

一个厚薄板通用的三角形板弯元

徐仲年

(上海飞机研究所, 上海 200232)

提要 本文提出了一个新的厚薄板通用的三角形板弯元, 根据 Hellinger-Reissner 变分原理推导出来的新单元具有独立的转角、位移、剪应变和弯曲应变的插入函数, 它没有其它混合元所存在的一些缺点. 一些典型例子表明这个新单元具有很好的特性, 刚度矩阵简单, 计算精度高, 收敛速度快以及厚薄板通用性强.

关键词 变分原理, 形函数, 厚薄板元, 稳定性, 相容性

一、引 言

按 Kirchhoff 假设建立的薄板弯曲有限元要求形函数具有一阶连续导数, 从而使薄板弯曲有限元的建立存在着许多困难. 最近二十年来, 各种混合型变分原理及降阶积分技术为薄板弯曲元以及厚薄板通用弯曲元的建立提供了新的途径. 同时不少作者也证明了某些降阶积分元和混合型元之间的互等性^[1-6]. 为了保证有限元解收敛到微分方程的精确解, 必需使混合元的刚度矩阵满足稳定性和相容性条件, 即满足 Babuska-Brezzi 条件及顺利地通过相容性的分片试验.

本文从 Hellinger-Reissner 变分原理中推导出一个按 Reissner-Mindlin 厚板理论为基础的厚薄板通用的三角形板弯元. 这个元是一个每个节点具有三个自由度并包括二个内部转角自由度的三节点元, 经分析表明: 这个新单元满足 Babuska-Brezzi 稳定条件, 并能顺利地通过 Robinson 提出的纯弯、纯扭及纯剪分片试验^[7]. 典型的数值例子表明: 尽管这个元的形函数比较简单, 但它具有计算精度高收敛速度快及厚薄板通用性强的特点.

文章还证明了这个混合元可看作对剪切能采用一点高斯积分的降阶积分元.

二、势能泛函及稳定性条件

取板中面为 xy 平面, z 轴与 x, y 轴垂直, 正方向如图 1 所示, 这时, 剪应变和弯曲应变分别为:

本文于 1991 年 6 月 18 日收到第一稿, 于 1992 年 11 月 20 日收到修改稿.

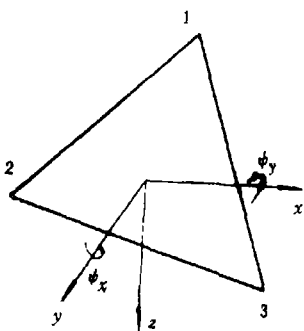


图 1
Fig. 1

$$\bar{\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \end{bmatrix} = \nabla w - \theta \quad (1)$$

$$\bar{\kappa} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right) \end{bmatrix} = L\theta \quad (2)$$

w , ψ_x 和 ψ_y 分别为法向位移及绕 y 轴和 x 轴的转角. 正方向如图 1 所示.

平板弯曲的 Hellinger-Reissner 势能泛函为 [8]:

$$\pi_{HR} = \int_A (\kappa^T D_b \bar{\kappa} - \frac{1}{2} \kappa^T D_b \kappa) dA + \int (\gamma^T D_s \bar{\gamma} - \frac{1}{2} \gamma^T D_s \gamma) dA - \int w q dA + \pi_{ext} \dots \dots (3)$$

式中 γ , κ 分别为假设的独立剪应变和弯曲应变. π_{ext} 表示边界上其它载荷所作的功.

假设 γ 为含有未知系数 α_i 的多项式插入函数. 即

$$\gamma = P_\alpha \alpha \quad (4)$$

并设

$$k = B_b U \quad (5)$$

其中

$$U = [w, \psi_x, \psi_y]^T \quad (6)$$

同时

$$\bar{k} = \bar{B}_b U \quad (7)$$

$$\bar{\gamma} = \bar{B}_s U \quad (8)$$

$\bar{B}_b$, $\bar{B}_s$ 分别为应变位移转换阵. B_b 为独立的弯曲应变位移转换阵.

