

微粗糙平面上翻身陀螺的稳定性

杨海兴 成功

(上海交通大学, 上海 200030)

提要 本文讨论微粗糙平面上翻身陀螺绕直立的极轴永久转动的稳定性. 应用 Румянцев 关于部分变量的稳定性定理, 导出在粘性和库仑两种摩擦条件下的解析形式稳定性判据. 该判据用永久转动角速度的大小而不是进动角速度的大小作为判别准则, 较为合理.

关键词 微粗糙平面, 翻身陀螺, 稳定性, 部分稳定性

1. 引言

50 年代以来, 一种被称为 Tippe ToP 的翻身陀螺在旋转时突然翻身使重心升高的奇异现象引起物理学家和力学家的兴趣, 进行了一系列实验和理论研究. 最初的研究仅在物理概念上作定性解释^[1-3], 指出滑动摩擦是产生翻身的主要原因. 为进一步深入研究, Contensou^[4]、Magnus^[5] 作出线性摩擦假定, 认为摩擦力与滑动速度之间存在与粘性摩擦类似的线性规律, 由此导出有简明解析形式的稳定性判据, 能成功解释翻身陀螺的实验现象, 但用粘性摩擦代替库仑摩擦不甚合理; 刘延柱^[6]完全摒弃了粘性摩擦假设, 用摄动法讨论微粗糙平面上翻身陀螺绕直立的极轴永久转动的稳定性问题, 导出与线性理论相同的稳定性判据. 以上分析均采用欧拉角作为确定陀螺姿态的广义坐标, 当陀螺绕直立的极轴永久转动时, 进动角和自转角无法区分, 进动角速度和自转角速度亦无法区分, 因此以进动角速度的大小来判断稳定性对极轴直立情形不甚合理. 此外, Kane 等^[7]曾在非线性的库仑摩擦规律条件下用计算机对翻身陀螺的运动过程进行数值计算, 指出必须同时顾及滑动和滚动两种不同约束情况, 更正了 Cohen^[8] 由于没有考虑由滑动到滚动的转折而导出的错误计算结果.

本文选用方向余弦作为描述陀螺姿态的坐标, 采用作者讨论微粗糙平面上 Chaplygin 球运动稳定性的方法^[9,10]严格讨论翻身陀螺在微粗糙平面上绕直立的极轴永久转动的稳定性. 应用 Румянцев 关于部分变量的稳定性定理^[11], 导出在粘性和库仑两种摩擦条件下的解析形式稳定性判据. 该判据用永久转动角速度小于或大于某一临界值作为准则, 与 Contensou、Magnus 和刘延柱用进动角速度的大小作为判据相比, 更为合理.

2. 微分方程组和首次积分

设陀螺为轴对称刚体, 质量为 m , 在 P 点处与微粗糙平面接触, 接触处附近的陀螺表面为球面, 球半径为 r , 球心 O 和质心 C 都在对称轴上(图 1).

本文于 1991 年 11 月 11 日收到.

建立各轴与惯性系相应轴平行的平动坐标系 $Cx_0y_0z_0$ (其中 Cz_0 轴铅直向上, Cx_0y_0 平行于支撑平面) 和陀螺中心主轴坐标系 $Cxyz$ (Cz 轴为陀螺对称轴). 后者相对前者的方向余弦为 α_i, β_i 和 $\gamma_i (i = 1, 2, 3)$; (见表 1), 相应的主惯量矩为 $I_1 = I_2 = I$ 和 I_3 . 支承平面作用于陀螺的滑动摩擦力

表 1 方向余弦

Table 1 Direction cosines

	x	y	z
x_0	α_1	α_2	α_3
y_0	β_1	β_2	β_3
z_0	γ_1	γ_2	γ_3

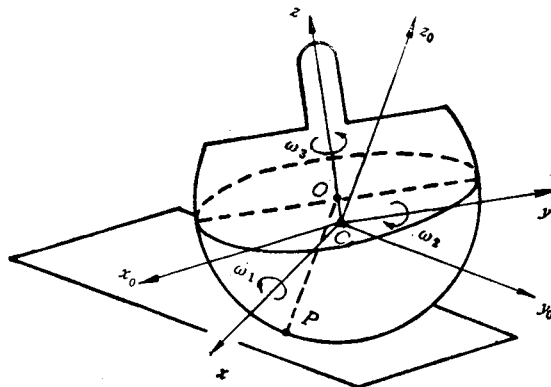


图 1 微粗糙平面上的翻身陀螺

Fig. 1 The tippy top on the slightly rough horizontal plane

$$\bar{F} = -\tau \bar{v}_P \begin{cases} \sigma = \mu & (\text{粘性摩擦}) \\ \sigma = fN/v_P & (\text{库仑摩擦}) \end{cases} \quad (1)$$

