory of Elastic Stability. London: Wiley 1973.
- [3] Budiansky B and Hutchinson J W. Dynamic Buckling of Imperfection Sensitive Structures. Proc. 11th International Cong. Appl. Mech., Munich, 1966, Berlin: Springer-Verlag, 636-651
- [4] Leyko L and Sprzyński S. Energy Method of Analysis of Dynamic Stability of a Cylindrical Shell Subjected to Torsion. Arch. Mech., 1974, 26(1): 13-24
- [5] 王德禹, 杨桂通. 弹性圆柱壳冲击扭转屈曲的突变模型. 固体力学学报, 1992, 13(3): 201-206
- [6] 王德禹, 杨桂通. 带有初缺陷的弹性圆柱壳冲击扭转屈曲. 工程力学, 1992,9(1):19-23

- [7] Budiansky B. Dynamic Buckling of Elastic Structures: Criteria and Estimates. in "Dynamic Stability of Structures", ed. by Herrmann G, Pergamann Press, 1967, 83—106
- [8] Budiansky B. Post-buckling Behavior of Cylinders in Torsion. in "Theory of Thin Shells", ed by Niordson F I, 1969, 212—233
- [9] Thompson J M T. Dynamic Buckling under Step Loading. in Dynamic Stability of Structures. ed by Herrmann G, Pergamann Press, 1967, 215—236

THE IMPACT BUCKLING OF ELASTIC CYLINDER UNDER STEP TORQUE

Zhang Shanyuan Wang Deyu and Yang Guitong

(*Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China*)

Abstract Based on the Koiter's initial post-buckling theory and Thompson's discrete coordinate approach, the imperfection sensitivity and impact buckling of cylinder under torsion are studied. It is shown that it corresponds to symmetric buckling. By solving the nonlinear dynamic equation numerically, it is found that in the process of post-buckling under step torque, the shell will vibrate with a longer period and its amplitude is increased abruptly. Also, some experimental results for the impact buckling of cylinders subject to step torque is reported.

Key words elastic cylinders, torsion, impact buckling