把 (4) 到 (8) 式代入 (3) 式, 并对 α 取导, 可得:

$$\alpha = H_\alpha^{-1} G_\alpha U \quad (9)$$

其中

$$H_\alpha = \int P_\alpha^T D_s P_\alpha dA \quad (10)$$

$$G_\alpha = \int P_\alpha^T D_s \bar{B}_s dA \quad (11)$$

再代回 (3) 式得:

$$\pi_{HR} = \frac{1}{2} U^T K_B U + \frac{1}{2} U^T K_s U - P U^T \quad (12)$$

P 为外力载荷阵.

其中

$$K_B = \int B_b^T D_b (2\bar{B}_b - B_b) dA \quad (13)$$

$$K_s = G_\alpha^T H_\alpha^{-1} G_\alpha \quad (14)$$

对于薄板弯曲, 因 $\gamma \rightarrow 0$, 可把 (1) 式改写成:

$$\pi'_{HR} = \int (\kappa^T D_b \bar{\kappa} - \frac{1}{2} \kappa^T D_b \kappa) dA + \int S^T (\nabla w - \theta) dA - \int w q dA + \pi_{\text{ext}} \quad (15)$$

式中 S 为独立剪应力.

设:

$$\theta = N_\theta \hat{\theta}, \quad W = N_w \hat{W} + N_{w\theta} \hat{\theta}, \quad S = N_s \hat{S} \quad (16)$$

代入 (15) 式并取极值得:

$$\begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B^T & 0 & C \\ 0 & C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{S} \\ \hat{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_\theta \\ 0 \\ f_w \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中:

$$\begin{aligned} A &= \int_A [LN_\theta]^T D_b [LN_\theta] dA \\ B &= \int_A [\nabla N_{w\theta}^T N_s + N_\theta^T N_s] dA \\ C &= \int_A N_s^T \nabla N_w dA \\ f_\theta &= - \int_T N_\theta^T T dT - \int_A N_{w\theta}^T q dA \\ f_w &= - \int_T N_w F dT - \int_A N_w^T q dA \end{aligned} \quad (18)$$

T 表示边界上施加的力矩; F 表示边界上施加的剪力.

Zienkiewicz^[9,10] 指出对于 (17) 式非奇异性的最严格的必要条件为:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{n_\theta + n_w}{n_s} \geq 1 \\ \beta &= \frac{n_s}{n_w} \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

n_θ , n_s (或 n_r) 和 n_w 分别表示单元分片试验中的转角 θ , 独立剪应力 S (或独立剪应变 γ) 和位移 w 的末约束数.

三、三节点元

对于图 1 所示的三角形元, 取形心为坐标原点, 每一节点有三个自由度 (w_i , ψ_{xi} , ψ_{yi} , $i = 1, 2, 3$).

对薄板弯曲, $\frac{\partial w}{\partial x} \rightarrow \psi_x$, $\frac{\partial w}{\partial y} \rightarrow \psi_y$ 并且弯矩 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial \psi_x}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial \psi_y}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \rightarrow \frac{1}{2} (\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x})$. 考虑到这种情况, 假设位移形函数为 W_i , ψ_{xi} , 和 ψ_{yi} 的函数. 即:

$$W = \sum_{i=1}^3 \xi_i W_i + \zeta \sum_{i=1}^3 \{ \xi_i [(\xi_i - 1)x_i + \xi_j x_j + \xi_k x_k] \psi_{xi} + \xi_i [(\xi_i - 1)y_i + \xi_j y_j + \xi_k y_k] \psi_{yi} \} \quad (20)$$

$$j = 2, 3, 1, \quad k = 3, 1, 2$$

式中引进待定系数 ζ 的意义是反映位移和转角的关系程度, 其值大小将由下节作详细描述. 转角形函数为:

$$\psi_x = \sum_{i=1}^3 \xi_i \psi_{xi} + \lambda \xi_1 \xi_2 \xi_3 \psi_{x4} \quad (21)$$

$$\psi_y = \sum_{i=1}^3 \xi_i \psi_{yi} + \lambda \xi_1 \xi_2 \xi_3 \psi_{y4} \quad (22)$$

ξ_i , ($i = 1, 2, 3$) 为面积坐标. λ 为不等于零的任意数.

