

# 含切口悬臂梁的大变形塑性冲击动力响应\*

杨嘉陵\* 陈政\*\*

\* (北京航空航天大学固体所, 北京 100083)

\*\* (计算机应用研究所, 北京 100081)

**摘要** 本文分析了含切口的悬臂梁受飞射物撞击的刚塑性动力响应的完全解, 推导了考虑几何大变形效应的“双铰模式”的动力学方程, 给出了计算方法和计算结果, 最后讨论了耗散能的分配和切口对梁最终变形的影响。

**关键词** 塑性动力响应, 悬臂梁, 大变形, 双铰模式, 耗散能

## 一、引言

近年来, 研究含裂纹或损伤的结构在强动载荷作用下的塑性动力响应及其承载能力的工作开始受到人们的关注。最近有关受撞击的缺陷梁的动态实验 [1] 表明, 缺口处有明显的应变集中现象, 表现在缺口附近呈现近似突变的高曲率区, 因而文献 [1] 指出, 由于应变局部化导致塑性铰的形成, 因此对含缺口的梁采用刚塑性的分析方法是适宜的。事实上 Symonds<sup>[2]</sup> 已经证明如果输入结构的动能远远大于结构所能贮存的弹性应变能, 并且载荷作用的时间远远小于结构自振的最小周期, 就有理由忽略弹性变形, 只计塑性变形。所以对完善结构采取的刚塑性分析方法, 也被用来分析缺陷结构的塑性动力响应。根据已发表的论文可知, 已有的工作主要有: i) 以管道甩动 (pipewhip) 为工程背景的折梁受面外冲击的塑性动力响应<sup>[3]</sup>; ii) 以核电劣化管道裂纹稳定性分析为背景的含裂纹的悬臂梁受飞射物撞击的塑性动力响应<sup>[4]</sup>; iii) 基于上述背景的缺陷梁受剪、拉、弯联合作用的塑性动力分析和破坏<sup>[5]</sup>。值得注意的是缺陷梁的响应模式往往是所谓的“多铰模式”<sup>[6,7,8]</sup>即在梁上同时形成若干个塑性铰, 只有在这种模式下才能获得完全解, 从而确定出耗散能的分配。

然而过去的工作都忽略了几何大变形的影响, 这显然与忽略弹性效应的刚塑性假设相矛盾, 因为在外力做功远远大于结构所能贮存的弹性变形能的情况下, 几何大变形的影响应该考虑进去<sup>[9]</sup>。

本文分析一个根部含切口的悬臂梁受冲击载荷作用的塑性动力响应, 严格推导基于“双铰模式”的大变形控制方程, 并给出计算方法和数值结果, 最终得到梁的耗散能分配。值得提出的是本文的计算结果可直接用于核电劣化管道裂纹的稳定性分析, 关于这一点可参看文献 [4]。

\* 博士后基金资助。

本文于 1991 年 11 月 7 日收到第一稿, 于 1992 年 1 月 17 日收到修改稿。

## 二、分 析

考虑根部含切口的悬臂梁, 如图1所示, 设切口深度为  $a$ , 梁的长度为  $L$ , 质量为  $mL$ . 假定在初始时刻  $t = 0$ , 梁端部受到一个横向刚性质量块  $G$  的撞击, 其初速度为  $V_0$ . 如果设梁均匀完善截面的塑性动力弯矩为  $M_0$ , 则含切口截面的塑性动力弯矩为  $\gamma M_0$ . 其中  $\gamma$  为削弱因子, 并有  $0 < \gamma < 1$ , 关于  $\gamma$  的讨论可参看文献[4]. 当  $\gamma = 1$  时, 表示没有缺口存在. 杨嘉陵和余同希<sup>[4]</sup>, 给出了该问题在小变形情况下动力响应的完全解, 这个解的动力学方程是建立在双铰模式基础上的, 其动力响应可分为两相, 第一相 ( $0 < \tau < \tau_I$ ), ( $\tau$  表示无量纲时间), 在梁的根部形成一个固定铰  $O$  和一个从端部向根部运动的移行铰  $B$  (见图2),  $OB$  段绕  $O$  铰转动的同时,  $BA$  段又绕移行铰  $B$  转动, 直到两段的相对速度为零, 移行铰消失. 第二相 ( $\tau > \tau_I$ ) 整个梁绕根部的固定铰做刚性转动, 直到消耗掉全部动能. 下面我们对这样的响应模式采用大变形的分析方法来考虑.

