第 25 卷 第 3 期 力 学 学 报 Vol.25, No.3
1993 年 5 月 ACTA MECHANICA SINICA May, 1993

柔性机械臂动力学方程单向递推组集方法*

潘振宽 洪嘉振 刘延柱
(上海交通大学，上海 200030)

提要 本文基于 Jourdain 变分原理提出一种柔性机械臂动力学方程的单向递推组集方法. 用规则标号法描述系统中物体和铰的邻接关系；用铰相对坐标和模态坐标分别描述物体的大位移运动和弹性变形. 文末以三连杆机器人操作手为例说明本文建模的过程.

关键词 柔性体，机械臂，动力学方程，单向递推，组集方法

一、引 言

航天机械臂，工业机器人操作手等的抽象模型为链状拓扑结构的多体系统. 由于这类系统中广泛采用轻质量，大尺度的柔性部件，及其自身高速运行的特点，部件的弹性效应成为目前工程界普遍关注的问题，建立这类系统有效的数学模型并进行正确的快速仿真是目前动力学领域研究的热点之一.

多体系统的动力学仿真除满足系统的设计，分析和优化外，另一个迫切的任务就是为控制系统的设计服务. 系统的动力学模型不但应与控制系统有良好的接口，还必需具有高效的计算特点，以最大限度地降低仿真计算的费用. 柔性多体系统动力学方程非常复杂，其传统的建模方法主要有绝对坐标方法与铰相对坐标方法，前者程式化强，但计算效率不高，且不利于控制系统的实时，后者恰恰相反，提出一种同时具备以上优点的柔性多体系统动力学方程建立方法是本文的目的所在. 为此，本文针对链状拓扑结构的柔性多体系统，首先以递推的方式建立了系统的运动学关系，在递推的每一步，直接调用绝对坐标方法物体广义质量矩阵与广义力列阵的程式化形式，并同时形成该物体对铰相对坐标与模态坐标表达的系统动力学方程中广义质量阵与广义力列阵的贡献，然后通过类似于有限单元法中刚度矩阵与等效结点力列阵的叠加形成方式得到系统的广义质量阵与广义力列阵.

目前对柔性多体系统动力学递推建模方法的研究远不及对多刚体系统的研究. 见诸文献的有 Singh et al.[3], Amirouche et al.[4], Ider[5] 基于 Kane 方法建立的柔性多体系统动力学递推方程，林宣玖，谢传锋 [2] 基于虚功原理建立的树状及含闭环系统的柔性多体系统动力学递推方程，及 Changizi et al.[6], Kim et al.[7] 分别基于 Shabana[8], Haug et al.[9] 的绝对坐标程式化建模方法的递推建模方法. [7] 的方法分为运动学正向递推及动力学逆向折合递推，分析过程比较繁琐，本文方法将运动学分析与动力学建模融合于单一的正向递

* 国家自然科学基金与上海市青年科技基金资助项目.
本文于 1992 年 3 月 2 日收到来稿，于 1992 年 7 月 13 日收到修改稿.

推过程中同时完成，该方法已成功地推广到树状及含闭环的柔性多体系统的建模，限于篇幅，另文介绍.

文末，以三连杆机械臂为例详细说明了本文的建模过程.

二、链状多体系统运动学递推方程

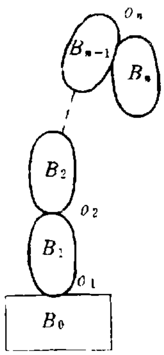

图 1 链状多体系统

Fig. 1 Chain structure of multibody systems

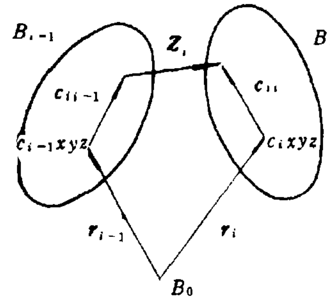

图 2 相邻物体运动学关系

Fig. 2 Kinematical relationship between contigous bodies

图 1 为由几个物体构成的链状柔性多体系统，按文 [1] 对其进行规则标号， B_0 对应惯性空间. 图 2 为系统中任意两相邻物体 B_{i-1}, B_i, 其中 O_i 为两物体间的铰，容许 1–6 个自由度. $C_{i-1}xyz, C_ixyz$ 分别为对应物体的浮动坐标系，其原点固结于物体未变形状态时的质心. 瞬时体铰矢量 $\boldsymbol{C}_{i-1i}, \boldsymbol{C}_{ii}$ 可表达为

