

浮体直棱角附近流场的奇异性

朱林生 戴遗山

(哈尔滨船舶工程学院, 哈尔滨 150001)

摘要 本文研究了浮体直棱角附近势流流场的奇异特性。结果表明, 在线性范围内, 物面直棱角附近速度势的奇异特征是 $D^{1/3}$ (D 是场点到直棱角点的距离)。文中还给出了一个奇异性应用方面的实例。

关键词 奇异特征, 直棱角, 速度势

1. 引言

众所周知, 在船舶及海洋结构物的水动力计算中, 物面与自由面交界以及物面棱角附近的流场奇异性一直是个没有完全解决的问题。求解二阶问题以及流 (current) 和浪 (waves) 对浮体联合作用等问题, 都要计算一阶速度势的导数。如果不考虑物面与自由面交界处和物面棱角处一阶速度势的奇异性, 将难以得到正确的结果。如 Cointe^[1,2] 以及 Zhao and Faltinsen^[3,4] 都在各自所讨论的问题中遇到上述奇异性问题, 可见水面交界处和物面棱角附近流场的奇异性研究是一个重要的课题。

本文首先对二维柱体在流场中沿垂直方向作振荡运动问题从理论分析和数值计算两方面入手, 确立一套可信的数值处理方法和理论分析手段, 得出共知的流场奇异特性, 进而讨论尚未解决的三维问题。

2. 二维浮体的理论公式和数值结果

为了简洁明了, 我们考虑一个最简单的情况, 即一个二维柱体在无粘、不可压流体中

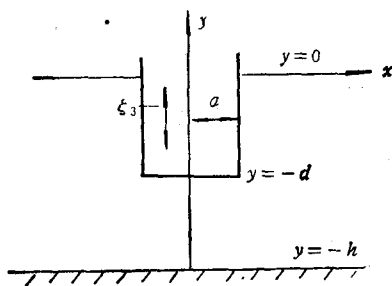


图1 二维坐标系

Fig. 1 2-D Coordinate System

作垂荡运动。假设运动是无旋的, 振荡频率为无穷大, 即自由面无波。选用如图1所示的坐标系, 这个振荡运动引起的流动可用速度势 $\varphi(x, y)$ 表示。大家知道, 在角点 $(\pm a, d)$ 附近, 流场复速度的奇异部分为 $O(D^{-1/3})$, D 为场点到棱角点的距离, 下面用数值方法来讨论这个问题, 目的是要建立一种讨论问题的方法, 以便于研究三维问题。显然, 速度势 $\varphi(x, y)$ 满足下列条件

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = 0 \quad (\text{流场中}) \quad (2.1)$$

$$\varphi = 0 \quad (|x| > a, y = 0) \quad (2.2)$$

$$\partial \varphi / \partial y = 1 \quad (|x| < a, y = -d) \quad (2.3)$$

本文于1991年3月17日收到第一稿, 1991年7月13日收到修改稿。

在水底和柱体侧面速度势的法向导数都等于零。我们用 Ronland W. Yeung^[9] 的方法来求解上述边值问题。为此将流场分成内场 ($|x| \leq a$) 和外场 ($|x| \geq a$) 两部分, 用匹配法解这个问题。经适当的数学推导可得内场问题的解 $\varphi^{(i)}(x, y)$ 为

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)}(x, y) = & \frac{1}{2(h-d)} [(y+h)^2 - x^2] \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\text{ch}(\lambda_n x)}{\text{ch}(\lambda_n a)} \cos[\lambda_n(y+h)], \quad \left(\lambda_n = \frac{n\pi}{h-d}\right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

外场问题的解 $\varphi^{(e)}(x, y)$ 写成本征函数的展开式

$$\varphi^{(e)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\mu_n(x-a)} \cos[\mu_n(y+h)], \quad \left(\mu_n = \frac{2n+1}{2h} \pi\right) \quad (2.5)$$

当取 $h/2 = d = a = 1$ 时, (2.4) 和 (2.5) 式中的系数 a_n 和 A_n 由下列各式给出

$$a_n = (-1)^n \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} A_m S_m \frac{2m+1}{(2m+1)^2 - 16n^2} - (-1)^n \frac{2}{n^2 \pi^2} \quad (2.6)$$