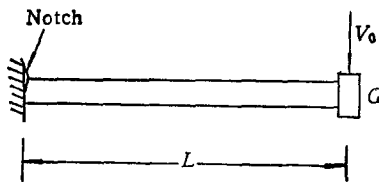


图1 含切口的悬臂梁  
Fig. 1 Notched cantilever beam

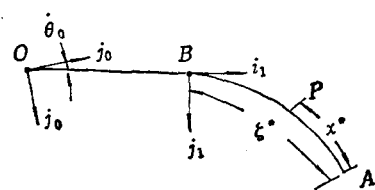


图2 双铰模式  
Fig. 2 Double-hinge mechanisms

### 第一相 ( $0 < \tau < \tau_I$ )

为了建立双铰模式的大变形方程(图2), 首先引入两坐标系, 一个固定坐标系, 原点与固定铰  $O$  重合, 其方向矢量  $i_0, j_0$  分别平行于梁变形前的轴向和横向. 另一个为动坐标系, 其原点与移行铰  $B$  重合, 并随之一起运动, 相互垂直的两个方向矢量  $i_1, j_1$  同  $OB$  一道以角速度  $\dot{\theta}_0 \equiv \frac{d\theta_0}{dt}$  绕  $O$  铰转动. 假定在任意时刻, 移行铰  $B$  移行到距端点  $A$  为  $\zeta^*$  的地方, 其相对速度为  $\dot{\zeta}^* \equiv \frac{d\zeta^*}{dt}$ ; 并用  $\dot{\theta}_1 \equiv \frac{d\theta_1}{dt}$  表示移行铰  $B$  相对于动坐标系的转动角速

度;  $x^*$  表示变形后梁  $AB$  段内任意点  $P(r)$  的位置(从端点  $A$  开始度量)这里  $r = \overrightarrow{OP}$ , 进一步令  $U^*, W^*$  表示  $P$  点相对于动坐标系在  $i_1, j_1$  方向上的位移, 于是根据图2的几何关系, 我们有:

$$\left. \begin{aligned} U^*(x^*, \zeta^*) &= \int_{x^*}^{\zeta^*} \cos \theta(\xi, \zeta^*) d\xi \\ W^*(x^*, \zeta^*) &= \int_{x^*}^{\zeta^*} \sin \theta(\xi, \zeta^*) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

上式中的  $\theta(x^*, \zeta^*)$  表示当移行铰运动到  $\zeta^*$  时,  $x^*$  处相对于动坐标系的转角, 并有

$$\theta(x^*, \zeta^*) = \int_{x^*}^{\zeta^*} K^*(\xi) d\xi \quad (2)$$

其中  $K^*(x^*)$  表示  $x^*$  处的曲率.

$P$  点的绝对速度为:

$$\mathbf{V}_P = \dot{\theta}_0 \times \mathbf{r} + \dot{\theta}_1 \times (U^* \mathbf{i}_1 + W^* \mathbf{j}_1) \quad (3)$$

从图 2, 我们容易得到

$$\mathbf{r} = [(L - \zeta^*) \cos \theta_0 + U^* \cos \theta_0 - W^* \sin \theta_0] \mathbf{i}_0 + [(L - \zeta^*) \sin \theta_0 + U^* \sin \theta_0 + W^* \cos \theta_0] \mathbf{j}_0 \quad (4)$$

将(4)式代入(3)式, 并对等式两边关于时间  $t$  微分得到  $P$  点的绝对加速度为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_P = & -[(\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1)(U^* \sin \theta_0 + W^* \cos \theta_0) + (\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^2(U^* \cos \theta_0 - W^* \sin \theta_0) \\ & + (L - \zeta^*)\ddot{\theta}_0 \sin \theta_0 + \dot{\theta}_1 \dot{\zeta}^* \sin \theta_0 + \dot{\theta}_0^2(L - \zeta^*) \cos \theta_0] \mathbf{i}_0 \\ & + [(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_0)(U^* \cos \theta_0 - W^* \sin \theta_0) + \ddot{\theta}_0(L - \zeta^*) \cos \theta_0 \\ & - \dot{\theta}_0^2(L - \zeta^*) \sin \theta_0 + \dot{\theta}_1 \dot{\zeta}^* \cos \theta_0 - \\ & - (\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^2(U^* \sin \theta_0 + W^* \cos \theta_0)] \mathbf{j}_0 \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $(\dot{\phantom{x}}) = \frac{d(\phantom{x})}{dt}$ ;  $(\ddot{\phantom{x}}) = \frac{d^2(\phantom{x})}{dt^2}$ ,  $AB$  段的动量方程在  $\mathbf{i}_0$  方向的投影为:

$$\int_0^{\zeta^*} \dot{\mathbf{V}}_P(x^*, \zeta^*) \cdot \mathbf{j}_0 m dx^* + G \dot{\mathbf{V}}_P(0, \zeta^*) \cdot \mathbf{j}_0 = 0 \quad (6)$$

$AB$  段关于  $A$  的动量矩平衡方程为

$$-\int_0^{\zeta^*} \overrightarrow{AP} \times \dot{\mathbf{V}}_P(x^*, \zeta^*) m dx^* + \mathbf{M}_0 = 0 \quad (7)$$

其中  $\overrightarrow{AP} = [U^*(x^*, \zeta^*) - U^*(0, \zeta^*)] \mathbf{i}_1 + [W^*(x^*, \zeta^*) - W^*(0, \zeta^*)] \mathbf{j}_1$  为求解方便引入下列无量纲参量.

$$g = G/mL; \tau = t \sqrt{\frac{M_0}{mL^3}}$$

$$(\circ) = \frac{d(\circ)}{d\tau}; x = x^*/L; \zeta = \zeta^*/L;$$

$$U = U^*/L; W = W^*/L; K = LK^*$$

将(5)式代入(6),(7)式经无量纲化给出

$$\begin{aligned} \{(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_0) \cos \theta_0 - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_0)^2 \sin \theta_0\} I_1(\zeta) - [(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_0) \sin \theta_0 \\ + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_0)^2 \cos \theta_0] I_2(\zeta) + (\zeta + g)[\ddot{\theta}_0(1 - \zeta) \cos \theta_0 \\ - \dot{\theta}_0^2(1 - \zeta) \sin \theta_0 + \dot{\theta}_1 \dot{\zeta} \cos \theta_0] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_0) I_0(\zeta) + \dot{\theta}_1 \dot{\zeta} I_1(\zeta) + \ddot{\theta}_0(1 - \zeta) I_1(\zeta) + \dot{\theta}_0^2(1 - \zeta) I_2(\zeta) + 1 = 0 \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} I_1(\zeta) = \int_0^\zeta U(\xi, \zeta) d\xi + gU(0, \zeta) \\ I_2(\zeta) = \int_0^\zeta W(\xi, \zeta) d\xi + gW(0, \zeta) \\ I_0(\zeta) = \int_0^\zeta (U^2(\xi, \zeta) + W^2(\xi, \zeta)) d\xi + g[U^2(0, \zeta) + W^2(0, \zeta)] \end{cases}$$

将上式两端对  $\zeta$  求导数并注意(1),(2)式, 经演化后得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI_1}{d\zeta} &= g + \zeta - KI_2(\zeta) \\ \frac{dI_2}{d\zeta} &= KI_1(\zeta) \\ \frac{dI_0}{d\zeta} &= 2I_1(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

对于刚性段  $OB$ , 很容易得到关于  $B$  点的动量矩平衡方程的无量纲形式, 即

$$(1 - \zeta)^3 \ddot{\theta}_0 = 3(1 - \gamma) \quad (11)$$

另一方面从 (2) 式我们有下列关系

$$\dot{\theta}_1 = \zeta K \quad (12)$$

至此为止, (8)–(12) 式构成了第一相塑性动力响应的基本方程组, 这个方程组是非线性的, 下一节将给出数值求解方法。

这一相结束的条件是  $\dot{\theta}_1|_{\tau=\tau_1} = 0$ , 这时  $AB$  段相对于  $BO$  段的相对角速度为零, 移行铰  $B$  消失,  $\widehat{OBA}$  变成刚性段。

第二相  $\tau > \tau_1$

第一相结束以后, 变形后的梁以及端部的质量块仍然具有动能。这一相的分析与文献 [4] 相同, 即  $\widehat{OBA}$  成为刚性段绕根部的固定铰  $O$  转动, 直到剩下的全部动能消耗在固定铰上。根据能量平衡, 可以得到固定铰(切口截面)的最终转角  $\theta_1$  为:

$$\theta_1 = \theta_0 \Big|_{\tau=\tau_1} + \frac{1}{2\gamma} I \dot{\theta}_0^2 \Big|_{\tau=\tau_1} \quad (13)$$