其中 μ 和 f 分别为粘性和库仑摩擦系数, N 为支承平面对陀螺的正压力模值, $\bar{v}_P$ 为陀螺上 P 点的速度 (v_P 为其模, $v_P = 0$ 时摩擦力为零, 此时令 $\sigma = 0$). 设 $\overrightarrow{CO} = ak$, 则有 $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OP} = ak - r\bar{k}_0$. 利用方向余弦矩阵的各元素等于其代数余子式的性质^[12], 导出陀螺上 P 点的速度 $\bar{v}_P = \bar{v}_C + \bar{\omega} \times \overrightarrow{CP}$ 相对 $Cx_0y_0z_0$ 的投影分别为

$$v_{P1} = v_1 - a(\omega_1\alpha_2 - \omega_2\alpha_1) - r \sum_{i=1}^3 \omega_i\beta_i \quad (2.1)$$

$$v_{P2} = v_2 - a(\omega_1\beta_2 - \omega_2\beta_1) + r \sum_{i=1}^3 \omega_i\alpha_i \quad (2.2)$$

$$v_{P3} = v_3 - a(\omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1) = 0 \quad (2.3)$$

其中 v_{Pi} 和 $v_i (i = 1, 2, 3)$ 分别为陀螺上 P 点及质心 C 的速度 $\bar{v}_P$ 和 $\bar{v}_C$ 对 $Cx_0y_0z_0$ 的投影, $\omega_i (i = 1, 2, 3)$ 为陀螺的角速度 $\bar{\omega}$ 对 $Oxyz$ 的投影.

列出陀螺的质心运动方程、Euler 方程和 Poisson 运动学方程:

$$\dot{v}_i = -\sigma v_{Pi}/m (i = 1, 2) \quad (3.1)$$

$$\dot{v}_3 = N/m - g \quad (3.2)$$

$$\dot{\omega}_1 = \frac{1}{I} [(I - I_3)\omega_2\omega_3 + r\sigma(v_{P1}\beta_1 - v_{P2}\alpha_1) + a\sigma(v_{P1}\alpha_2 + v_{P2}\beta_2) - aN\gamma_2] \quad (3.3)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{1}{I} [(I_3 - I)\omega_3\omega_1 + r\sigma(v_{P1}\beta_2 - v_{P2}\alpha_2) - a\sigma(v_{P1}\alpha_1 + v_{P2}\beta_1) + aN\gamma_1] \quad (3.4)$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{1}{I_3} r\sigma(v_{P1}\beta_3 - v_{P2}\alpha_3) \quad (3.5)$$

$$\dot{\alpha}_i = -\omega_j \alpha_k + \omega_k \alpha_j \quad (3.6)$$

$$\dot{\beta}_i = -\omega_j \beta_k + \omega_k \beta_j \quad (3.7)$$

$$\dot{\gamma}_i = -\omega_j \gamma_k + \omega_k \gamma_j \quad (3.8)$$

将式(2.3)对时间求导,利用式(3.3)、(3.4)和(3.8)以及方向余弦矩阵元素的性质,得到

$$\begin{aligned} \dot{v}_3 = & -\frac{ma^2}{I}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)N + \frac{ma^2\sigma}{I}(v_{p1}\alpha_3 + v_{p2}\beta_3)\left(\frac{r}{a} - \gamma_3\right) \\ & + ma(\omega_1^2 + \omega_2^2)\gamma_3 - ma\omega_3(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) \end{aligned} \quad (4)$$