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{S_m}{2m+1} + \frac{1}{3} \quad (2.7)$$

$$A_m = \frac{16}{\pi} S_m \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \text{th}(n\pi) \frac{na_n}{(2m+1)^2 - 16n^2} + \frac{16S_m}{(2m+1)^2 \pi^2} \quad (2.8)$$

式中 $S_m = \sin\left(\frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ 。将 (2.8) 式代入 (2.6) 和 (2.7) 两式, 整理后可得下列含有无穷个未知数的线性代数方程组

$$a_n - \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} a_k = g_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.9)$$

其中

$$c_{nk} = \begin{cases} (-1)^{k+1} \frac{2}{\pi^2} k \text{th}(k\pi) C_{0k}, & (n=0; k=1, 2, \dots) \\ (-1)^{n+k+1} \frac{4}{\pi^2} k \text{th}(k\pi) C_{nk}, & (n=1, 2, \dots; k=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.10)$$

$$g_n = \begin{cases} \frac{28}{\pi^3} (-1)^n \zeta(3) + \frac{1}{3} & (n=0) \\ \frac{4}{\pi^3} (-1)^n C_{n0} - (-1)^n \frac{2}{n^2 \pi^2} & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.11)$$

$$C_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{k^2 - n^2} \sum_{m=0}^{2(n-k)-1} \frac{1}{4k + (2m+1)} & (n > k) \\ \frac{1}{n^2 - k^2} \sum_{m=0}^{2(k-n)-1} \frac{1}{4n + (2m+1)} & (n < k) \\ \frac{2}{n} \sum_{m=0}^{2n-1} \frac{1}{(2m+1)^2} & (n = k) \end{cases} \quad (2.12)$$

其中 ζ 是 Riemann Zeta 函数。有了系数 a_n 以后, A_n 也就确定了, 于是内外场速度势都可以求出。可以证明, 无穷线性方程组 (2.9) 是正规方程组, 因而它的解可用简化法

求得,即如果 a_n^N 是有限方程组

$$a_n - \sum_{k=1}^N c_{nk} a_k = g_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.13)$$

的解,则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_n^N = a_n^* \quad (2.14)$$

a_n^* 是无穷方程组 (2.9) 的解。

本文求解 (2.9) 时,截断方程取 300 项,匹配面上内外场速度势数值见表 1。

表 1 匹配面上内外场速度势

Table 1 Velocity Potentials of Inner and Outer Fields at the Match Surface

x	$\varphi^{(i)}$	$\varphi^{(e)}$
-1.00	0.93082579E + 00	0.92575679E + 00
-1.01	0.95412524E + 00	0.95422541E + 00
-1.02	0.96647160E + 00	0.96645103E + 00
-1.03	0.97447862E + 00	0.97448378E + 00
-1.04	0.98048545E + 00	0.98048692E + 00
-1.05	0.98577420E + 00	0.98577088E + 00
-1.06	0.99050372E + 00	0.99050933E + 00
-1.07	0.99437071E + 00	0.99436494E + 00
-1.08	0.99746209E + 00	0.99746920E + 00
-1.19	0.10003219E + 01	0.10003152E + 01
-1.20	0.10030123E + 01	0.10030200E + 01
-1.21	0.10053235E + 01	0.10053162E + 01
-1.22	0.10071650E + 01	0.10071732E + 01
-1.23	0.10088933E + 01	0.10088857E + 01
-1.24	0.10105551E + 01	0.10105634E + 01
-1.25	0.10120155E + 01	0.10120077E + 01
-1.26	0.10131409E + 01	0.10131495E + 01
-1.27	0.10142016E + 01	0.10141937E + 01
-1.28	0.10152371E + 01	0.10152457E + 01
-1.29	0.10161607E + 01	0.10161527E + 01
-1.30	0.10168243E + 01	0.10168329E + 01