取二个独立剪应变 (即二个独立剪应力), 则

$$P_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

再令:

$$B_b = -\frac{1}{A} \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 & 0 & \eta(a_1\xi_2\xi_3 + a_2\xi_1\xi_3 + a_3\xi_1\xi_2) & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & \eta(b_1\xi_2\xi_3 + b_2\xi_1\xi_3 + b_3\xi_1\xi_2) \\ 0 & b_1 & a_1 & 0 & b_2 & a_2 & 0 & b_3 & a_3 & \eta(b_1\xi_2\xi_3 + b_2\xi_1\xi_3 + b_3\xi_1\xi_2) & \eta(a_1\xi_2\xi_3 + a_2\xi_1\xi_3 + a_3\xi_1\xi_2) \end{pmatrix} \quad (24)$$

式中 A 为三角形面积. 其中:

$$\begin{aligned} a_1 &= y_2 - y_3, & a_2 &= y_3 - y_1, & a_3 &= y_1 - y_2 \\ b_1 &= x_3 - x_2, & b_2 &= x_1 - x_3, & b_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

待定系数 η 必须满足下述条件:

$$\int B_b^T D_b (2\bar{B}_b - B_b) dA = \int \bar{B}_b D_b \bar{B}_b dA \quad (25)$$

从上节分析可知, 为了保证混合元的稳定性必需满足式 (19) 的条件. 现用文献 [9] 介绍的分片试验方法来验证这个单元 (图 2).

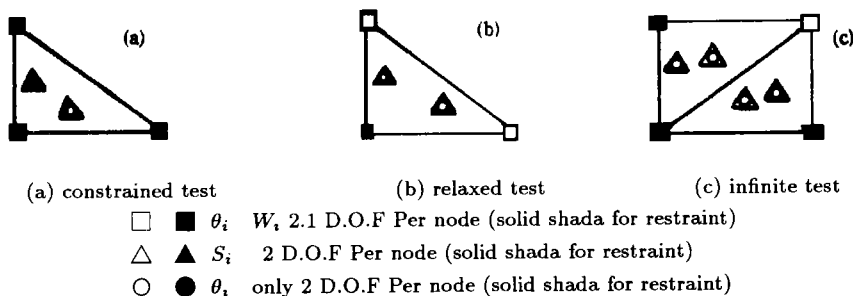


图 2 单元的分片试验

Fig. 2 Element patch tests

(a) 在受约束分片试验中:

$$\alpha = \frac{n_\theta + n_w}{n_s} = \frac{2}{2} = 1, \quad \beta = \frac{n_s}{n_w} = \frac{2}{0} > 1$$

(b) 在放松分片试验中:

$$\alpha = \frac{n_\theta + n_w}{n_s} = \frac{6+2}{2} = 4 > 1, \quad \beta = \frac{n_s}{n_w} = \frac{2}{2} = 1$$

(c) 在无限分片试验中:

$$\alpha = \frac{n_\theta + n_w}{n_s} = \frac{6+1}{4} = \frac{7}{4} > 1, \quad \beta = \frac{n_s}{n_w} = \frac{4}{1} > 1$$

以上三个分片试验表明新单元满足 Babuska-Brezzi 条件.

四、数值分析

1. ζ 值的选取

为了改善位移形函数的性能, 引进未知系数 ζ , 通过迭代和势能泛函对 ζ 取极值相结合的方法决定 ζ 值. 即先假定一个 ζ 值, 然后看能否满足 $\left| \frac{\partial \pi_{HR}}{\partial \zeta_i} - \zeta_{i-1} \right| \leq \varepsilon$ (ε 为规定的误差). 如满足此不等式 ζ_i 就是所求之值; 反之重复上述方法.

下面以正方形板为例决定 ζ 值. 图 3 表示一个承受集中或均布载荷的正方形板.