将上式代入式(3.2),导出

$$\begin{aligned} N = & \frac{1}{1 + ma^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)/I} \left[mg + \frac{ma^2\sigma}{I}(v_{p1}\alpha_3 + v_{p2}\beta_3)\left(\frac{r}{a} - \gamma_3\right) \right. \\ & \left. + ma(\omega_1^2 + \omega_2^2)\gamma_3 - ma\omega_3(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

方程组(3)是以 $v_i, \omega_i, \alpha_i, \beta_i$ 和 $\gamma_i (i=1, 2, 3)$ 为变量的一阶运动微分方程组, 其中 v_{p1}, v_{p2} 和 N 分别由式(2)和式(5)给出. 该方程组存在周知的六个几何积分:

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^3 \beta_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^3 \gamma_i^2 = 1 \quad (6.1)$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \beta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \beta_i \gamma_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \gamma_i \alpha_i = 0 \quad (6.2)$$

将式(3.3)、(3.4)和(3.5)分别乘以 $I\gamma_1, I\gamma_2$ 和 $I_3\gamma_3 - I_3a/r$, 将(3.8)中三式分别乘以 $I\omega_1, I\omega_2$ 和 $I_3\omega_3$, 利用式(6.2)及方向余弦矩阵各元素等于其代数余子式的性质, 导出

$$\frac{d}{dt} [I\omega_1\gamma_1 + I\omega_2\gamma_2 + I_3\omega_3(\gamma_3 - a/r)] = 0 \quad (7)$$

于是得到另一个首次积分

$$I\omega_1\gamma_1 + I\omega_2\gamma_2 + I_3\omega_3(\gamma_3 - a/r) = H \quad (8)$$

式(8)中 H 为积分常数.

将(3.1)中二式和(3.2)分别乘以 $mv_i (i=1, 2, 3)$, (3.3)、(3.4)、(3.5)三式分别乘以 $I\omega_1, I\omega_2, I_3\omega_3$, 然后相加, 利用式(2)、(3.8)和(6), 导出以下关系式

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 v_i^2 + \frac{1}{2} (I\omega_1^2 + I\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) - mga\gamma_3 \right] = -\sigma(v_{p1}^2 + v_{p2}^2) \quad (9)$$

上式表明陀螺的动能和重力势能之和对时间的导数小于或等于零.

3. 永久转动的扰动方程

方程组(3)存在以下特解: $\omega_3 = \omega, \alpha_1 = c, \alpha_2 = -s, \beta_1 = s, \beta_2 = c, \gamma_3 = 1$, 而其余变量为零(其中 ω 为常量, c 和 s 分别为 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 的缩写), 表明陀螺绕 Oz_0 轴作永久转动. 此时 v_{p1} 和 v_{p2} 亦为零, 表明作特解运动的陀螺没有滑动. 当陀螺受到扰动时, 可能产生滑动. 设变量 $v_i, \omega_i, \alpha_i, \beta_i$ 和 γ_i 的扰动分别为 $u_i, \delta_i, \xi_i, \eta_i$ 和 $\zeta_i (i=1, 2, 3)$, 则有

$$\left. \begin{aligned} v_i &= 0 + u_i (i=1, 2, 3), \omega_i = 0 + \delta_i (i=1, 2) \\ \omega_3 &= \omega + \delta_3, \alpha_1 = c + \xi_1, \alpha_2 = -s + \xi_2, \alpha_3 = 0 + \xi_3, \\ \beta_1 &= s + \eta_1, \beta_2 = c + \eta_2, \beta_3 = 0 + \eta_3 \\ \gamma_i &= 0 + \zeta_i (i=1, 2), \gamma_3 = 1 + \zeta_3 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

将上式代入方程组(3), 导出陀螺绕 Oz_0 轴永久转动的扰动方程组:

$$\dot{u}_1 = -\sigma u_{p1} \quad (11.1)$$

$$\dot{u}_2 = -\sigma u_{p2} \quad (11.2)$$

$$\dot{u}_3 = \Theta \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \{(I - I_3)\delta_2(\omega + \delta_3) + r\sigma[u_{p1}(s + \eta_1) - u_{p2}(c + \xi_1)] \\ &\quad + a\sigma[u_{p1}(-s + \xi_2) + u_{p2}(c + \eta_2)] - mga\zeta_2 - ma\Theta\zeta_2\}/I \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \{(I_3 - I)\delta_1(\omega + \delta_3) + r\sigma[u_{p1}(c + \eta_2) - u_{p2}(-s + \xi_2)] \\ &\quad - a\sigma[u_{p1}(c + \xi_1) + u_{p2}(s + \eta_1)] + mga\zeta_1 + ma\Theta\zeta_1\}/I \end{aligned} \quad (11.5)$$