从表 1 可以看出,除角点处匹配情况非常好。角点在数值上很难处理是众所周知的。为了改进棱角点处速度势的值,必须弄清这点的奇异性,为此从分析系数 a_n 和 A_n 的阶着手,以 a_n 为例,设 $a_n = O\left(\frac{1}{n^c}\right) (n \rightarrow \infty)$, 则有 $|a_m/a_M| \approx (M/m)^c$, 阶数 c 的估计值为

$$c \approx \lg |a_m/a_M| / \lg (M/m) \quad (2.15)$$

表 2 中列出了 c 的数值结果

要得到好的估算值, n 要适当的大才行,这也是取 300 项的原因。例如,若取 80 项,结果表明 c 的估算值是不稳定的,因为用截断法求解得到的系数 a_n 只有前面一小部分结果是可信的。从表 2 可以看出 c 约为 5/3, 在这基础上就可以估计 $\varphi^{(i)}$ 的主要奇异部分,大家知道,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\alpha+1}} \quad (0 \leq x < 1, 0 < \alpha < 1) \quad (2.16)$$

表 2 阶数 c 的估算值
Table 2 Estimated Values of Order c

M	N	AM	AN	c
10	35	0.39120E - 2	0.47248E - 3	1.68732
20	55	0.12132E - 2	0.22056E - 3	1.68530
35	75	0.47248E - 3	0.13066E - 3	1.68656
60	95	0.19045E - 3	0.87598E - 4	1.68862
85	105	0.10574E - 3	0.73936E - 4	1.69317
25	120	0.83290E - 3	0.58949E - 4	1.68827
110	140	0.68328E - 4	0.45363E - 4	1.69853
75	150	0.13066E - 3	0.40337E - 4	1.69564

的和函数 $F(x)$ 在 $0 \leq x < 1$ 中有导数,但在 $x = 1$ 处不可导,欲讨论 $F(x)$ 在 $x \rightarrow 1^-$ 时的奇异性。易知

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{\alpha}} \quad (0 \leq x < 1) \quad (2.17)$$

经适当的分析和数学运算可知

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{\alpha}} = \frac{\pi}{\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi)} \frac{1}{(1-x)^{1-\alpha}} + O(1) \quad (2.18)$$

于是不难推知 $\varphi^{(i)}$ 在角点处的主要奇异部分 $S(\varphi^{(i)})$ 为

$$S(\varphi^{(i)})|_{x=1} = O((1-x)^{2/3}), \quad (x \rightarrow 1^-) \quad (2.19)$$

上述奇异性是意料之中的事。为了进一步校核角点处速度势的特性,我们对底面和侧面角点附近的速度势直接进行了数值拟合,选用的拟合函数为

$$y = \alpha D^{2/3} + \beta D + \gamma \quad (2.20)$$

式中 α, β 和 γ 是待定系数,可由最小二乘法求得,拟合情况见表 3(FIC, FUC 为内外场速度势的拟合值)。

表 3 角点附近速度势的数值拟合
Table 3 Numerical Fittings of Velocity Potentials at Corners

X	$\varphi^{(i)}$	FIC	Y	$F\varphi^{(e)}$	FUC
1.000	0.93076	0.93008	-1.000	0.93083	0.93146
0.999	0.94219	0.94345	-0.999	0.91706	0.91786
0.998	0.95133	0.95180	-0.998	0.90911	0.90936
0.997	0.95909	0.95899	-0.997	0.90213	0.90203
0.996	0.96593	0.96553	-0.996	0.89583	0.89536
0.995	0.97214	0.97164	-0.995	0.88922	0.88912
0.994	0.97789	0.97743	-0.994	0.88439	0.88321
0.993	0.98327	0.98297	-0.993	0.87783	0.87755
0.992	0.98838	0.98830	-0.992	0.87215	0.87210
0.991	0.99325	0.99347	-0.991	0.86610	0.86682
0.990	0.99792	0.99849	-0.990	0.86155	0.86169

以上的数值计算和理论分析的结果与已有结论的一致性表明上述处理方法是有效的,下面将用其来讨论三维问题中相应的奇异性。

3. 三维浮体的理论公式和数值结果

本节中,水深设为单位长度 1, d 和 a 都是相对水深的无因次量。假设流体无粘、不可压,运动无旋,垂荡运动的频率为无穷大。选用

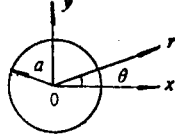


图 2 三维柱坐标系

Fig. 2 3-D Cylindrical Coordinate System

如图 2 所示的柱坐标系 (r, θ, z) 。由于流场是轴对称的,所以速度势 φ 为 θ 无关。用与二维相类似的方法,内场解 $\varphi^{(i)}$ 和外场解 $\varphi^{(e)}$ 可分别写成