$$\boldsymbol{C}_{i-1i} = \boldsymbol{C}^0_{i-1i} + \boldsymbol{\varphi}_{i-1it} a_{i-1} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{C}_{ii} = \boldsymbol{C}^0_{ii} + \boldsymbol{\varphi}_{iit} a_i \tag{2}$$

其中， $\boldsymbol{C}^0_{i-1i}, \boldsymbol{C}^0_{ii}$ 为两铰结点在未变形状态下相对原点 C_{i-1}, C_i 的位矢， $\boldsymbol{\varphi}_{i-1it}, \boldsymbol{\varphi}_{iit}$ 为两铰结点处微元对应的平移模态矩阵， $\boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_i$ 分别为两物体的模态坐标列阵. 浮动坐标系的绝对角速度及其原点的位矢可分别表示为

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \boldsymbol{\Omega}_{i-1i} + \boldsymbol{\Omega}_i - \boldsymbol{\Omega}_{ii} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_{i-1} + \boldsymbol{C}_{i-1i} + \boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{C}_{ii} \tag{4}$$

其中， $\boldsymbol{\Omega}_{i-1i}$, $\boldsymbol{\Omega}_{ii}$ 为铰点处微元相对物体浮动坐标系的微转动角速度,

$$\boldsymbol{\Omega}_{i-1,i} = \boldsymbol{\varphi}_{i-1ir} \dot{\boldsymbol{a}}_{i-1} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{ii} = \boldsymbol{\varphi}_{iir} \dot{\boldsymbol{a}}_i \tag{6}$$

其中， $\boldsymbol{\varphi}_{i-1ir}, \boldsymbol{\varphi}_{iir}$ 为铰结点处微元对应的转动模态矩阵. $\boldsymbol{d}_i, \boldsymbol{\Omega}_i$ 为铰 O_i 上的相对位移和相对角速度，由文 [1] 知

$$\boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{K}_i^T \boldsymbol{q}_i + \boldsymbol{\alpha}_i^0 \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_i = \boldsymbol{P}_i^T \boldsymbol{q}_i \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{K}_i, \boldsymbol{P}_i$ 分别为铰滑移轴与铰转动轴基矢量阵 [1], $\boldsymbol{q}_i$ 为铰相对坐标列阵.

以后说 $\boldsymbol{V}_i = [\dot{\boldsymbol{r}}_i\ \boldsymbol{\omega}_i\ \dot{\boldsymbol{a}}_i^T]^T$, 由 (1 — 8) 可求得如下矩阵形式速度变分及加速度递推关系

$$\delta \boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{G}_{ii-1}\delta \boldsymbol{V}_{i-1} + \boldsymbol{X}_{ii}\delta \dot{\boldsymbol{x}}_i \tag{9}$$

$$\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{G}_{ii-1}\boldsymbol{V}_{i-1} + \boldsymbol{X}_{ii}\ddot{\boldsymbol{x}}_i + \boldsymbol{R}_i \tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{x}_i = [\boldsymbol{q}_i^T\ \boldsymbol{a}_i^T]^T$ (系数矩阵 $\boldsymbol{G}_{ii-1}$, $\boldsymbol{X}_{ii}$ 及 $\boldsymbol{R}_i$ 略), 令 $\boldsymbol{V}_0 = [\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. 将以上递推关系由基体开始递推，得到如下新型的递推关系.