$$\delta_3 = r\sigma(u_{p1}\eta_3 - u_{p2}\xi_3)/I_3 \quad (11.6)$$

$$\dot{\xi}_1 = \omega\xi_2 - \delta_3s - \delta_2\xi_3 + \delta_3\xi_2 \quad (11.7)$$

$$\dot{\xi}_2 = -\omega\xi_1 - \delta_3c + \delta_1\xi_3 - \delta_3\xi_1 \quad (11.8)$$

$$\dot{\xi}_3 = \delta_1s + \delta_2c - \delta_1\xi_2 + \delta_2\xi_1 \quad (11.9)$$

$$\dot{\eta}_1 = \omega\eta_2 + \delta_3c - \delta_2\eta_3 + \delta_3\eta_2 \quad (11.10)$$

$$\dot{\eta}_2 = -\omega\eta_1 - \delta_3s + \delta_1\eta_3 - \delta_3\eta_1 \quad (11.11)$$

$$\dot{\eta}_3 = -\delta_1c + \delta_2s - \delta_1\eta_2 + \delta_2\eta_1 \quad (11.12)$$

$$\dot{\zeta}_1 = \omega\zeta_2 - \delta_2 - \delta_2\zeta_3 + \delta_3\zeta_2 \quad (11.13)$$

$$\dot{\zeta}_2 = -\omega\zeta_1 + \delta_1 + \delta_1\zeta_3 - \delta_3\zeta_1 \quad (11.14)$$

$$\dot{\zeta}_3 = -\delta_1\zeta_2 + \delta_2\zeta_1 \quad (11.15)$$

其中 u_{p1} 和 u_{p2} 分别为 v_{p1} 和 v_{p2} 的扰动, 将式(10)代入式(2.1)和(2.2), 得到

$$\begin{aligned} u_{p1} &= u_1 - a[\delta_1(-s + \xi_2) - \delta_2(c + \xi_1)] \\ &\quad - r[\delta_1(s + \eta_1) + \delta_2(c + \eta_2) + (\omega + \delta_3)\eta_3] \end{aligned} \quad (12.1)$$

$$\begin{aligned} u_{p2} &= u_2 - a[\delta_1(c + \eta_2) - \delta_2(s + \eta_1)] \\ &\quad + r[\delta_1(c + \xi_1) + \delta_2(-s + \xi_2) + (\omega + \delta_3)\xi_3] \end{aligned} \quad (12.2)$$

而 $\Theta = N/m - g$, 利用式(5)和(10)可得到

$$\begin{aligned} \Theta &= [ma^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)g/I + a^2\sigma(u_{p1}\xi_3 + u_{p2}\eta_3)(r/a - 1 - \zeta_3) \\ &\quad + a(\delta_1^2 + \delta_2^2)(1 + \zeta_3) - a(\omega + \delta_3)(\delta_1\zeta_1 + \delta_2\zeta_2)]/[1 + ma^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)/I] \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)表明 Θ 是扰动的二阶小量。

扰动方程组(11)是带有周期变系数的非自治非线性方程组。由于存在首次积分(6)和(8), 扰动间必存在七个相应的关系式, 将式(10)代入(6)和(8), 得到

$$c\xi_1 - s\xi_2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \xi_i^2 = 0 \quad (13.1)$$

$$s\eta_1 + c\eta_2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \eta_i^2 = 0 \quad (13.2)$$

$$\zeta_3 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \zeta_i^2 = 0 \quad (13.3)$$

$$s(\xi_1 - \eta_2) + c(\eta_1 + \xi_2) + \sum_{i=1}^3 \xi_i \eta_i = 0 \quad (13.4)$$

$$\xi_3 + c\zeta_1 - s\zeta_2 + \sum_{i=1}^3 \xi_i \zeta_i = 0 \quad (13.5)$$

$$\eta_3 + s\zeta_1 + c\zeta_2 + \sum_{i=1}^3 \eta_i \zeta_i = 0 \quad (13.6)$$

$$I\delta_1\zeta_1 + I\delta_2\zeta_2 + I_3(\omega + \delta_3)(\zeta_3 + h/r) = H \quad (13.7)$$