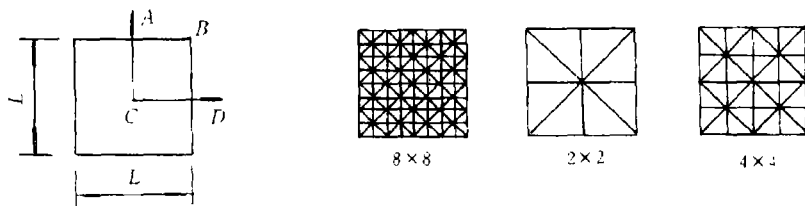


图 3 正方形板在四分之一板上划分网格

Fig. 3 Square plate meshes used in quarter-plate

$$E = 10.92 \times 10^5, L=10, \nu=0.3$$

表 1、表 2 表示正方形板在不同边界条件下受不同载荷时中心处位移和弯矩. 板厚为 0.1 和 3.5 两种.

从表 1 和表 2 中可以看到随着网格的细化, 不管承受何种载荷还是何种边界条件 ζ 值在 $t = 0.1$ 时都趋向于 $1/2$, 这恰好符合薄板情况. 从表 1 和表 2 中还可以看到迭代的 ζ 值和 $\zeta = 1/2$ 所计算得到的位移和弯矩无论对厚板还是对薄板都相差不大, 误差不超过 1%, 因此为了简化计算, 本文取 $\zeta = 1/2$.

在上述的计算中式 (21) 和 (22) 中的 λ 值可取任意不等于 0 的常数. 当 $\lambda = \frac{20}{9}$ 时, 这个元可看作对剪切能采用 1 点高斯积分的降阶积分元, 下面将证明两者的互等性.

包含剪切能的势能泛函也可写成:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_A \bar{\kappa}^T D_b \bar{\kappa} dA + \frac{1}{2} \int \bar{\gamma}^T D_s \bar{\gamma} dA - \int w q dA + \pi_{\text{ext}} \quad (26)$$

表 1 简支板在不同荷载下中心点位移和弯矩
Table 1 Centre displacement and bending moment under the different loads for simple supported square plate

T	load	0.1						0.35							
		uniform			centralization			uniform			centralization				
		$\zeta = \frac{1}{2}$		ζ^*	$\zeta = \frac{1}{2}$		ζ^*	$\zeta = \frac{1}{2}$		ζ^*	$\zeta = \frac{1}{2}$		ζ^*		
		W	M	W	M	W	M	W	M	W	M	W	M		
mesh															
2 × 2	0.42119	3.9451	0.42861	3.9970	0.011911	0.11071	0.011911	0.11071	0.16125 × 10 ⁻⁴	4.14441	0.16278 × 10 ⁻⁴	4.20764	0.5904 × 10 ⁻⁶	0.11508	0.5872 × 10 ⁻⁶
4 × 4	0.41145	4.5886	0.41225	4.5951	0.011751	0.18414	0.011750	0.18414	0.158 × 10 ⁻⁴	4.66752	0.159 × 10 ⁻⁴	4.70696	0.6777 × 10 ⁻⁶	0.18683	0.6778 × 10 ⁻⁶
8 × 8	0.40732	4.7330	0.40732	4.733	0.011649	0.25573	0.011649	0.25573	0.15549 × 10 ⁻⁴	4.75161	0.1557 × 10 ⁻⁴	4.75891	0.7623 × 10 ⁻⁶	0.25725	0.7624 × 10 ⁻⁶

T - thickness, ζ^* 由迭代法得到, 括号里的值表示 ζ^*

表 2 固支板在不同荷载下中心点位移和弯矩
Table 2 Centre displacement and bending moment under different loads for clamped square plate