$$\delta \boldsymbol{V}_i = \sum_{j=1}^{i} \boldsymbol{H}_{ij}\delta \dot{\boldsymbol{x}}_j \tag{11}$$

$$\boldsymbol{V}_i = \sum_{j=1}^{i} \boldsymbol{H}_{ij}\ddot{\boldsymbol{x}}_j + \sum_{j=1}^{i} \boldsymbol{R}_{ij} \tag{12}$$

其中系数矩阵的递推运算形式为

$$\boldsymbol{H}_{ij} = \begin{cases} \boldsymbol{G}_{ii-1}\boldsymbol{H}_{i-1,j} & (j < i) \\ \boldsymbol{X}_{jj} & (j = i) \end{cases} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{R}_{ij} = \begin{cases} \boldsymbol{G}_{ii-1}\boldsymbol{R}_{i-1,j} & (j < i) \\ \boldsymbol{R}_{j} & (j = i) \end{cases} \tag{14}$$

三、系统动力学方程的程式化组集方法

对图 1 所示系统，其动力学方程的 Jourdain 变分表达式为 [7]

$$\sum_{i=1}^{n} \delta \boldsymbol{V}_i^T \cdot (\boldsymbol{m}_i \boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{Q}_i) = 0 \tag{15}$$

其中，$\boldsymbol{m}_i$ 为由绝对坐标方法得到的物体广义质量阵，$\boldsymbol{Q}_i$ 为包括广义弹性力，惯性力，广义外力的广义力列阵.

当运动学递推关系计算到 B_1 时，(15) 变为

$$\delta \dot{\boldsymbol{x}}_1'^T(\boldsymbol{m}^{(1)}\ddot{\boldsymbol{x}}_1' - \boldsymbol{Q}^{(1)}) + \sum_{i=2}^{n} \delta \boldsymbol{V}_i^T \cdot (\boldsymbol{m}_i \boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{Q}_i) = 0 \tag{16}$$

其中，

$$\boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{x}_1$$

$$\boldsymbol{m}^{(1)} = \boldsymbol{H}_{11}^T \cdot \boldsymbol{m}_1 \boldsymbol{H}_{11} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{Q}^{(1)} = \boldsymbol{H}_{11}^T(\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{m}_1 \boldsymbol{R}_{11}) \tag{18}$$

将上述 (17),(18) 式扩充到与系统广义质量阵与广义力列阵相同的维数，即

$$\overline{\boldsymbol{m}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \overline{\boldsymbol{Q}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

则 (16) 式可改写为

$$\delta \dot{\boldsymbol{x}}^T (\overline{\boldsymbol{m}}^{(1)} \ddot{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{Q}}^{(1)}) + \sum_{i=2}^{n} \delta \boldsymbol{V}_i^T \cdot (\boldsymbol{m}_i \boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{Q}_i) = 0 \tag{19}$$

其中， $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}_1^T \cdots \boldsymbol{x}_n^T]$,

$\cdots\cdots\cdots\cdot$

当运动学递推关系进行到第 k 个物体时，由同样的方法可将 (19) 式写为

$$\delta \dot{\boldsymbol{x}}^T \left[\left(\sum_{i=1}^{k} \overline{\boldsymbol{m}}^{(k)} \right) \ddot{\boldsymbol{x}} - \left(\sum_{i=1}^{k} \overline{\boldsymbol{Q}}^{(k)} \right) \right] + \sum_{i=k+1}^{n} \delta \boldsymbol{V}_i^T \cdot (\boldsymbol{m}_i \boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{Q}_i) = 0 \tag{20}$$

其中,

$$\overline{\boldsymbol{m}}^{(k)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{k1}^T \cdot \boldsymbol{m}_k \boldsymbol{H}_{k1} & \cdots & \boldsymbol{H}_{k1}^T \cdot \boldsymbol{m}_k \boldsymbol{H}_{kk} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{H}_{kk}^T \cdot \boldsymbol{m}_k \boldsymbol{H}_{k1} & \cdots & \boldsymbol{H}_{kk}^T \cdot \boldsymbol{m}_k \boldsymbol{H}_{kk} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{Q}}^{(k)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{k1}^T \cdot (\boldsymbol{Q}_k - \boldsymbol{m}_k \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{R}_{kj}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}_{kk}^T \cdot (\boldsymbol{Q}_k - \boldsymbol{m}_k \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{R}_{kj}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