其中:  $I = I_0 + 2(1 - \zeta)I_1 + (1 - \zeta)^2(\zeta + g)$

### 三、方程组的求解

为了求解 (8)–(12) 式, 引入变量代换关系

$$\eta = \dot{\theta}_1 \zeta \quad (14)$$

从 (14) 式我们有:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \eta / \zeta \\ \ddot{\theta}_1 &= \left( \eta' / \zeta - \frac{1}{\zeta^2} \eta \right) \dot{\zeta} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

注意 (15) 式  $(\quad)' = \frac{d(\quad)}{d\zeta}$ . 利用 (15) 式的变量代换关系, 并注意:  $\ddot{\theta}_0 = (\dot{\theta}_0)' \dot{\zeta} =$

$(\dot{\theta}_0)' \eta / \zeta K$ , 方程 (8)–(12) 可变换为下列形式:

$$\eta' = \eta \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{I_1}{I_0} - \frac{\theta_0^2 (1 - \zeta) I_2 \zeta^2 + b_1 \zeta^2 (I_0 + (1 - \zeta) I_1) + \zeta^2}{b_0 I_0} \right) \quad (16)$$

$$(\dot{\theta}_0)' = b_1 \eta \zeta / b_0 \quad (17)$$

$$\theta_0' = \dot{\theta}_0 \eta \zeta / b_0 \quad (18)$$

$$I_2' = g + \zeta - I_2 \eta^2 / b_0 \quad (19)$$

$$I_2' = I_1 \eta^2 / b_0 \quad (20)$$

$$I_0' = 2I_1 \quad (21)$$

其中  $b_0, b_1$  由下式给出

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{a_0} (a_1 \zeta^2 \dot{\theta}_0^2 + a_3 \zeta^2 + 2a_2 \zeta \eta \dot{\theta}_0 + a_2 \eta^2) \\ b_1 &= \frac{3(1-\gamma)}{(1-\zeta)^3} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(22) 式中的  $a_0, a_1, a_2, a_3$  定义为:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{(I_1 \cos \theta_0 - I_2 \sin \theta_0) I_1}{I_0} - \cos \theta_0 (g + \zeta) \\ a_1 &= -\frac{(I_1 \cos \theta_0 - I_2 \sin \theta_0) I_2 (1 - \zeta)}{I_0} \\ &\quad - [I_1 \sin \theta_0 + I_2 \cos \theta_0 + (1 - \zeta)(g + \zeta) \sin \theta_0] \\ a_2 &= -(I_1 \sin \theta_0 + I_2 \cos \theta_0) \\ a_3 &= -\frac{I_1 \cos \theta_0 - I_2 \sin \theta_0}{I_0} \\ &\quad + b_1 (1 - \gamma) \left[ (\zeta + g) \cos \theta_0 - \frac{I_1 (I_1 \cos \theta_0 - I_2 \sin \theta_0)}{I_0} \right] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

初始条件是: 当  $\zeta = 0$  时, 有:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \sqrt{\frac{2\lambda}{g}}, \\ \theta_0 &= \dot{\theta}_0 = 0 \\ I_0 &= I_1 = I_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中  $\lambda = \frac{1}{2} GV_0^2 / M_0$

方程 (16)–(21) 组成以  $\zeta$  为自变量的常微分方程组, 结合初值条件 (24) 式, 可用 Runge-Kutta 法求解。最后我们来考虑梁中的耗散能分配。由于输入结构的动能分别耗散到移行铰  $B$ , 和切口截面的固定铰  $O$  上, 于是根据能量平衡, 我们有

$$\frac{1}{2} GV_0^2 \equiv E_t = E_O + E_B \quad (25)$$

其中  $E_t, E_O, E_B$  分别表示输入结构的总能量, 固定铰耗散的能量, 和移行铰耗散的能量。注意 (13) 式, 有

$$E_O = \gamma M_0 \theta_s$$

从 (25) 式得到:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_O}{E_t} &= \frac{\gamma \theta_s}{\lambda} \\ \frac{E_B}{E_t} &= 1 - \frac{\gamma \theta_s}{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