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)} = & \frac{1}{2d} \left(z^2 - \frac{r^2}{2} \right) \\ & + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{I_0(\lambda_n r)}{I_0(\lambda_n a)} \cos(\lambda_n z), \\ & \left(\lambda_n = \frac{n\pi}{d} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(e)} = & \sum_{k=1}^{\infty} A_k R_k(m_k r) Z_k(m_k z), \\ & \left(m_k = \left(k - \frac{1}{2} \right) \pi \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中

$$\begin{aligned} R_k(m_k r) &= K_0(m_k r) / K_1(m_k a) \\ Z_k(m_k z) &= \cos(m_k z) / N_k^{1/2} \\ N_k &= \frac{1}{2} (1 + \sin(2m_k) / (2m_k)) \end{aligned}$$

I_0 和 K_0, K_1 分别是第一类和第二类变型的 Bessel 函数,本征函数 $\{Z_k\}$ 在 $[0, 1]$ 中是正交的。系数 a_n 和 A_k 由下式给出

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} R_k C_{nk} A_k - a_n^*, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

$$A_k = \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n C_{nk} a_n + A_k^* \right) / m_k R_k', \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

其中

$$a_n^* = \frac{2}{d} \int_0^d \varphi_p^{(i)}(a, z) \cos(\lambda_n z) dz, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.5)$$

$$A_k^* = \int_0^d \frac{\partial}{\partial r} \varphi_p^{(i)}(a, z) Z_k(m_k z) dz, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} C_{nk} &= \frac{2}{d} \int_0^d \cos(\lambda_n z) Z_k(m_k z) dz \\ &= \frac{2(-)^{n+1} \sin(m_k d)}{[(m_k d)^2 - (n\pi)^2]} \cdot \frac{m_k d}{N_k^{1/2}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$S_n = \frac{n\pi}{2} I_0'(\lambda_n a) / I_0(\lambda_n a) \quad (3.8)$$

$$\varphi_p^{(i)} = \frac{1}{2d} (z^2 - r^2/2) \quad (3.9)$$

将(3.4)代入(3.3)式同样可得无穷方程组

$$a_n - \sum_{j=0}^{\infty} c_{nj} a_j = g_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.10)$$

其中

$$c_{nj} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{nk} C_{jk}}{m_k} \left(\frac{R_k}{R'_k} \right) \right] S_j \quad (3.11)$$

$$g_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{nk}}{m_k} \left(\frac{R_k}{R'_k} \right) A_k^* - a_n^* \quad (3.12)$$

式中 R'_k 是 R_k 的一阶导数。同样取 300 个未知数的截断方程, 求出匹配面上的内外场速度势, 然后选用拟合函数(2.20)对角点附近速度势直接进行数值拟合。结果表明三维圆柱棱角附近速度势的主要奇异部分 $S(\varphi^{(i)})$ 与二维相同, 其量阶是

$$S(\varphi^{(i)})|_{r=a} = O((a-r)^{2/3}), \quad r \rightarrow a^-,$$

同样, 在侧面也有 $S(\varphi^{(e)})|_{r=a} = O((d-z)^{2/3}), \quad z \rightarrow d^+$ 。

以上便是我们对物面棱角附近流场的奇异性所作的分析。分析过程都选了典型情况即自由面无波 ($\varphi = 0$), 不难推知, 自由面有波情况 ($\varphi_z - v\varphi = 0$), 结论与无波是一样的。三维与二维流动角点处奇异性的一致性, 可用三维流动局部范围是二维流动来加以解释。