T load	0.1						0.35									
	uniform			centralization			uniform			centralization						
	$\zeta = \frac{1}{2}$		ζ^*	$\zeta = \frac{1}{2}$		ζ^*	$\zeta = \frac{1}{2}$		ζ^*	$\zeta = \frac{1}{2}$		ζ^*				
mesh	W	M	W	M	W	M	W	M	W	M	W	M				
2 × 2	0.12908	1.51514	0.13049	1.51559 (0.3893)	0.005644	0.0587	0.005784 (0.1938)	0.0594 (0.1938)	0.92524 × 10 ⁻⁵	1.64879	0.92083 × 10 ⁻⁵	1.65353 (0.6481)	0.4461 × 10 ⁻⁶	0.06322	0.4578 × 10 ⁻⁶	0.06361 (-0.4243)
4 × 4	0.12857	2.07732	0.12857	2.07732 (0.5)	0.005697	0.13001	0.0057 (0.4763)	0.13023 (0.4763)	0.92321 × 10 ⁻⁵	2.19274	0.92159 × 10 ⁻⁵	2.19604 (0.85401)	0.5886 × 10 ⁻⁶	0.13418	0.5408 × 10 ⁻⁶	0.13664 (-0.1649)
8 × 8	0.12724	2.23580	0.12724	2.23580 (0.5)	0.005654	0.202	0.005654 (0.5)	0.202 (0.5)	0.91876 × 10 ⁻⁵	2.33477	0.91844 × 10 ⁻⁵	2.33567 (0.8764)	0.6274 × 10 ⁻⁶	0.20589	0.6284 × 10 ⁻⁶	0.21091 (-0.3085)

假设位移形函数仍由 (20) 式表示, 转角函数由下式所示:

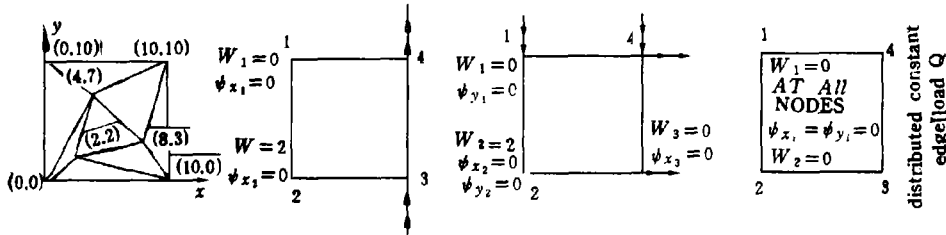
$$\psi_x = \sum_{i=1}^3 \xi_i \psi_{xi} + \xi_1 \xi_2 \xi_3 \psi_{x4} \quad (27)$$

$$\psi_y = \sum_{i=1}^3 \xi_i \psi_{yi} + \xi_1 \xi_2 \xi_3 \psi_{y4} \quad (28)$$

这时对式 (26) 中的剪切能采用 1 点高斯积分时, 经计算可知, 这个降阶积分元的弯曲和剪切刚度矩阵分别与混合元中相应的弯曲和剪切刚度矩阵相等. 这就意味着这个降阶积分元实质上就是混合元.

2. 相容性分片试验

本文还进行了由 Robinsion^[7] 提出的纯弯, 纯扭及纯剪分片试验. 图 4 表示了所用的分片试验单元及其相容性分片试验情况. $E = 10.92 \times 10^5$, $\nu = 0.3$.



Patch of elements used 1°) pure bending patch test 2°) twisting patch test 3°) shear patch test

图 4 相容性分片试验

Fig. 4 Consistency patch test

经计算表明无论对厚板 ($t=3.5$) 还是对薄板 ($t=0.1$), 上述三个证明收敛相容性的试验都能顺利地通过.

3. 典型的评估板弯元的数值例子

正方形板

板的形状如图 3 所示. 表 3 表示了在均布载荷作用下不同厚度板的中心位移 ($\zeta = \frac{1}{2}$). 理论值取自文献 [11] 及 [12].

表 3 在均布载荷下的最大无量纲法向位移 $W_{\max} = \alpha q l^4 / 100 D (\nu = 0.3)$
Table 3 Maximum nondimensional normal deflection under
uniform load $W_{\max} = \alpha q l^4 / 100 D (\nu = 0.3)$

t/L α B Mech		0.35	0.3	0.25	0.2	0.15	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
s.s	2 × 2	0.6913	0.6216	0.5620	0.5125	0.4732	0.4446	0.4212	0.4210	0.4209	0.4221
	4 × 4	0.6731	0.6044	0.5461	0.4981	0.4604	0.4328	0.4100	0.4098	0.4098	0.4067
	T.V	0.6649	0.5967	0.5382	0.4907	0.4537	0.4273	0.4062	0.4062	0.4062	0.4062
C	2 × 2	0.3967	0.3279	0.2692	0.2205	0.1817	0.1530	0.1291	0.1288	0.1288	0.1289
	4 × 4	0.3948	0.3259	0.2673	0.2189	0.1805	0.1523	0.1286	0.1283	0.1283	0.1280
	T.V	0.3951	0.3238	0.2675	0.2167	0.1798	0.1499	0.126	0.126	0.126	0.126