#### 四、数值结果和讨论

图 3、图 4 给出了质量比  $g = 0.2$ ,  $\lambda$  分别等于 1 和  $\pi/2$  时, 梁最终的挠度和形状受不同切口深度影响 ( $\gamma$  从 1 变化到 0.5) 的变形曲线.  $\gamma = 1$  表示无缺陷的完善梁情形, 由 (11) 式知在这种情形下  $\ddot{\theta}_0 = 0$ , 这个结果退化到 Ting [10] 的解, 对于  $\gamma < 1$ , 我们看到梁最终的变形随着  $\gamma$  减小而迅速增大, 这显然是由于深切口梁的根部截面严重削弱使得变形集中到切口截面的缘故, 特别值得注意的是随着  $\gamma$  减小, 移行铰最终消失的位置

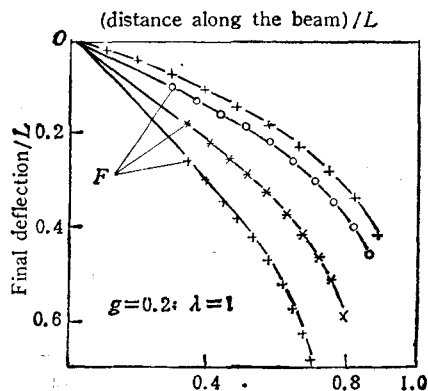


图 3 梁的最终变形

Fig. 3 Final deformed beam

+  $\gamma = 0.50$  \*  $\gamma = 0.64$   
o  $\gamma = 0.85$  x  $\gamma = 1$

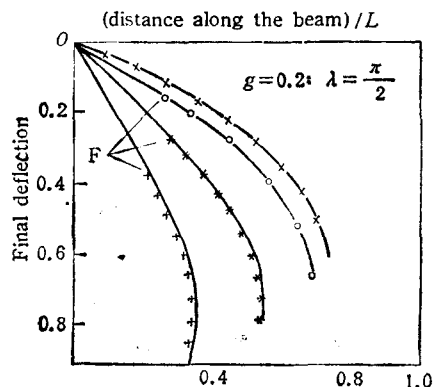


图 4 梁的最终变形

Fig. 4 Final deformed beam

+  $\gamma = 0.50$  \*  $\gamma = 0.64$   
o  $\gamma = 0.85$  x  $\gamma = 1$

越来越靠近梁的端部, 也就是说只要  $\gamma < 1$ , 在根部附近就会出现一段未变形的刚性区 (用  $OF$  表示), 并且这段区域随着  $\gamma$  减小而增大, 这个现象表明含切口梁与完善梁相比不仅在最终挠度上有差异而且在最终形状上也有明显不同. 对于深切口梁 ( $\gamma = 0.5$ ), 整个梁的变形更集中于两端, 这种高曲率集中效应在实验中能够观察到.

梁中的耗散能分配主要取决于质量比  $g$  (见图 5). 当  $\gamma$  保持不变时, 撞击质量大的飞射物将使得大部分输入动能消耗在固定铰  $O$  上, 而撞击质量小的飞射物使得大部分输入动能消耗在移行铰上, 这个结论与完善梁的结果是一致的. 所不同的是当  $g \rightarrow 0$  时, 对于完善梁有  $E_0 = 0$  即固定铰不消耗能量, 但对于含切口的梁只要  $\gamma < 1$ , 就有  $E_0 > 0$ .