当运动学关系进行到末端体时， (20) 变为

$$\delta \dot{\boldsymbol{x}}^T (\boldsymbol{A} \ddot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{B}) = 0 \tag{21}$$

其中，

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\boldsymbol{m}}^{(i)} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\boldsymbol{Q}}^{(i)} \tag{23}$$

由于 $\delta \dot{\boldsymbol{x}}$ 为独立变分，由 (21) 得系统状态方程

$$\boldsymbol{A} \ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{B} \tag{24}$$

其中， $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，且在 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的形成过程中，无需对 $\boldsymbol{m}^{(i)}, \boldsymbol{Q}^{(i)}$ 进行扩充，只要确定出每个物体的相应贡献在系统广义质量阵 $\boldsymbol{A}$ 和系统广义力列阵 $\boldsymbol{B}$ 中的位置直接叠加即可，同时，只要充分利用 $\boldsymbol{A}$ 的对称性可进一步提高计算效率.

综上所述，系统动力学递推建模与计算流程如图 3 所示.

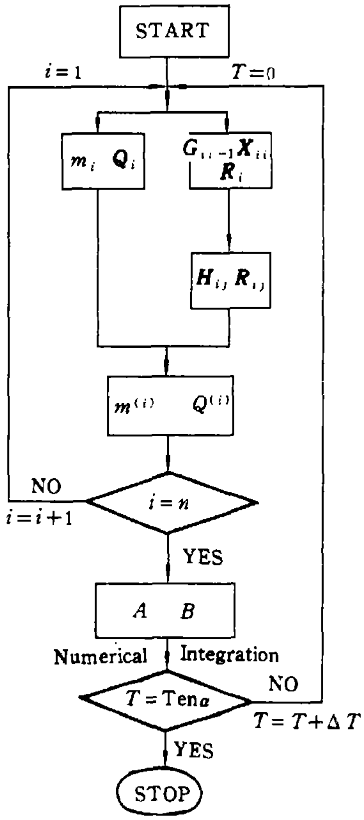

图 3　系统动力学递推建模与计算流程

Fig. 3　Flow chart for recursive construction and computation of dynamics

四、 实 例 说 明

本节以平面三连杆机械臂为例进一步说明系统动力学方程的广义质量阵与广义力列阵的递推组集形成过程．系统构形如图 4 所示

铰 O_1, O_2, O_3 为转动铰、物体 B_1, B_2, B_3 为等截面匀质梁状部件， $\boldsymbol{x}_i = [\theta_i \ \ \boldsymbol{a}_i^T]^T$ $(i=1,\cdots 3)$

对第一个物体：

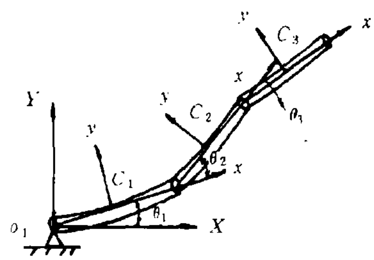

图 4　三连杆机械臂操作手

Fig. 4　A manipulator with three links

$$\boldsymbol{H}_{11} = \boldsymbol{X}_{11}, \qquad \boldsymbol{R}_{11} = \boldsymbol{R}_1$$

该物体对系统动力学方程的贡献为

$$\boldsymbol{m}^{(1)} = \boldsymbol{H}_{11}^T \cdot \boldsymbol{m}^{(1)} \boldsymbol{H}_{11}, \qquad \boldsymbol{Q}^{(1)} = \boldsymbol{H}_{11}^T \cdot (\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{m}_1 \boldsymbol{R}_{11})$$