式(13.7)中的 $h = r - a$, 为陀螺直立时其质心离支承面的高度。由式(13.3)和(13.7)可得到

$$\begin{aligned} I_3\omega\delta_3 - mga\zeta_3 &= \frac{r}{h} H\omega - I_3\omega^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{h} I_3\omega^2 + mga \right) \sum_{i=1}^3 \zeta_i^2 \\ &\quad - \frac{r}{h} \omega (I\delta_1\zeta_1 + I\delta_2\zeta_2 + I_3\delta_3\zeta_3) \end{aligned} \quad (14)$$

同理,将式(10)代入式(9),得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 u_i^2 + \frac{1}{2} (I\delta_1^2 + I\delta_2^2 + I_3\delta_3^2) + \frac{1}{2} I_3\omega^2 - mga + I_3\omega\delta_3 - mga\zeta_3 \right] \\ = -\sigma(u_{p1}^2 + u_{p2}^2) \end{aligned} \quad (15)$$

将式(14)代入(15),注意到 $I_3\omega^2$ 、 mga 和 $\frac{r}{h} H\omega$ 均为常数,导出

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 u_i^2 + \frac{1}{2} (I\delta_1^2 + I\delta_2^2 + I_3\delta_3^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{h} I_3\omega^2 + mga \right) \sum_{i=1}^3 \zeta_i^2 \right. \\ \left. - \frac{r}{h} \omega (I\delta_1\zeta_1 + I\delta_2\zeta_2 + I_3\delta_3\zeta_3) \right] = -\sigma(u_{p1}^2 + u_{p2}^2) \end{aligned} \quad (16)$$

积分(13)和关系式(16)也可直接由扰动方程组(11)导出。

4. 永久转动的稳定性

对非自治非线性扰动方程(11)取如下包含全部扰动和时间 t 的 Ляпунов 函数 V , 包含全部扰动的二次型 W 及仅包含部分扰动 u_i 、 δ_i 和 ζ_i ($i=1,2,3$) 的二次型 U

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 u_i^2 + \frac{1}{2} (I\delta_1^2 + I\delta_2^2 + I_3\delta_3^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{h} I_3\omega^2 + mga \right) \sum_{i=1}^3 (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) \\ &\quad - \frac{r}{h} \omega (I\delta_1\zeta_1 + I\delta_2\zeta_2 + I_3\delta_3\zeta_3) \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{r}{h} I_3 \omega^2 + m g a \right) [(\xi_1 + \eta_2) \cos \omega t - (\xi_2 - \eta_1) \sin \omega t] \quad (17)$$

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 u_i^2 + \frac{1}{2} (I \delta_1^2 + I \delta_2^2 + I_3 \delta_3^2) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{h} I_3 \omega^2 + m g a \right) \sum_{i=1}^3 (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) \\ & - \frac{r}{h} \omega (I \delta_1 \zeta_1 + I \delta_2 \zeta_2 + I_3 \delta_3 \zeta_3) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 u_i^2 + \frac{1}{2} (I \delta_1^2 + I \delta_2^2 + I_3 \delta_3^2) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{h} I_3 \omega^2 + m g a \right) \sum_{i=1}^3 \zeta_i^2 \\ & - \frac{r}{h} \omega (I \delta_1 \zeta_1 + I \delta_2 \zeta_2 + I_3 \delta_3 \zeta_3) \end{aligned} \quad (19)$$

利用几何积分(13.1)和(13.2),容易证明有

$$U = V \leq W \quad (20)$$

U 对部分扰动 u_i, δ_i 和 $\zeta_i (i=1,2,3)$ 正定的充要条件与 W 对全部扰动正定的充要条件相同,即

$$\text{且} \quad \left. \begin{aligned} I \left(\frac{r}{h} I_3 \omega^2 + m g a \right) - I^2 \left(\frac{r}{h} \right)^2 \omega^2 &> 0 \\ I_3 \left(\frac{r}{h} I_3 \omega^2 + m g a \right) - I_3^2 \left(\frac{r}{h} \right)^2 \omega^2 &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