4. 应用实例

以圆柱形浮体为例说明奇异性的应用。设圆柱的位置, 几何尺寸以及坐标系都与前述的相同。大家知道, 当频率较高时, 用目前已有的方法计算水动力系数往往都失败, 这里将给出一个初步估算公式。对于圆柱作微幅单位速度简谐垂荡, 对应于频率为 ω 和 ∞ 的附加质量 m_ω 和 m_∞ 可以写成

$$m_\infty = -\rho \iint_{S_i} \phi_\infty dS \quad (4.1)$$

$$m_\omega = -\rho \operatorname{Re} \left\{ \iint_{S_i} \phi_\omega dS \right\} \quad (4.2)$$

m_∞ 是易于计算的, 我们要得到高频时 m_ω 的估计式, 注意到 ϕ_ω 和 ϕ_∞ 在各边界上应满足的条件, 并用格林公式, 易知

$$\frac{1}{\rho} (m_\infty - m_\omega) = -\frac{1}{k} \operatorname{Re} \left\{ \iint_{S_F} \left(\phi_\infty \frac{\partial^2 \phi_\omega}{\partial z \partial n} - \frac{\partial \phi_\omega}{\partial z} \frac{\partial \phi_\infty}{\partial n} \right) ds \right\} \quad (4.3)$$

其中 $k = \omega^2/g$, n 是指向流体外部的法线方向。再一次应用格林公式, 上式可以写为

$$\frac{1}{\rho} (m_\infty - m_\omega) = \frac{1}{k} \operatorname{Re} \left\{ \iint_{S_b + S_s + S_b} \left(\frac{\partial \phi_\omega}{\partial z} \frac{\partial \phi_\infty}{\partial n} - \phi_\infty \frac{\partial^2 \phi_\omega}{\partial z \partial n} \right) ds \right\} \quad (4.4)$$

无论在侧面 S_s 还是在底面 S_b 上, 计算上式右端的积分都需要注意被积式的奇异性。以 S_b 上的积分为例, 在 S_b 上

$$\frac{\partial^2 \phi_\omega}{\partial z \partial n} - \frac{\partial^2 \phi_\omega}{\partial z^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_\omega}{\partial r} \right) = -\frac{\partial^2 \phi_\omega}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_\omega}{\partial r} \quad (4.5)$$

记 ϕ_∞ 的奇异部分为 $c_0(a-r)^{2/3}$, 则 $\partial\phi_\infty/\partial r$ 和 $\partial^2\phi_\infty/\partial r^2$ 的奇异部分分别为

$$\frac{2}{3} c_0(a-r)^{-1/3}$$

和 $c_0(a-r)^{-4/3}$, 后者的积分为无穷大, 可见考虑奇异性的重要。由于有奇点, 可以将 (4.4) 式右端积分曲面稍移至流场内部, 并分别进行分部积分, 再注意到被积式的奇异特性, 经适当的推导可得高频附加质量的估算式

$$m_\omega \approx m_\infty - \frac{1}{k} \rho A, \quad (k = \omega^2/g) \quad (4.6)$$

其中

$$A = \pi a^2 - 2\pi \left[\int_0^a r \left(\frac{\partial \phi_\infty}{\partial r} \right)_{z=d}^2 dr - \int_0^\infty r \left(\frac{\partial \phi_\infty}{\partial r} \right)_{z=0} dr \right]$$

对于一般三维浮体, 用上述方法同样可以得到相应的估算式。

参 考 文 献

- [1] Cointe R, Molin B and Nays p. Nonlinear and Second-Order Transient Waves in a Rectangular Tank, BOSS'88, Trondheim, 1988
- [2] Cointe R. Nonlinear Simulation of Transient Free Surface Flow, 5th ICNSH, Hiroshima, Japan, 1989
- [3] Zhao R and Faltinsen Odd M. Interaction between Current, Waves and Marine Structures, 5th ICNSH, Hiroshima, Japan, 1989
- [4] Zhao R and Faltinsen, Odd M., Interaction between Waves and Current on a Two-dimensional Body in the Free Surface, *Applied Ocean Res.* 1988, 10
- [5] Yeung Ronald W. Added Mass and Damping of a Vertical Cylinder in Finite-dipth Waters, *Applied Ocean Res.*, 1981, 3

THE SINGULAR BEHAVIOUR OF POTENTIAL FLOW AROUND THE RECTANGULAR CORNERS OF FLOATING BODIES

Zhu Linsheng and Dai Yishan

(Harbin Shipbuilding Engineering Institute, Harbin 150001, China)

Abstract The singular behaviour of potential flow around the rectangular corners of floating bodies is presented. It is shown that, in the linear regime, the singular behaviour of velocity potential for oscillating problem is $D^{2/3}$ (D is the distance between field point and corner) and an application is given.

Key words Singular behaviour, Rectangular corner, Velocity potential