对第二个物体：

$$\boldsymbol{H}_{21}=\boldsymbol{G}_{21}\boldsymbol{H}_{11},\quad \boldsymbol{H}_{22}=\boldsymbol{X}_{22},\quad \boldsymbol{R}_{21}=\boldsymbol{G}_{21}\boldsymbol{R}_{11},\quad \boldsymbol{R}_{22}=\boldsymbol{R}_{2},$$

$$\boldsymbol{m}^{(2)}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{21}^{T}\cdot \boldsymbol{m}_2\boldsymbol{H}_{21} & \boldsymbol{H}_{21}^{T}\cdot \boldsymbol{m}_2\boldsymbol{H}_{22} \\ \boldsymbol{H}_{22}^{T}\cdot \boldsymbol{m}_2\boldsymbol{H}_{22} & \boldsymbol{H}_{22}^{T}\cdot \boldsymbol{m}_2\boldsymbol{H}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}^{(2)}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{21}^{T}\cdot(\boldsymbol{Q}_2-\boldsymbol{m}_2\sum_{j=1}^{2}\boldsymbol{R}_{2j}) \\ \boldsymbol{H}_{22}^{T}\cdot(\boldsymbol{Q}_2-\boldsymbol{m}_2\sum_{j=1}^{2}\boldsymbol{R}_{2j}) \end{bmatrix}$$

对第三个物体：

$$\boldsymbol{H}_{31}=\boldsymbol{G}_{32}\boldsymbol{H}_{21},\quad \boldsymbol{H}_{32}=\boldsymbol{G}_{32}\boldsymbol{H}_{22},\quad \boldsymbol{H}_{33}=\boldsymbol{X}_{3},$$

$$\boldsymbol{R}_{31}=\boldsymbol{G}_{32}\boldsymbol{R}_{21},\quad \boldsymbol{R}_{32}=\boldsymbol{G}_{32}\boldsymbol{R}_{22},\quad \boldsymbol{R}_{33}=\boldsymbol{X}_{3},$$

$$\boldsymbol{m}^{(3)}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{31}^{T}\cdot \boldsymbol{m}_3\boldsymbol{H}_{31} & \boldsymbol{H}_{31}^{T}\cdot \boldsymbol{m}_3\boldsymbol{H}_{32} & \boldsymbol{H}_{31}^{T}\cdot \boldsymbol{m}_3\boldsymbol{H}_{33} \\ \boldsymbol{H}_{32}^{T}\cdot \boldsymbol{m}_3\boldsymbol{H}_{31} & \boldsymbol{H}_{32}^{T}\cdot \boldsymbol{m}_3\boldsymbol{H}_{32} & \boldsymbol{H}_{32}^{T}\cdot \boldsymbol{m}_3\boldsymbol{H}_{33} \\ \boldsymbol{H}_{33}^{T}\cdot \boldsymbol{m}_3\boldsymbol{H}_{31} & \boldsymbol{H}_{33}^{T}\cdot \boldsymbol{m}_3\boldsymbol{H}_{32} & \boldsymbol{H}_{33}^{T}\cdot \boldsymbol{m}_3\boldsymbol{H}_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}^{(3)}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{31}^{T}\cdot(\boldsymbol{Q}_3-\boldsymbol{m}_3\sum_{j=1}^{3}\boldsymbol{R}_{3j}) \\ \boldsymbol{H}_{32}^{T}\cdot(\boldsymbol{Q}_3-\boldsymbol{m}_3\sum_{j=1}^{3}\boldsymbol{R}_{3j}) \\ \boldsymbol{H}_{33}^{T}\cdot(\boldsymbol{Q}_3-\boldsymbol{m}_3\sum_{j=1}^{3}\boldsymbol{R}_{3j}) \end{bmatrix}$$

经叠加后得到系统广义质量阵 $\boldsymbol{A}$ 及广义力列阵 $\boldsymbol{B}$ 的分块形式为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} \\ \boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{A}_{32} & \boldsymbol{A}_{33} \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_3 \end{bmatrix}$$