B — boundary s.s — simple supported c — clamped T.V — theoretic value

圆板

板的形状如图 5 所示, 半径 $R = 5$, $E = 10.92 \times 10^5$, $\nu = 0.3$. 表 4 表示均布载荷作用下中心处的位移和弯矩. 表 5 表示固支圆板在集中载荷作用下的中心处位移.

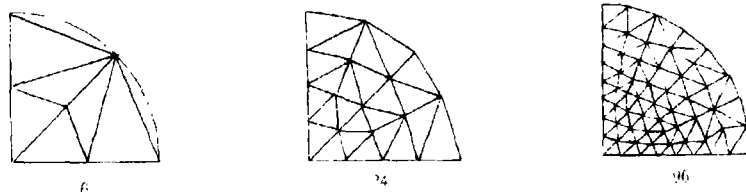


图 5 固支圆板

Fig. 5 Clamped circular plate meshes in a symmetric quadrant

表 4 均布载荷作用下的圆板中心处位移和弯矩

Table 4 Centre displacement and bending moment under uniform load for a circular plate

thickness B elements	$t=0.1$				$t=1$			
	s.s.(W 边=0)		C		s.s.(W 边=0)		C	
	$W(\times 10^{-1})$	M	$W(\times 10^{-2})$	M	$W(\times 10^{-4})$	M	$W(\times 10^{-4})$	M
6	4.2144	4.7586	9.1329	1.3494	4.3859	4.7576	1.0847	1.3381
24	4.0583	5.1061	9.6263	1.8906	4.2384	5.1090	1.1384	1.8861
96	4.0039	5.1495	9.7368	1.9985	4.1849	5.1527	1.1504	1.9959
theoretic value	3.9832	5.1563	9.7835	2.0303	4.16	5.1563	1.155	2.0313

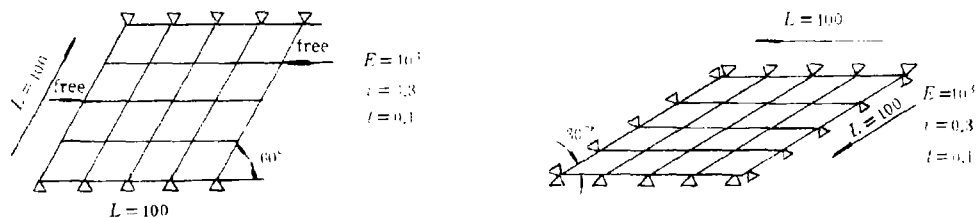
表 5 集中载荷作用下圆板中心处位移 ($t=0.1$)

Table 5 Centre displacement under concentrated load for a circular plate

elements B	b	24	96	theoretic value
s.s	0.01356	0.01293	0.01271	0.01263
C	0.004961	0.005020	0.004995	0.004974

斜板

图 6 表示 2 种斜板情况. 第一种斜板最初由 Razzage 作为验证用的板^[13]. 表 8 表示了结果收敛的情况. 两种边界条件的简支情况都进行了计算. 结果表明影响很小. 表 9 表示了 30° 斜板在四边简支条件下的中心处位移和最大主弯矩. 理论值取自文献^[14].