或写为

$$\omega < \omega_{cr1}, \quad \omega_{cr1} = \min \left(\sqrt{\frac{m g a h^2}{r(rI - hI_3)}}, \sqrt{\frac{m g h^2}{rI_3}} \right) \quad (22)$$

比较式(16)和(19),可发现式(16)中的方括号项即等于 U , 再利用式(20)导出:

$$\frac{dV}{dt} = -\sigma(u_{p1}^2 + u_{p2}^2) = \begin{cases} -\mu(u_{p1}^2 + u_{p2}^2) & (\text{粘性摩擦}) \\ -f m g \sqrt{u_{p1}^2 + u_{p2}^2} & (\text{库仑摩擦}) \end{cases} \quad (23)$$

上式表明扰动微分方程组(11)使得 $\dot{V} \leq 0$.

因此,根据 Румянцев 关于部分变量的稳定性定理,导出以下结论:条件(22)满足时,扰动方程组(11)的无扰运动关于 u_i, δ_i 和 $\zeta_i (i=1,2,3)$ 按 t_0 一致稳定. 表明当陀螺的转动角速度小于临界转速 ω_{cr1} 时,在粘性和库仑两种摩擦条件下,陀螺绕直立的极轴的永久转动一致稳定.

当陀螺的转动角速度大于临界转速 ω_{cr1} 时,陀螺绕直立的极轴的永久转动可能不稳定,这种不稳定包含两层意思,一是极轴可能平行偏离原来直立的位置,二是陀螺可能会突然翻身,重心升高而转为尖端接触.

满足一定条件时, 以尖端与平面相接触的陀螺会继续绕倒置直立的极轴作稳定的永久转动. 此条件同样可由式(21)给出, 只要将其中 a 以 $-a$ 替代, 令 $h = r + a$ 即可, 或写为

$$\omega > \omega_{cr2}, \quad \omega_{cr2} = \max \left(\sqrt{\frac{mga h'}{r(hl_3 - rl)}}, \sqrt{\frac{mgh^2}{rl}} \right) \quad (24)$$

参 考 文 献

- [1] Braams. C M. On the influence of friction on the motion of a top, *Physica*, 1952, 18, (8 & 9): 503—514
- [2] Hugenholtz N M. On tops rising by friction, *Physica*, 1952, 18, (8 & 9): 515—527
- [3] Pliskin W A. The tippe top, *Amer. J. Physics*, (1954) 22, (1): 28—32
- [4] Contensou P. Couplage entre frottement de glissement et pivotement dans la theorie de la toupie, *IUTAM Symposium Celerina, Gyrodynamics, Springer* 1963, 201—216
- [5] Magnus K, Kreisel. Theorie und Anwendungen, Springer (1971)
- [6] 刘延柱. 力学学报, 1987, 19, (5): 239—245
- [7] Kane T R Levinson D A. A realistic solution of the symmetric top problem, *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 1978, 45, (4): 903—909
- [8] Cohen R J The tippe top revisited, *Amer. J. Physics*, 1977, 45, (1): 12—17
- [9] 杨海兴, 力学学报, 1989, 21, (6): 749—753
- [10] 杨海兴. 力学学报, 1991, 23(3): 355—360
- [11] Румянцев В В. Об устойчивости движения по отношению к части перетенных, *Вестник МГУ*, 1957, (4)
- [12] 刘延柱, 杨海兴. 理论力学, 高等教育出版社(1991)

THE STABILITY OF A TIPPE TOP ON A SLIGHTLY ROUGH HORIZONTAL PLANE

Yang Haixing and Cheng Gong

(Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

Abstract The stability of a tippe top rotating on a slightly rough horizontal plane is considered in this paper. The stability criterion of the permanent rotation about the vertical polar axis not only with low viscous friction but also with low dry friction is derived by using Rumiantsev's theorem of partial stability. This criterion is reasonable because it is not expressed in terms of the precessional velocity, but the angular velocity of the permanent rotation.

Key words slightly rough horizontal plane, tippe top, stability, partial stability