其中各元素分别为：

$$\left\{\begin{array}{llll} \boldsymbol{A}_{11}= & \boldsymbol{m}_{11}^{(1)}+ & \boldsymbol{m}_{11}^{(2)}+ & \boldsymbol{m}_{11}^{(3)} \\ \boldsymbol{A}_{12}= & & \boldsymbol{m}_{12}^{(2)}+ & \boldsymbol{m}_{12}^{(3)} \\ \boldsymbol{A}_{13}= & & & \boldsymbol{m}_{13}^{(3)} \\ \boldsymbol{A}_{22}= & & \boldsymbol{m}_{22}^{(2)}+ & \boldsymbol{m}_{22}^{(3)} \\ \boldsymbol{A}_{23}= & & & \boldsymbol{m}_{23}^{(3)} \\ \boldsymbol{A}_{33}= & & & \boldsymbol{m}_{33}^{(3)} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llll} \boldsymbol{B}_{1}= & \boldsymbol{Q}_{1}^{(1)}+ & \boldsymbol{Q}_{1}^{(2)}+ & \boldsymbol{Q}_{1}^{(3)} \\ \boldsymbol{B}_{2}= & & \boldsymbol{Q}_{2}^{(2)}+ & \boldsymbol{Q}_{2}^{(3)} \\ \boldsymbol{B}_{3}= & & & \boldsymbol{Q}_{3}^{(3)} \end{array}\right.$$

五、　总　　结

本文在 Jourdain 变分原理基础上提出一种以递推方式程式化地建立柔性机械臂系统动力学状态方程的新方法．由于在递推的每一步都可以调用由绝对坐标系方法得到的物体广义质量阵及广义力列阵，且状态方程用较相对坐标和模态坐标表达，因而具有绝对坐标方法的较强的程式化的优点，又具有较相对坐标方法较高计算效率的特点．

本文方法很容易推广到树状及含闭环的柔性多体系统动力学的程式化建模，相应的工作已经完成．

参　考　文　献

[1] 刘延柱，洪嘉振，杨海兴，多刚体系统动力学，高等教育出版社， 1989

[2] 林宝玖，谢传锋，挠性多体系统动力学，力学学报， 1989, 21(4)

[3] Singh R P, VanderVoort R J & Likins P W, Dynamics of flexible bodies in tree-topology — a computer-oriented approach, *Journal of Guidance & Control*, 1985,8:584 — 590

[4] Amirouche F M L, Ider S K, A recursive formulation of the equations of motion for articulated structures with closed loops — an automated approach, *Computers & Structures*, 1988,30(5):1135 — 1145

[5] Ider S K, Finite-element based recursive formulation for real time dynamic simulation of flexible multibody systems, *Computers & Structrues* 1991, 40(4): 939 — 945

[6] Changgizi K, Shabana A A, A recursive formulation for the dynamic analysis of open loop deformable multibody systems, *Journal of Appled Mechanics*, 1988, 55(9): 689 — 693

[7] Kim S S, Haug E J, A recursive formulation for the flexible multibody dynamics. Part I. Open-loop systems, *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 1988, 71: 293 — 314

[8] Shabana A A, Dynamics of multibody systems, John Wiley & Sons, New York, 1989

[9] Haug E J, Wu C S & Kim S S, Dynamics of flexible machines: a variational approach . Dynamics of multibody systems (Bianchi G. & Schiehlen W. eds), Springer-Verlag, Berlin, 55 — 68

A SINGLE DIRECTION RECURSIVE CONSTRUCTION METHOD FOR DYNAMIC EQUATIONS OF FLEXIBLE MANAPULATORS

Pan Zhenkuan,　Hong Jiazhen,　Liu Yanzhu

(*Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200030)

Abstract　In this paper, a new recursive technique for construction of dynamic equations of flexible manapulators is suggested based on the Jourdain's principle. The structure of the system is described through regular labelling method; The joint relative coordinates and modal coordinates are used to describe the large displacements between contiguous bodies and small deformations of bodies. At first, the recursive kinematic relations are derived, and in every step of recursion, contributions of every body to the generalized mass matrix and generalized force matrix are formed through calling the body's mass matrix and force matrix in absolute coordinates. Finally, the method in this paper is demonstrated through an example of a manapulator with three flexible links.

Key words　flexible body, manapulators, recursive method, dynamic equations, construction