60° 斜板 两边简支 两边自由

60° Skew plate simply supported on two sides,

free on two sides;

SS1: $W = 0$, $M_n = 0$

SS2: $W = 0$, $\theta_t = 0$, $M_n = 0$

30° 斜板 四边简支

Simply supported 30° skew plate

图 6 斜板

Fig. 6 Skew plate

表 6 60° 斜板 (括号内为 SS2 边界条件)
Table 6 Centre displacement and moment for 60° skew plate

Mesh	$W_{\max}(10^{-2}ql^4/D)$	$M_{y\max}(10^{-1}ql)$
2 × 2	0.8852(0.8879)	0.6926(0.6946)
4 × 4	0.8260(0.8268)	0.9188(0.9199)
8 × 8	0.8064(0.8068)	0.9514(0.9517)
10 × 10	0.8032(0.8035)	0.9557(0.9558)
theoretic value	0.7945	0.9589

表 7 四边简支的 30° 斜板在均布载荷作用下中心处位移和主弯矩 (ss1)
Table 7 Centre displacement and principal moment under unifor load for 30° skew plate

Mesh	$W_{\max}(10^{-3}ql^4/D)$	$W_{\max}(10^{-2}ql^2)$	$M_{\min}(10^2ql^2)$
4 × 4	0.4887	1.8134	1.025
8 × 8	0.4387	1.8573	1.154
10 × 10	0.4332	1.8762	1.168
theoretic value	0.408	1.910	1.08

五、结 论

从上述分析中可以看到本文提出的混合元完全满足收敛的稳定性条件和相容性条件。从一些典型的算例中可以看到：尽管本文提出的这个元比较简单，但它具有计算精度高，收敛速度快以及厚薄板通用性强的特点。

最后本人衷心感谢 D. C. Zienkiewicz 教授在我编写本文时给我的指导和帮助。

参 考 文 献

- [1] Hughes T J R and Cohen M, The 'heterosis' finite element for plate bending, *Comp. Structure*, 1978, 9: 445 — 450
- [2] Hughes T J R, Cohen M and Haroun M, Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates, *Nucl. Eng. Des.*, 1978, 46: 203 — 222
- [3] Lee S W and Wong S C, Mixed formulation finite elements for Mindlin theory plate bending, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1982, 18: 1297 — 1311
- [4] Cook R D, More on reduced integration and isoparametric elements, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1972, 4: 141 — 148
- [5] Hinton E and Pugh E D L, Some quadrilateral isoparametric finite elements based on Mindlin plate theory, *Proc. Symp. on Appl. of Comp. Meth. in Engineering*, 1977, 851 — 858
- [6] Hughes T J R, Taylor R L and Kanoknukulchai W, A simple and efficient finite element for plate bending, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1977, 11: 1529 — 1543
- [7] Robinson J, Element evaluation, A set of assessment points and standard tests, *Proc. F. E. M. in the commercial environment*, 1978, 1: 217 — 248
- [8] Lee S W and Pian T T, Improvement of plate and shell finite bending by mixed formulations, *AIAA J.*, 1978, 16: 29 — 34
- [9] Zienkiewicz O C and Lefebver D, A robust triangular plate bending element of the Reissner-Mindlin type, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1988, 26: 1169 — 1184
- [10] Zienkiewicz O C and Lefebver D, Three-field mixed approximation and the plate bending, *Com. Appl. Num. Meth.*, 1987, 3: 301 — 309
- [11] Timosheko S, *Theory of plate and shell*, 1959
- [12] Cao Zhiyuan and Yang Shengthian, *Theory and application of thick dynamics*, Science Press, 1983, (Chinese)

- [13] Rozzaque A, Program for triangular bending elements with derivative smoothing, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1973, 6:333 — 345
- [14] Morley L S D, Skew plates and structures, Program Press Oxford, 1963

A THICK - THIN TRIANGULAR PLATE ELEMENT

Xu Zhongnian

(*Shanghai Aircraft Research Institute, P.O.BOX 232-003, Shanghai 200232*)

Abstract A new thick-thin triangular plate element is presented. The element emanating from the Hellinger-Reissner variational principle has independent interpolation for slope, displacement, shear strain and bending strain. It is shown that it does not suffer from any defect common to other Mindlin plate elements. Several examples are presented to illustrate the behaviour of this new element. It is pointed out that this element is also considered as the element using the reduced integration for shear energy (i.e. 1 point integration)

Key words variational principle, shape function, thick-thin element, stability, consistency