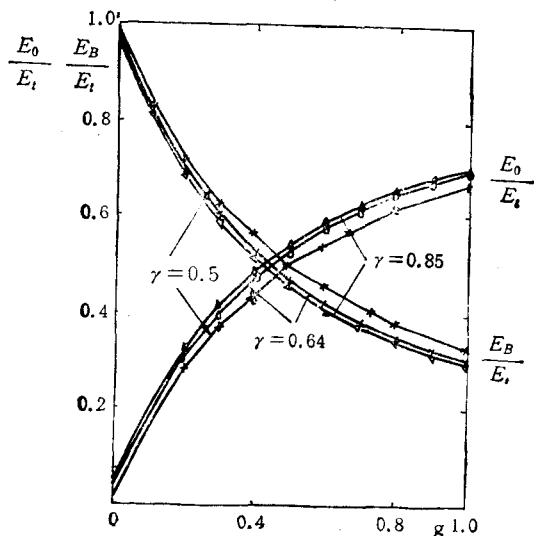


图 5 梁中的耗散能分配

Fig. 5 The distribution of the dissipated energy in the beam

另外从图 5 我们看到, 对于给定质量比  $g$ ,  $\gamma$  对耗散能分配的影响很小。例如: 取  $g = 0.40$ ,  $\gamma = 0.85; 0.64; 0.50$  可以发现  $E_0/E_t \approx 0.43; 0.47; 0.49$ 。这说明切口深度对耗散能分配影响甚小。这个结论对我们进行含裂纹梁在强动载荷作用下的实验, 研究裂纹的稳定性是有利的。因为我们只要确定一个  $\gamma$  值对应的耗散能分配曲线, 也就近似得到了一组  $\gamma$  值的耗散能分配曲线。从而减少了实验参数。关于怎样将耗散能与断裂准则结合起来评价含裂纹梁的承载能力可参看文献 [4]。

## 五、结 论

本文对根部含切口的悬臂梁受飞射物撞击的塑性动力响应, 给出了“双铰模式”的大变形分析。文中说明了控制方程可最终归结为求解一组非线性的常微分方程的初值问题, 并给出数值结果。计算结果表明切口的深度不仅影响梁的最终挠度, 而且影响最终的形状。切口越深, 梁的变形越集中到切口附近和梁的端部; 这正反映了缺陷引起的应变集中效应。计算结果还表明, 切口深度对梁的耗散能分配影响很小, 而质量比  $g$  的影响却很大。

## 参 考 文 献

- [1] Woodward R.L. and Baxter B.J. Experiments on the impact bending of continuous and notched steel beams, *Int. J. Impact Engng* 1986 4: 57—68
- [2] Symonds P.S. Survey of Methods of Analysis for Plastic Deformation of Structure under Dynamic Loading, Brown. Univ., Division of Engineering Report, BU/NSRDC/1967 1—67
- [3] Reid, S.R. Hua Y.L. (华云龙) and Yang J.L. (杨嘉陵), Development of double hinge mechanisms in a bent cantilever subjected to an out-of-plane force Pulse, *Int. J. Impact Engng*, 1990 9: 485—502
- [4] 杨嘉陵, 余同希. 含裂纹的悬臂梁在冲击载荷作用下的刚塑性动力响应完全解及其裂纹失稳扩展准则, 北京大学学报, 1991, 27: 576—589
- [5] Yang J.L. (杨嘉陵), Yu T.X. (余同希) Dynamic Plastic Response and Damage of Clamped Imperfect Beams Subjected to Impact by Taking Account of Shear Bending and Tension Effects, to be published
- [6] Hua Y.L. (华云龙), Yu T.X. (余同希) and Reid, S.R. Double hinge modes in the dynamic response of plastic cantilever beam subjected to step loading. *Int. J. Impact. Engng*, 1988 7: 401—413
- [7] 杨嘉陵, 余同希, 华云龙. 含缺陷的固支梁在阶跃载荷作用下塑性动力响应完全解, 振动与冲击, 1991(2): 20—29
- [8] Yang J.L. (杨嘉陵), Yu T.X. (余同希), Dynamic response of a rigid-plastic simply-supported imperfect beam subjected to a uniform intense dynamic loading *Int. J. Impact Engng*, 1991 11: 211—223
- [9] 余同希. 结构塑性动力响应中的大变形效应及其分析方法. 塑性力学和地球动力学文集. 余同希, 王大钧编, 北京大学出版社 1990: 124—131
- [10] Ting, T.C.T. Large deformation of a rigid, ideally plastic cantilever beam, *J. Appl. Mech.* 1965 32: 295—302

## THE LARGE DEFLECTION DYNAMIC PLASTIC RESPONSE OF A NOTCHED CANTILEVER BEAM SUBJECTED TO IMPACT

Yang Jialing

*(Solid Mechanics Research Centre, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing, 100083, China)*

Chen Zheng

*(Institute of Computer Application, Beijing, 100081, China)*

**Abstract** The paper examines the complete solution of a rigid-plastic notched cantilever beam subjected to impact by a projectile. A group of large deflection governing equations for the double-hinge mechanisms is derived. Numerical solution for the equations is presented to calculate the permanent deformation of the beam. Finally, the distribution of the dissipated energy in the beam and the effects of the notch on its plastic deformation are discussed.

**Key words** Dynamic plastic response; Cantilever beam; Large deflection; Double-hinge mechanisms; Dissipated energy